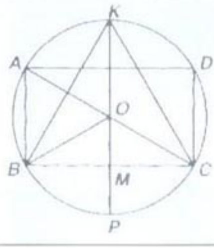
TEMAS SELECTOS DE MATEMATICAS ELEMENTALES

G. DOROFEIEV
M. POTAPOV
N. ROZOV

$a + bc$



$\operatorname{sen} 2x$

EDITORIAL MIR - MOSCU

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»
МОСКВА

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES

G. DOROFÉIEV,
M. POTÁPOV,
N. ROZOV

EDITORIAL MIR · MOSCÚ

CDU 510 (023) = 60

(На испанском языке)

Impreso en la URSS 1973

Д $\frac{0223\text{-}280}{041\ (01)\text{-}73}$

PARTE I

ARITMÉTICA Y ALGEBRA

§ 1. OBSERVACIONES GENERALES SOBRE ARITMÉTICA Y ALGEBRA

No es necesario persuadir a quienes hayan cursado estudios en la escuela de que todos los conceptos usados en las Matemáticas son rigurosamente *definidos* (excepto, claro está, los más *elementales*, tales como número entero positivo, igualdad, punto, recta y plano). En efecto estas definiciones se inculcan a los alumnos durante el curso escolar, pero cuanto más se alejan de estas definiciones y profundizan en la teoría y la solución de los problemas, cuanto más se van acostumbrando a los conceptos utilizados, tanto más son propensos a considerar, a veces sin darse cuenta de ello, que estos conceptos son "comprensibles por sí mismo" y no requieren definición alguna.

Sin embargo, los estudiantes han de estar en posesión de conocimientos exactos y lógicos del curso de Matemáticas elementales y, en particular, estar familiarizados con las definiciones. Por tanto, al estudiar las partes de la materia es útil prestar atención especial a las definiciones y lograr una comprensión clara de sus enunciados [1].

En las Matemáticas, además de la definición de los conceptos, está instituido un símbolo especial sobre la formación de uno u otro objeto o relaciones entre éstos. Es preciso recordar bien estos acuerdos que son de por sí *definiciones del símbolo*. Por ejemplo, la suma de dos números se denota con ayuda del signo $+$, el cuadrado de un número a, o sea, el producto de $a \cdot a$, se conviene asignarlo con el símbolo a^2, el hecho de que el número a es menor que el número b, es decir, que el número $a-b$ es negativo, se han acordado representarlo mediante el signo $<$ en forma $a<b$.

Los estudiantes conocen bien los signos de "desigualdades no rigurosas": $\leqslant$ (menos o igual) y $\geqslant$ (más o igual); su aplicación, al realizar transformaciones formales, no presenta dificultades para nadie. Sin embargo, muchos estudiantes, como demuestra la experiencia, no siempre comprenden el sentido de estos signos.

Por ejemplo, a la pregunta, *¿es válida o no la desigualdad* $2 \leqslant 3$? se da a menudo la respuesta: "No, ya que el número 2 es menor que el número 3", y a la pregunta *¿es válida o no la desigualdad* $3 \leqslant 3$? sigue

---

[1] Más adelante insistiremos sobre este particular (Parte II, § 1 y Parte III, § 1).

la respuesta: "No, porque 3 es igual a 3". No obstante, todos los que contestan de tal manera a estas preguntas anotan, sin pensar, la solución de cualquier problema en forma de $x \leqslant 3$. Sin embargo, su idea del signo $\leqslant$ entre los números concretos significa que ninguno de éstos, al sustituirlo en lugar de x, en la desigualdad $x \leqslant 3$, no da una igualdad numérica correcta, es decir, con $\leqslant$ no pueden ser ligados, en general, ningunos números.

En realidad, el asunto es así: por *la definición* del signo $\leqslant$ *la desigualdad* $a \leqslant b$ *se considera justa para* $a < b$ *y* $a = b$. De tal modo, la desigualdad $2 \leqslant 3$ es *justa*, porque 2 es *menor* que 3 y la desigualdad $3 \leqslant 3$ es *justa* porque 3 es *igual* a 3.

De esta definición del signo $\leqslant$ resulta que la desigualdad $a \leqslant b$ no es justa en el caso en que $a > b$. Por esta razón el signo $\leqslant$ se debe leer no sólo "menos o igual" sino que "no es más". Los ejemplos de desigualdades $2 \leqslant 3$ y $3 \leqslant 3$ se leen respectivamente como: "2 no es más de 3" y "3 no es más de 3".

Todo lo expuesto se refiere también al signo $\geqslant$, que junto con la expresión "más o igual" se lee como "no es menos". Según *la definición* del signo $\geqslant$ *la desigualdad* $a \geqslant b$ *es válida si* $a > b$ *o bien, si* $a = b$; es incorrecta solamente cuando $a < b$.

Casi todo estudiante sabe que la función $y = 2^x$ está definida para cada x real, dibujando fácilmente su gráfica. No obstante, la pregunta *¿qué es* $2^{\sqrt{3}}$? deja desconcertado frecuentemente al estudiante. Entonces, en el mejor de los casos se dice cómo *calcular* este número aunque sea aproximadamente. Pero, esto contradice a la lógica: no es posible calcularlo aproximadamente sin saber la definición del número.

Para contestar a la pregunta ¿qué es $2^{\sqrt{3}}$? hay que recordar la definición particular de la potencia de exponente irracional. En efecto, conviene recordar las demás definiciones: la potencia con exponente entero positivo, nulo, racional y negativo. Debe tenerse en cuenta, que la definición general de potencia de exponente entero positivo n no es aplicable para $n = 1$, ya que el producto con un solo factor no tiene sentido. Por lo tanto, la igualdad $a^1 = a$ es *la definición* de primera potencia de un número. Por la misma *definición* se introduce la potencia nula: $a^0 = 1$.

Vamos a aclarar una pregunta más: *¿por qué es válida la igualdad*

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a? \tag{1}$$

Muchos estudiantes demuestran esta igualdad realizando transformaciones del primer miembro. Naturalmente este método es admisible, pero las reglas de operaciones con los radicales alejaron de la mente del estudiante la misma definición de radical. ¿Cómo se define la raíz cúbica de un número? *Llámase* raíz cúbica de un número a el número cuyo cubo es igual a a. Se sabe también de que la raíz cúbica del número a se designa con el símbolo $\sqrt[3]{a}$. De tal modo, la igualdad (1) es simplemente un enunciado en fórmula de definición de la raíz cúbica tomando en consideración el acuerdo sobre el sentido del símbolo $\sqrt[3]{\ }$.

El curso de Algebra abarca un número suficiente de diferentes afirmaciones. Está muy difundida la opinión de que la Geometría exige razonamientos estrictos, que contiene teoremas de demostración minuciosa con definiciones requeridas, y que en Algebra existe un solo teorema, que es el de Viete, y todo lo demás son palabras y fórmulas. Esto es un error grave. Hasta la fórmula del cuadrado de suma es un *teorema*. Las propiedades de una función logarítmica constituyen unos cuantos teoremas. Cada teorema de Algebra, al igual que en Geometría, debe acompañarse de una demostración, antes de la cual se ha de dar las definiciones de todos los conceptos que se encuentran en su enunciado.

La experiencia demuestra que cuanto más habitual es la afirmación algebraica, cuanto más frecuente es su aplicación para la resolución de los problemas, tanto más se olvida que no sólo hay que saber enunciar y aplicarla con exactitud sino que también *demostrarla*. Por esta razón es necesario prestar atención especial a la habilidad de fundamentar tales o cuales afirmaciones, sobre todo las que se imaginan "evidentes".

Todos en absoluto conocen bien la fórmula para la resolución de la ecuación de segundo grado; sin embargo, cuando se pide hacer su deducción esto deja desconcertados a algunos estudiantes. Estas dificultades están relacionadas con *los teoremas sobre la resolución de desigualdades de segundo grado*. A pesar de que el estudiante resuelve correctamente tales desigualdades, no siempre puede contestar, con bastantes argumentos, a la pregunta: *¿por qué* el trinomio cuadrático de coeficiente positivo para x^2 es positivo fuera del intervalo entre las raíces, si éstas son reales, y es positivo también si las raíces son imaginarias para cualquier x?

Mientras tanto, las demostraciones exactas de los teoremas sobre el signo del trinomio cuadrático no son difíciles.

Si el trinomio cuadrático ax^2+bx+c, $a\neq 0$ contiene raíces reales x_1 y x_2 (es decir, su discriminante es positivo) este trinomio se desarrolla en factores:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \tag{2}$$

Es evidente que para cualquier x, mayor que la raíz mayor, ambos factores entre paréntesis, o sea, $(x-x_1)$ y $(x-x_2)$, son positivos, y para cualquier x, menor que la raíz menor, son negativos. En consecuencia, en uno u otro caso su producto $(x-x_1)(x-x_2)$ es positivo, ya que el segundo miembro de la fórmula (2) lleva el mismo signo que el número a. Así pues, si x se halla en el intervalo entre las raíces x_1

y x_2, entonces, uno de los paréntesis de (2) es positivo y el otro, negativo; por lo tanto, el signo del producto en el segundo miembro (2) es opuesto al signo de a.

De tal modo, queda demostrado el teorema: *el valor del trinomio cuadrático* ax^2+bx+c *con discriminante positivo* $(b^2-4ac>0)$ *para cualquier* x, *fuera del intervalo entre las raíces del trinomio, tiene un signo que coincide con el del coeficiente* a, *y para cualquier* x *dentro del intervalo entre las raíces es opuesto al signo de* a [1].

También se propone otro teorema: *el valor del trinomio* ax^2+bx+c *con discriminante negativo* $(b^2-4ac<0)$, *para cualquier* x, *tiene el signo que coincide con el signo del coeficiente* a. Para demostrar este teorema vamos a eliminar del trinomio un cuadrado exacto:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]. \tag{3}$$

Ya que el discriminante $b^2-4ac<0$ (como es sabido, en este caso el trinomio contiene raíces imaginarias), es cierto que la expresión entre corchetes es positiva para cualquier valor de x. Por eso, el producto del miembro derecho (3) y el número a tienen el mismo signo para cualquier valor de x.

Con frecuencia a los estudiantes resulta difícil resolver *ecuaciones bicuadradas*. Parece que en esto no hay dificultad alguna, puesto que *la ecuación bicuadrada* $ax^4+bx^2+c=0$ *se reduce a la cuadrática mediante una sustitución ordinaria* $x^2=y$. Supongamos, no obstante, que la ecuación cuadrática obtenida tiene las raíces imaginarias y_1 e y_2. En este caso, para determinar x es necesario saber extraer la raíz cuadrada de un número complejo. Este problema por sí mismo no es muy difícil y para su resolución existen fórmulas adecuadas. Sin embargo, se puede evitar en absoluto este método: sin recurrir a la sustitución ordinaria se debe descomponer el primer miembro en factores mediante cierta transformación especial.

Esta transformación consiste en eliminar un cuadrado exacto del trinomio ax^4+bx^2+c, lo que conduce a la solución sólo cuando la ecuación cuadrática $ay^2+by+c=0$ tenga raíces *imaginarias*.

En el caso dado, la eliminación del cuadrado exacto se realiza diferenciándose en algo de lo común: es decir, se agrupan el término superior y el término independiente y su suma se adiciona hasta obtener el cuadrado exacto.

Sea $x^4+bx^2+c=0$ una ecuación (consideremos para simplicidad que $a=1$, lo que se logra fácilmente), con esto la ecuación y^2+ $+by+c=0$ tiene raíces imaginarias. Esta condición significa que el discriminante $D=b^2-4c<0$, o sea, $b^2<4c$. De ahí está claro que

[1] El lector mismo enunciará y demostrará el teorema referente al caso en que el trinomio ax^2+bx+c tiene raíces iguales, o sea, cuando su discriminante es igual a cero: $b^2-4ac=0$.

$c>0$ y $|b|<2\sqrt{c}$, es decir, $b<2\sqrt{c}$. Por esto es posible realizar las siguientes transformaciones:

$$x^4+bx^2+c=(x^4+c)+bx^2=(x^4+2\sqrt{c}x^2+c)-(2\sqrt{c}-b)x^2=$$
$$=(x^2+\sqrt{c})^2-(2\sqrt{c}-b)x^2=(x^2+x\sqrt{2\sqrt{c}-b}+\sqrt{c})(x^2-$$
$$-x\sqrt{2\sqrt{c}-b}+\sqrt{c}).$$

Después de estas transformaciones la resolución de la ecuación bicuadrada se reduce a la resolución de dos ecuaciones cuadráticas con los coeficientes reales.

Naturalmente, no es necesario recordar las fórmulas voluminosas obtenidas; más vale, en cada caso concreto, realizar la eliminación señalada del cuadrado exacto. Resolvamos, por ejemplo, esta ecuación

$$2x^4+2x^2+3=0.$$

Primeramente obtenemos la ecuación reducida $x^4+x^2+3/2=0$. Su discriminante es igual a $1^2-4\cdot 3/2=-5<0$. Por eso, apliquemos el método expuesto:

$$x^4+x^2+3/2=(x^4+2\sqrt{3/2}\,x^2+3/2)-(2\sqrt{3/2}-1)\,x^2=$$
$$=(x^2+\sqrt{3/2})^2-(\sqrt{6}-1)\,x^2=$$
$$=\left(x^2+x\sqrt{\sqrt{6}-1}+\sqrt{3/2}\right)\times$$
$$\times\left(x^2-x\sqrt{\sqrt{6}-1}+\sqrt{3/2}\right).$$

Ahora vamos a la resolución de las ecuaciones cuadráticas sin que temamos a los radicales complejos. La primera ecuación

$$x^2+x\sqrt{\sqrt{6}-1}+\sqrt{3/2}=0$$

tiene un discriminante negativo $D=(\sqrt{\sqrt{6}-1})^2-4\sqrt{3/2}=-1-\sqrt{6}$ por la razón de que sus raíces

$$x_{1,2}=-\frac{\sqrt{\sqrt{6}-1}}{2}\pm i\frac{\sqrt{\sqrt{6}+1}}{2}.$$

Las raíces de la segunda ecuación se hallan análogamente:

$$x^2-x\sqrt{\sqrt{6}-1}+\sqrt{3/2}=0;$$

estas raíces son:

$$x_{3,4}=\frac{\sqrt{\sqrt{6}-1}}{2}\pm i\frac{\sqrt{\sqrt{6}+1}}{2}.$$

La resolución de las ecuaciones binomias de sexta potencia que tienen la forma de $x^6+a^6=0$ se reduce a la resolución de las ecuaciones bicuadradas de esta índole (aquí se debe descomponer el primer miembro como suma de cubos y aplicar el método arriba examinado).

Es necesario decir unas palabras a propósito de los enunciados de una serie de definiciones y teoremas. En la mayoría de los casos éstas se expresan por palabras, sin que se utilicen designaciones convencionales de letras. En muchos casos esto está justificado, pero frecuentemente se hace difícil el enunciado. Por ejemplo, en lugar de decir "el cuadrado de la suma de dos números cualesquiera es igual a la suma de los cuadrados de estos números más el doble de su producto", es más fácil expresar así: "para cualesquier números a y b tenemos $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$". Y la definición del logaritmo es más conveniente darla en la forma siguiente: "el número x es logaritmo del número N en la base $a\,(a>0,\ a\neq 1)$, si $a^x = N$".

Hay que convertir libremente estas afirmaciones en las de las fórmulas y viceversa. Precisamente lo dicho se exige para la demostración de uno u otro teorema. Por ejemplo, para demostrar que "con la base mayor que la unidad, los logaritmos de los números mayores que 1 son positivos", debemos ante todo introducir las designaciones: sean la base $a>1$, el número $x>1$ e $y=\log_a x$ y luego determinar que el número $y>0$ Esta interpretación está relacionada con la necesidad de utilizar tal o cual definición. Por ejemplo, antes de demostrar la afirmación "la función $y=\log_a x$ que crece con $a>1$" hay que recordar qué cosa significa la función creciente y entonces la demostración empezará por las palabras: "Sea $a>1$, sean x_1 y x_2 los números positivos, para $x_1<x_2$; demostremos que $\log_a x_1 < \log_a x_2$".

Los estudiantes no siempre comprenden que algunas paráfrasis de fórmulas utilizan simultáneamente símbolos adoptados para unos u otros conceptos. Precisamente, por esto se explica que no siempre se ve la definición de la raíz cúbica en la fórmula (1) escrita con ayuda del signo $\sqrt[3]{\ }$, y en la igualdad $a^{\log_a N} = N\,(N>0,\ a>0,\ a\neq 1)$, la anotación simbólica de la definición literal "acostumbrada" del logaritmo que se basa en el acuerdo sobre la designación del logaritmo del número N, en la base a, como $\log_a N$.

EJERCICIOS:

1. ¿Qué significa: a) la fracción decimal periódica; b) $a^{2/3}$; c) la ecuación de segundo grado, d) $\sqrt{11}$; e) el módulo del número complejo; f) $a>b$; g) la suma de la progresión geométrica infinitamente decreciente?

2. ¿Es la definición, el axioma o el teorema cada una de las aseveraciones siguientes: a) la igualdad no se altera al multiplicar sus ambos miembros por un mismo número; b) el módulo de cualquier número no es negativo; c) $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$; d) la gráfica de la función $y = -3x$ pasa por el origen de las coordenadas?

3. ¿Es siempre válida la igualdad $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$?

4. Si el discriminante de una ecuación de segundo grado es positivo, esta ecuación tiene dos diferentes raíces reales. Enúnciense los teoremas: el inverso, el contrario y el contrario al inverso. ¿Cuáles de estos teoremas son correctos?

5. Demuéstrese que si las raíces de una ecuación de segundo grado son imaginarias, entonces el discriminante de esta ecuación es negativo.

6. Escríbase en forma de fórmula la condición de que entre los números $a_1, \ldots, a_n$, uno, por lo menos, es igual al número α.

7. Escríbase en forma de una igualdad la condición de que entre los números a, b, c, dos, por lo menos, son iguales a cero.

8. ¿Qué se puede decir de los números a y b, si $1/a < 1/b$? ¿De cuales propiedades de la función $y = 1/x$ se deduce la respuesta a esta pregunta?

9. Escríbase en el lenguaje de relaciones matemáticas la aseveración: la función $y = 3x - x^2$ crece al variar el argumento dentro del segmento de -1 a $+1$.

10. ¿La condición de que la suma de las cifras de un numero se divide por 3, es una condición necesaria, suficiente o necesaria y suficiente para que el número se divide por 12?

§ 2. NÚMEROS ENTEROS, RACIONALES E IRRACIONALES

Son frecuentes los problemas relacionados con la Aritmética que presentan dificultades ante los estudiantes. Estas dificultades se explican generalmente por el hecho de que la Aritmética se estudia en las clases de primaria, donde muchos resultados se les comunican a los alumnos sin demostraciones. Más tarde, no se vuelve a estos problemas. Sin embargo, esto no aminora, de manera alguna, la importancia de tales partes de la Aritmética como la divisibilidad de los números enteros, las propiedades de las fracciones, la teoría de las proporciones, etc.

El estudiante tiene que saber enunciados de los resultados correspondientes; además de esto, es necesario saber demostrarlos: aquí se puede plantear un problema relacionado, por ejemplo, con la deducción de tal o cual criterio de la divisibilidad. Estas demostraciones presentan de por sí un ejercicio completamente factible para todo aquel que dominó acertadamente el curso de Algebra.

Demostremos, como ejemplo *el criterio de divisibilidad por* 9. Sea el número entero positivo $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$. Aquí el símbolo $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ significa un número de $(n+1)$ cifras [1], donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son las cifras de los dígitos respectivos de este número [2] (o sea, $1 \leqslant a_n \leqslant 9$, $0 \leqslant a_{n-1} \leqslant 9$, $\ldots$, $0 \leqslant a_1 \leqslant 9$, $0 \leqslant a_0 \leqslant 9$). Debemos demostrar dos afirmaciones: a) si la suma de las cifras $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ del número N se divide por 9, el mismo número N se divide también por 9; b) si el número N se divide por 9, la suma de sus cifras se divide también por 9.

Siguiendo al principio del sistema numérico decimal de posición

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Ya que $10^k = \underbrace{\overline{99 \ldots 9}}_{k \text{ veces}} + 1$ para cualquier $k \geqslant 1$ entero positivo,

[1] La línea por arriba se pone para que no se confunda con el producto de los números $a_n, \ldots, a_0$.

[2] Es natural que la cifra del dígito mayor se considera distinto de cero.

obtenemos

$$N=\Big[a_n\underbrace{99\ldots 9}_{n \text{ veces}}+a_{n-1}\underbrace{99\ldots 9}_{n-1 \text{ veces}}+\ldots+a_2\times$$
$$\times 99+a_1\, 9\Big]+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1+a_0). \quad (4)$$

Es evidente que el número entre corchetes se divide por 9, ya que es la suma de n sumandos, cada uno de los cuales se divide por 9. Si la suma $a_n+\ldots+a_1+a_0$ se divide por 9, se deduce de (4) que el número N también se divide por 9 por razón de que la afirmación a) queda demostrada. La afirmación b) también proviene del análisis de la igualdad (4): si su primer miembro (el número N) se divide por 9 y dado que el primer sumando de su segundo miembro (el número entre corchetes) se divide por 9, también el segundo sumando (la suma de cifras del número N) debe dividirse por 9.

Aquí es conveniente recordar que para la resolución de los problemas son útiles diferentes factores aritméticos, que se anotan mediante símbolos literales.

Si tenemos dos números enteros [1] a y b, donde $b>0$, existen entonces un número entero único q y un número entero único r, con que $0\leqslant r<b$ son tales que

$$a=bq+r. \quad (5)$$

La igualdad (5) no es más que *la división del número a por el número b con resto*. En particular, la igualdad (5) pone en claro que cualquier número par tiene una forma $2k$, donde k es un número entero, y cualquier número impar se puede representar en forma de $2n+1$, donde n es un número entero.

Si se tiene un número entero positivo N mayor que 1 y si $N=n_1^{\alpha_1}\ldots n_k^{\alpha_k}$ es una descomposición del mismo número en factores simples (aquí $n_1, \ldots, n_k$ son diferentes divisores simples del número N, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ es el número de sus repeticiones en la descomposición del número N), entonces cualquier divisor del número N tiene la forma $D=n_1^{\beta_1}\ldots n_k^{\beta_k}$, donde $0\leqslant\beta_1\leqslant\alpha_1, \ldots, 0\leqslant\beta_k\leqslant\alpha_k$.

Si se tienen los números enteros positivos $a_1, \ldots, a_n$, entonces su *común divisor* se llama número entero positivo por el cual cada uno de los números $a_1, \ldots, a_n$ se divide sin resto. El máximo común divisor de los números $a_1, \ldots, a_n$ se denomina máximo común divisor de éstos. Si el máximo común divisor es igual a 1, los números $a_1, \ldots, a_n$ se denominan *recíprocamente simples*.

Si el número entero positivo N se divide por cada uno de los dos

---

[1] Recordemos que los números 1, 2, 3, ..., se llaman números *enteros positivos* y los números ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., simplemente *enteros*. El conjunto de números enteros es conveniente anotarlo en forma de 0, ± 1, ± 2, ...

números a_1, a_2, recíprocamente simples, entonces N se divide también por el producto de estos números a_1a_2[1]. Si el producto NM de los números enteros positivos N y M se divide sin resto por el número entero positivo D y los números M y D son recíprocamente simples, entonces N se divide por D.

En fin, recordemos la propiedad siguiente: uno de los n números enteros sucesivos, como $k+1$, $k+2$, ..., $k+n$, se divide obligatoriamente por n, donde k representa un número entero arbitrario.

Examinemos unos ejemplos sobre la aplicación de las propiedades de los números enteros para la resolución de los problemas referentes a la divisibilidad.

1. *Demostrar que el número $N=n^3+20n$ se divide por 48 en cualquier caso en que n sea par.*

Sin duda, por medio de la verificación directa, de que esta afirmación es válida para $n=2, 4, 6, \ldots$, no conseguiremos resolver este problema porque no podemos sustituir a n por todos los números pares. Por consiguiente, es menester dar tal demostración que sea válida para cualquier número par n.

Cada número par n puede ser representado como $n=2k$, donde k es un número entero; por lo tanto, $N=8k(k^2+5)$. Si demostremos que $k(k^2+5)$ se divide por 6, para *cualquier* número entero k, estará claro que N se divide por 48.

Realicemos una conversión:

$$k(k^2+5)=k(k^2-1+6)=(k-1)k(k+1)+6k. \qquad (6)$$

Vemos que el segundo sumando en el segundo miembro (6) se divide por 6. Y el primer sumando del mismo miembro (6) es un producto de *tres* números enteros sucesivos, debido a que uno de ellos se divide obligatoriamente por 3. Además de esto, de dos números enteros sucesivos (sobre todo, de los tres) uno es obligatoriamente par. Ya que 2 y 3 son recíprocamente simples, $k(k^2+5)$ se divide realmente por 6 para cualquier número k entero.

2. *Demostrar que para cualquier valor del número entero positivo n, $N=n^2+1$ no se divide por 3.*

Un número entero positivo, al dividirse por 3, puede dar como resto los números 0, 1, 2 (véase (5)). Consecutivamente, a fin de resolver este problema es razonable dividir todos los números enteros positivos en tres clases: $3k$, donde k es un número entero positivo; $3k+1$, donde k es un número entero positivo o cero; $3k+2$, donde k es un número entero positivo o cero[2].

---

[1] Es fácil comprender que si a_1 y a_2 no son recíprocamente simples, el número N no está obligado a dividirse por el producto a_1a_2 (¡ponga un ejemplo!).

[2] Si en la representación $3k$ en calidad de k debemos tomar uno de los números 1, 2, ..., entonces en $3k+1$, $3k+2$ hay que tomar mas $k=0$, a este último valor de k le corresponden los números enteros positivos 1 y 2, respectivamente.

Para cualquier número entero positivo n, que se divide exactamente por 3, o sea representado en la forma $n=3k$, donde k es un número entero positivo, obtenemos: $n^2+1=9k^2+1$. En vista de que el primer sumando del segundo miembro se divide por 3 y el segundo no se divide, para estos valores de n el número N no se divide por 3.

Si $n=3k+1$ para cualquier número entero positivo k (o bien, $k=0$), entonces $n^2+1=9k^2+6k+2$. Es evidente que en este caso N, al dividirlo por 3, da un resto 2.

De igual modo se considera el caso en que $n=3k+2$.

3. *¿Con cuántos ceros termina el producto de todos los números enteros positivos desde* 1 *hasta* 1962, *inclusive?*

A muchos estudiantes este problema les parece muy difícil por su enunciado algo insólito. Entretanto, la idea de su solución es fácil. Si el número $N=1\cdot 2\ \ldots\ 1961\cdot 1962$ descomponemos en simples factores

$$N=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\ \ldots\ p^{\alpha_q}, \tag{7}$$

se evidencia que *cada par* de simples factores 2 y 5 engendrará un cero en el número N, ya que $10=2\cdot 5$. Para que sea clara la fórmula (7) es suficiente descomponer, por separado, en simples factores cada uno de los factores del producto N, y luego componer los factores simples iguales. Ahora es preciso aclarar, ya que nos interesan solamente los números α_1 y α_3 en la descomposición (7), cuántos dos y cinco aparecerán durante la descomposición de cada factor del producto N.

Por ejemplo, vamos a determinar el número α_3. Es evidente que cada factor del producto N, que se divide por 5, da como resultado "cinco" al descomponerlo en factores simples; resulta que en el producto N figuran $[1962/5]=392$ de esos factores [1]. No obstante, entre los factores del producto N resultarán algunos que se dividen por 25; de los cuales, al descomponerse en simples factores darán *complementariamente* un cinco más; la totalidad de estos factores es: $[1962/25]=78$. Luego, cada uno de todos aquellos factores del producto N que son múltiplos de 125 dará un cinco más; éstos son $[1962/125]=15$. Por fin, tenemos 3 factores que se dividen por 625; cada uno de los cuales, a su vez, dará un cinco más. De tal modo, en la descomposición del número N en simples factores resulta: $392+78+15+3=488$ "cinco", o sea, $\alpha_3=488$.

Otro cálculo, absolutamente análogo, indica que en la fórmula (7) el número $\alpha_1=1955$. De aquí se observa que existen solamente 488 pares de factores simples 2 y 5, por lo cual el número N termina con 488 ceros.

Muy a menudo, las ideas relacionadas con la divisibilidad de los

[1] El símbolo $[a]$ representa una parte entera del número a.

números se emplean para la resolución de los problemas de otras partes de Algebra.

4. *Hallar los números que son simultáneamente los términos de dos progresiones (o series) aritméticas*

$$3,\ 7,\ 11,\ \ldots,\ 407 \quad y \quad 2,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ 709. \qquad (8)$$

Es evidente que el término general de la primera progresión aritmética tiene la forma $a_n = 3 + 4(n-1)$; a los términos dados les corresponden los valores $n = 1, 2, \ldots, 102$. Así mismo, los términos de la segunda progresión resultan según la fórmula: $b_k = 2 + 7(k-1)$, $k = 1, 2, \ldots, 102$. De tal modo, el problema consiste en hallar todos los números n y k, $1 \leqslant n \leqslant 102$, $1 \leqslant k \leqslant 102$ para los cuales $a_n = b_k$, o sea, $4n + 4 = 7k$.

De la igualdad $4(n+1) = 7k$ se desprende que ésta puede cumplirse sólo en el caso en que k sea múltiplo de 4, es decir, si $k = 4s$; está claro que s puede tener valores de 1, 2, ..., 25 (ya que $1 \leqslant k \leqslant 102$). Pero si $k = 4s$, entonces $4(n+1) = 7 \cdot 4s$, o sea, $n = 7s - 1$; dado que $1 \leqslant n \leqslant 102$, los valores admisibles para s son únicamente 1, 2, ..., 14.

De esta forma, se tienen 14 números que representan a la vez los términos de ambas progresiones (8); es fácil hallar estos números, ya sea mediante la fórmula para a_n siendo $n = 7s - 1$, $s = 1, 2, \ldots, 14$, ya sea mediante la fórmula para b_k siendo $k = 4s$, $s = 1, 2, \ldots, 14$.

Como se sabe, los números *racionales* se denominan números de especie p/q, donde p es un número entero y q es un número entero positivo. Si el número p/q es positivo, $p > 0$, si el número p/q es negativo, $p < 0$. Es evidente que la fracción p/q siempre se puede considerar irreductible, es decir, considerar los números $|p|$ y q como recíprocamente simples. Al número 0 le corresponde la representación p/q para $p = 0$ (y para cualquier q).

La teoría rigurosa y completa de los números *irracionales* (la demostración de sus operaciones y propiedades) se estudia en el curso de Matemáticas superiores.

Uno de los errores más típicos consiste en que los estudiantes consideran a menudo la racionalidad e irracionalidad de algún número, simplemente a base de su "aspecto exterior", suponiendo que una combinación compleja de números irracionales será también un número irracional. No obstante, esto no siempre es correcto. Por ejemplo, el número $[(\sqrt{3}+\sqrt{2})/(\sqrt{3}-\sqrt{2})] - 2\sqrt{6}$ no es irracional: un cálculo simple demuestra que es igual a 5. Así mismo, el número $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, a pesar de que tiene un aspecto complejo e "irracional", en realidad es racional e igual a 2 (es muy fácil convencerse de esto al observar que las expresiones subradicales son cubos enteros).

Por lo tanto, para esclarecer el porqué uno u otro número es racional o irracional, es menester dar una demostración convincente.

Algunos problemas nos llevan precisamente a la solución de tal tipo de problemas.

5. *Demostrar que* $\log_4 18$ *es un número irracional.*

Debido a que $\log_4 18 = 1/2 + \log_2 3$ es suficiente demostrar que el número $\log_2 3$ es irracional. Supongamos lo contrario: este número es racional. Esto significa que $\log_2 3 = p/q$. Ya que $\log_2 3 > 0$, podemos considerar ambos números p y q como números enteros positivos. Valiéndonos de la definición del logaritmo escribiremos la igualdad $\log_2 3 = p/q$ en forma $2^p = 3^q$. Sin embargo, esta última igualdad es imposible para cualesquiera que sean los números enteros positivos p y q: a la izquierda de esta se encuentra un número *par* (pues $p > 0$) y a la derecha, uno *impar*. La contradicción obtenida concluye la demostración.

6. *Demostrar que los números* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *no pueden ser términos de una sola progresión aritmética.*

Esta afirmación parece a muchos estudiantes casi cierta. Unos dicen en seguida que los números irracionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no pueden "guardar una misma distancia uno del otro". Otros "fundamentan" esta idea con cálculos: $\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 1{,}732 - 1{,}414 = 0{,}318$, y $\sqrt{5} - \sqrt{3} \approx 2{,}236 - 1{,}732 = 0{,}514$.

Observaremos, ante todo, que *los cálculos aproximados, sin tomar en cuenta su precisión, en las Matemáticas no son razonables.* Pero, aunque se estima la precisión de los cálculos (no es difícil hacerlo), esta demostración resulta incorrecta ya que demuestra que estos números no pueden componer tres términos *sucesivos* de una progresión aritmética. Sin embargo, no está demostrado, que éstos no puedan ser de tres términos no contiguos de una sola progresión aritmética.

Realizaremos una demostración a partir de lo absurdo, que será correcto. En una progresión aritmética con el primer término a_1 y la diferencia d sean

$$\sqrt{2} = a_k = a_1 + (k-1)d, \quad \sqrt{3} = a_m = a_1 + (m-1)d,$$
$$\sqrt{5} = a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Restando la primera de la segunda y la segunda de la tercera de estas igualdades, dividiendo después una de las proporciones obtenidas por otra, llegaremos a la igualdad

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{m-k}{n-m}. \tag{9}$$

El primer miembro de esta igualdad es un número racional, ya que m, k y n son números enteros. Denotemos este número, por abreviarlo, a través de r, y escribiremos la igualdad (9) en forma de $\sqrt{3} - \sqrt{2} = r(\sqrt{5} - \sqrt{3})$, de donde tenemos $r^2\sqrt{15} - \sqrt{6} = (8r^2 - 5)/2$, al elevarlo previamente al cuadrado. El segundo miembro de esta última igualdad es también un número racional; lo anotaremos por s. Al elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad $r^2\sqrt{15}-\sqrt{6}=s$, obtendremos $\sqrt{10}=(15r^4-s^2+6)/(6r^2)$. Esta igualdad demuestra que $\sqrt{10}$ es un número racional, lo que no es correcto [1]. La contradicción obtenida demuestra que la igualdad (9) es imposible, es decir, los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ no pueden ser términos de una misma progresión aritmética.

7. *Determinar todos números enteros a y b para los cuales una de las raíces de la ecuación $3x^3+ax^2+bx+12=0$ es igual a $1+\sqrt{3}$.*

Según la definición, el número $1+\sqrt{3}$ es la raíz de la ecuación $3x^3+ax^2+bx+12=0$, si está verificada la ecuación

$$3(1+\sqrt{3})^3+a(1+\sqrt{3})^2+b(1+\sqrt{3})+12=0,$$

o sea, después de las simplificaciones y agrupación,

$$(4a+b+42)+(2a+b+18)\sqrt{3}=0.$$

Nos interesan solamente los números enteros a y b; en este caso los números $p=4a+b+42$ y $q=2a+b+18$ también serán enteros.

De tal modo, se debe determinar tales números enteros a y b para los cuales $p+q\sqrt{3}=0$. En este lugar, algunos estudiantes caen en un error lógico: consideran "absolutamente evidente" que la última igualdad es posible sólo en el caso en que $p=q=0$. No obstante, se ve que falta mucho para que los estudiantes puedan argumentar de una forma conveniente este hecho. Precisamente por ello vamos a demostrarlo.

En efecto, supongamos que la igualdad $p+q\sqrt{3}=0$ es válida cuando un número entero $q\neq 0$. Entonces, de aquí resultaría inmediatamente que $\sqrt{3}=-p/q$, lo que contradice a la irracionalidad del número $\sqrt{3}$. De esta manera, $q=0$. Pues, si $q=0$, entonces de la igualdad $p+q\sqrt{3}=0$ se desprende también que $p=0$.

Por consiguiente, el número $1+\sqrt{3}$ es la raíz de la ecuación $3x^3+ax^2+bx+12=0$ cuando, y sólo cuando

$$\begin{cases}4a+b+42=0,\\ 2a+b+18=0.\end{cases}$$

Este sistema tiene una solución única

$$a=-12,\ b=6.$$

[1] El hecho de que el número $\sqrt{10}$ es irracional se demuestra de forma análoga a cómo se demuestra la irracionalidad del número $\sqrt{2}$.

EJERCICIOS:

1. Enunciar y demostrar el criterio de divisibilidad por 11.

2. Demostrar que no hay ningún número entero positivo N con la suma de las cifras igual a 15, que sea cuadrado de un número entero.

3. Sea $p \geqslant 5$ un número simple. Demostrar que el número p^2-1 se divide por 24.

4. Es sabido que los números p, $p+2$ y $p+4$ son simples. Hállese p.

5. Demostrar que si un número entero positivo termina con la cifra 7, éste no debe ser cuadrado de un numero entero.

6. ¿Cuántos factores 2 se tiene en el producto de todos los números enteros de 1 a 500 inclusive?

7. Hallar los numeros que sean simultáneamente términos de dos progresiones aritméticas,
2, 5, 8, ..., 332 y 7, 12, 17, ..., 157

8. ¿Para cuáles números enteros positivos n la fracción $(3n+4)/5$ es un número entero?

9. ¿Para cuales números enteros positivos n la fracción $(2n+3)/(5n+7)$ es reductible?

10. Hallar un número de cuatro cifras que satisfaga a las siguientes condiciones: la suma de los cuadrados de los términos de los extremos es igual a 13; la suma de los cuadrados de los terminos medios es igual a 85; si del número buscado se sustrae 1089, resultará un número escrito con las mismas cifras que el buscado, pero a la inversa.

11. Hallar tal número de tres cifras $\overline{abc}$ que los números de cuatro cifras $\overline{abc1}$ y $\overline{2abc}$ satisfagan la igualdad $\overline{abc1}=3\cdot\overline{2abc}$.

12. Hallar todos los numeros de cinco cifras de la forma $\overline{34x5y}$ (x e y son cifras) que se dividen por 36.

13. Determinar para cuáles números enteros positivos n el número n^4+4 es compuesto.

14. Demostrar que si la suma $k+m+n$ de tres números enteros positivos se divide por 6, entonces $k^3+m^3+n^3$ también se divide por 6.

15. Demostrar que para cualquier número entero positivo n el número $\underbrace{\overline{1\ldots1}}_{2n\text{ veces}}-\underbrace{\overline{2\ldots2}}_{n\text{ veces}}$ es cuadrado de un número entero.

16. Hallar todas las soluciones con números enteros de la ecuación $2x^2-3xy-2y^2=7$.

17. Hallar todas las soluciones con números enteros de la ecuación $2x^2y^2+y^2-6x^2-12=0$.

18. Demostrar que entre cualesquiera dos números racionales no iguales a y b hay siquiera un número racional y un número irracional.

19. ¿Los números 10, 11, 12 pueden ser o no términos de una misma progresión geométrica?

20. Demostrar la irracionalidad del número tg 5°.

§ 3. MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

El método de inducción matemática o completa es un fuerte instrumento para las demostraciones matemáticas. Sin embargo, en la escuela secundaria este método no ha adquirido aún "pleno derecho de ciudadanía" y muchos graduados de la escuela conocen poco o nada del mismo. Mientras tanto, en el primer semestre del instituto los estudiantes se encuentran con demostraciones que se basan en el método de inducción matemática. Por este motivo es razonable aprender este método antes de ingresar en el instituto.

Además de esto, hablando en rigor, muchas demostraciones previstas en el curso escolar, son *deficientes*, puesto que no se aplicó el método de inducción matemática.

Recordemos, por ejemplo, *cómo se deduce la fórmula del término general de una progresión aritmética; anotemos las igualdades*:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= a_1 + d(1-1),\\
a_2 &= a_1 + d = a_1 + d(2-1),\\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d = a_1 + d(3-1),\\
a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d = a_1 + d(4-1),
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

etc; por consiguiente, para cualquier n es válida la fórmula $a_n = a_1 + d(n-1)$. La deficiencia de esta demostración salta a la vista: hemos establecido una fórmula para algunos valores de n y sacamos inmediatamente la conclusión de que es válida para *cualquier* número entero n. De este razonamiento podemos "demostrar", por ejemplo, la siguiente afirmación: *para cualquier n entero el número n^2+n+41 es simple*. Efectivamente, para $n=1, 2, 3, 4$ tenemos 43, 47, 53, 61 que son números simples. "Por consiguiente" la afirmación queda demostrada, aunque está claro que, por ejemplo, para $n=41$ el número n^2+n+41 se divide por 41.

Este ejemplo puede sugerir en uno que para la comprobación hay que tomar no sólo los primeros cuatro o cinco valores de n, sino más, o mejor dicho, mucho más. Sin embargo, supongamos, que hayamos comprobado la fórmula para el término general de la progresión aritmética con un millón de términos. ¿Y de ahí se deduce que esta fórmula es válida para todas n? Claro está que no: pues, al dar un millón de pasos, sin mirar al frente, no sabemos qué va a suceder durante el paso siguiente. ¿Dónde está la garantía de que la fórmula no se alterará en este paso millonésimo? [1].

Por lo tanto, la imperfección de todas las demostraciones de semejante índole consiste no en "pocos" casos particulares tomados en consideración sino en "desviar la mirada hacia el futuro", en estar en la incertidumbre de lo que sucederá en el paso siguiente. Esta "mirada hacia el futuro" la prevé el método de inducción matemática.

La esencia de este método consiste en lo siguiente.

Supongamos que la afirmación a demostrar *queda comprobada en un caso particular*, digamos $n=1$. Imaginémonos que podemos demostrar que de esta afirmación, que es válida para $n=k$, *se deduce siempre que es exacta también para el siguiente valor de n, es decir, cuando*

[1] A propósito, el número n^2+n+41 resulta simple para todos n, desde 1 hasta 39 incluso, y sólo el cuadragésimo paso nos indica que la afirmación enunciada anteriormente no es correcta.

¿Y dónde está la garantía de que en el caso de la fórmula para el término general de la progresión aritmética no procederá un caso análogo al paso millonésimo?

$n=k+1$. Entonces, podemos razonar así: hemos comprobado nuestra afirmación siendo $n=1$, pero, según lo demostrado, será válida también cuando $n=1+1=2$, y siendo válida para $n=2$ se cumple también para $n=2+1=3$, etc., es decir, *es válida para todos los valores de* n.

Sin embargo, ¿este último "etc." es también tan injusto como lo fue en los ejemplos anteriores? No es así, naturalmente; precisamente aquí estamos seguros de que cada vez podemos dar el paso siguiente por razón de que *es evidente* que la afirmación es justa para cualquiera que sea n, porque *se puede alcanzar a cualquier número entero por una cantidad finita de pasos empezando por* $n=1$ [1].

De esa manera, a fin de demostrar la validez de cierta afirmación, al ser cualquier número entero positivo n [2], es necesario demostrar *dos* cosas: primero, que es válida para $n=1$, y segundo, cada vez que se deduce que es válida para $n=k$, lo es también para $n=k+1$. En esto consiste *el método de inducción matemática*: demostramos que nuestra afirmación es válida cuando $n=1$ (*fundamento* de la inducción) luego supongamos que es válida para cierto $n=k$ (*hipótesis* de la inducción) y demostramos que en tal caso es válida para $n=k+1$ (*paso de la inducción*).

Apliquemos este método para la demostración de la fórmula del término general de la progresión aritmética. Esta afirmación tiene la forma

$$a_n=a_1+d(n-1).$$

Cuando $n=1$ esta afirmación es evidentemente válida, porque en el primer miembro se encuentra a_1 y en el segundo, $a_1+d(1-1)=a_1$. Supongamos que es válida para cualquier $n=k$, o sea, $a_k=a_1+d(k-1)$. Según la definición de la progresión aritmética $a_{k+1}=a_k+d$ y, valiéndose de la hipótesis de la inducción, obtenemos

$$a_{k+1}=a_1+d(k-1)+d=a_1+dk=a_1+d[(k+1)-1],$$

es decir, la afirmación demostrada es válida para $n=k+1$. Por consiguiente, la fórmula del término general es válida para cualquier n.

Vamos a subrayar que el método de inducción matemática es el método de demostración de las afirmaciones ya *asignadas* y no el de deducción de estas afirmaciones. Por ejemplo, de ninguna manera se puede obtener, según este método, la fórmula del término general, pero al hallarla por cualquier otro modo, por ejemplo, mediante una combinación es posible demostrarla aplicando el método de inducción matemática. Es así como hemos procedido anteriormente: las igualdades (1) nos llevaron a la suposición de cuál podría ser la fór-

---

[1] En la teoría rigurosa de los números enteros positivos esta última afirmación se toma por axioma.

[2] Habitualmente, se llaman naturales a los números enteros positivos 1, 2, 3, etc.; el número 0 no pertenece a los números naturales.

mula del término general después de que la hemos demostrado rigurosamente.

Con esto, claro está, el enunciado del método de combinación, método que permite obtener una u otra fórmula, una u otra afirmación, no es un elemento obligatorio para la demostración. Después de que se nos haya ocurrido una suposición, por algunas razones, podemos dejar de pensar en todo, sacar esta afirmación "del aire" y demostrarla recurriendo a la inducción.

Consideremos algunos ejemplos de demostración según la inducción.

1. *Demostrar que la suma de n términos de la progresión geométrica es igual a*

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}. \tag{2}$$

Para $n=1$ la igualdad es válida ya que

$$S_1 = a_1 = \frac{a_1(q-1)}{q-1}.$$

Supongamos que la igualdad (2) es válida para $n=k$, es decir,

$$S_k = \frac{a_1(q^k-1)}{q-1}. \text{ Entonces}$$

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_1(q^k-1)}{q-1} + a_1q^k = \frac{a_1(q^{k+1}-1)}{q-1},$$

es decir, la igualdad (2) es válida para $n=k+1$. Por eso, es válida para cualquier n.

2. *Demostrar que si n es un número entero positivo,* $4^n+15n-1$ *se divide por* 9.

Si $n=1$, el número $4^n+15n-1$ es igual a 18, es decir, se divide por 9. Supongamos que $4^k+15k-1$ se divide por 9 y sea $n = k+1$. Entonces

$$4^{k+1}+15(k+1)-1 = 4(4^k+15k-1)-45k+18 = \\ = 4(4^k+15k-1)-9(5k-2).$$

Pero, según la hipótesis de la inducción, $4^k+15k-1$ se divide por 9, a causa de que el segundo miembro, y junto con éste el primer miembro de la igualdad se dividen por 9, lo que era necesario demostrar [1].

[1] Esta afirmación puede ser demostrada también sin recurrir al método de la inducción. En efecto, aplicando la fórmula del binomio de Newton, para $n \geqslant 2$ tenemos:

$$4n+15n-1 = (3+1)^n+15n-1 = 3^n+n\cdot 3^{n-1}+\ldots+C_n^2\times \\ \times 3^2+n\cdot 3+1+15n-1 = 9(3^{n-2}+n\cdot 3^{n-3}+\ldots+C_n^2+2n),$$

de donde se deduce que el número dado se divide por 9.

3. *Demostrar que, si a y b son números positivos y $a<b$, para cualquier n natural es válida la desigualdad $a^n<b^n$.*

Para $n=1$, la afirmación es evidente. Supongamos que $a^k<b^k$; al multiplicar esta desigualdad por el número positivo a, obtenemos $a^{k+1}<ab^k$. Pero b es un número positivo debido a que $b^k a<b^k b$, es decir,

$$a^{k+1}<b^{k+1},$$

lo que fue necesario demostrar [1].

4. *Demostrar la fórmula de variaciones para el número*

$$A_m^n=m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Consideremos que m es un número entero fijo; hagamos la demostración por inducción con respecto a n. Para $n=1$ el primer miembro es igual a A_m^1, lo que es igual a m, o sea, la fórmula es válida. Supongamos que

$$A_m^k=m(m-1)\ldots(m-k+1).$$

Para dar un paso de la inducción establezcamos una relación

$$A_m^{k+1}=(m-k)A_m^k.$$

Para esto apuntemos todas las variaciones de m elementos según k y a cada una de éstas añadamos al final todos los elementos, uno a uno, los cuales no entraron en esta variación. De tal modo, de cada variación de m elementos, según k, obtenemos $m-k$ variaciones de m elementos según $k+1$. Por consiguiente, en total resultan $(m-k)A_m^k$ de tales variaciones. Sin embargo, es fácil ver que entre las variaciones obtenidas de esa manera se encuentran *todas* las variaciones de m elementos según $k+1$ encontrándose ésta una *sola* vez. Por lo tanto, $A_m^{k+1}=(m-k)A_m^k$.

Utilizando la relación recién demostrada y la hipótesis de la inducción, obtenemos que

$$A_m^{k+1}=A_m^k(m-k)=m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k)=$$
$$=m(m-1)\ldots(m-k+1)[m-(k+1)+1],$$

lo que concluye la demostración.

Ahora veremos que valiéndonos del método de inducción no siempre es infalible empezar por $n=1$. Se puede, naturalmente, demostrar la afirmación para una tal $n=n_0$, emprender un paso de la inducción y obtener, como resultado, que esta afirmación es válida para todos los números enteros n, mayores o iguales al número inicial n_0. En este caso, naturalmente, la hipótesis de la inducción tiene respectivamente una forma modificada: supongamos precisamente que la afirmación a demostrar es válida para $n=k\geqslant n_0$. Finalmente,

[1] En el ejemplo 10 del § 8 se da otra demostración de este caso.

hay que comprender que para los valores de $n<n_0$ la afirmación puede ser tanto correcta como incorrecta; en todo caso no es posible sacar cualesquier conclusiones sobre su validez para $1\leqslant n<n_0$, al aplicar la demostración realizada mediante el método de inducción matemática.

Ambas etapas de demostración expuestas arriba, la elección del fundamento de la inducción y la argumentación del paso de la inducción, son igualmente importantes y absolutamente independientes. Aclaremos *si es válida o no*, por ejemplo, *la desigualdad* $2^n>n^2$, *donde* n *es un número entero positivo.* Claro está que para $n=1$ es válida. Comprobaremos la posibilidad de hacer un paso de la inducción. Supongamos que para $n=k$ tiene lugar la desigualdad $2^k>k^2$. Entonces, evidentemente, $2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^2$, y para fundamentar la posibilidad de dar un paso de la inducción es suficiente establecer la desigualdad $2k^2\geqslant(k+1)^2$ o bien $k^2-2k-1\geqslant 0$. Ahora bien, esta última desigualdad es sólo correcta cuando $k\geqslant 1+\sqrt{2}$, es decir, cuando $k\geqslant 3$. De tal modo, no hace falta tomar como fundamento de la inducción $n_0=1$: no podemos dar el primer paso de la inducción. Luego, es natural tomar como fundamento $n_0=3$. En este caso se puede dar el paso de la inducción, pero se comprueba inmediatamente que para $n=3$ la desigualdad $2^n>n^2$ es incorrecta, y por eso es imposible empezar la inducción. Solamente para $n=5$ esta desigualdad es válida, por lo que se puede tomar como fundamento de la inducción $n_0=5$; para $n\geqslant n_0$ tiene lugar también el paso de la inducción. Por consiguiente, *la desigualdad* $2^n>n^2$ *es correcta para todos los números enteros* $n\geqslant 5$. Para unos valores de n, menores que 5, esta desigualdad es también correcta ($n=1$), para otros, incorrecta ($n=2$, 3, 4).

5. *Demostrar que para* $n>1$ *es válida la desigualdad*

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)$$

Para $n=2$ obtenemos una desigualdad correcta $2<9/4$. Supongamos que $k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$. Entonces, según la hipótesis de la inducción, $(k+1)!=k!\,(k+1)<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)$. Si ahora demostramos que

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)<\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}, \tag{3}$$

entonces el teorema será demostrado, porque

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)<\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1},$$

es decir, nuestra desigualdad se cumple para $n=k+1$.

Evidentemente, la desigualdad (3) se puede escribir en la forma

$$2 < \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}.$$

No obstante, según la fórmula del binomio de Newton

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = 1 + (k+1)\frac{1}{k+1} + \ldots > 2,$$

por consiguiente, esta desigualdad (3) es válida y la desigualdad inicial queda demostrada [1].

6. *Demostrar el teorema: si el producto $n \geqslant 2$ de unos números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual a n, es decir, si $x_1x_2 \ldots x_n = 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\ldots$, $x_n > 0$,* entonces $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

Si $n = 2$, hay que demostrar la afirmación: si $x_1x_2 = 1$, entonces $x_1 + x_2 \geqslant 2$. Pero, esto es evidente, ya que la media aritmética $\frac{x_1+x_2}{2}$ de dos números positivos es mayor o igual a la media geométrica $\sqrt{x_1x_2} = 1$, o sea, $x_1 + x_2 \geqslant 2$. Además, la igualdad $x_1 + x_2 = 2$ se logra sólo en el caso que $x_1 = x_2 = 1$.

Valiéndose de la hipótesis de la inducción, tomemos cualesquier números positivos $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$ que satisfagan la condición $x_1 \ldots x_{k-1}x_kx_{k+1} = 1$. Si cada uno de estos números es igual a 1, la suma $x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1} = k + 1$, debido a que la desigualdad demostrada en este caso es válida.

Si esto no resulta así, entonces entre éstos se encontrará un número menor que 1 y un número mayor que 1. Admitamos que $x_k > 1$, $x_{k+1} < 1$. En este caso tenemos la igualdad

$$x_1 \ldots x_{k-1}(x_kx_{k+1}) = 1.$$

Este es el producto de k números y por eso es aplicable la hipótesis de la inducción en cuya consecuencia podemos afirmar que

$$x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_kx_{k+1} \geqslant k.$$

Pero, entonces

$$x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geqslant k - x_kx_{k+1} + x_k + x_{k+1} =$$
$$= k + 1 + (x_k - 1)(1 - x_{k+1}) > k + 1,$$

porque $x_k - 1 > 0$ y $1 - x_{k+1} > 0$, que es lo que se necesitaba demostrar.

Observemos que hemos establecido también el hecho de que el signo de la igualdad en la relación a demostrar es posible en el caso de que todas las $x_i = 1$; si no todas las x_i son iguales a 1, en la

[1] Otra demostración de esta desigualdad, sin recurrir al método de inducción matemática, véase en el ejemplo 15 del § 8.

relación demostrada queda puesto el signo de la desigualdad rigurosa.

De este teorema resulta *una desigualdad generalizada entre la media aritmética y la media geométrica para $n\geqslant 2$ de los números positivos*:

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\ldots x_n},\quad x_1>0,\ \ldots,\ x_n>0.$$

Efectivamente, designemos $\sqrt[n]{x_1\ \ldots\ x_n}$ por c, y x_i/c por y. Entonces $y_1\ldots\ y_n=\frac{x_1\ \ldots\ x_n}{c^n}=1$. Según lo demostrado, $y_1+\ \ldots+$ $+y_n\geqslant n$, es decir, $\frac{x_1+\ldots+x_n}{c}\geqslant n$, o sea, $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant c$, que es lo que se necesitaba demostrar.

Esta desigualdad se utiliza ampliamente para la demostración de otras desigualdades. Por ejemplo, si la aplicamos a los números $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, obtenemos inmediatamente la desigualdad

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\ldots n}<\frac{1+2+\ldots+n}{n},$$

o bien, $\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}$, de donde $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. Hemos demostrado esta desigualdad en el ejemplo 5 mediante la inducción. Esta nueva demostración es más fácil.

El método de inducción matemática encuentra aplicación vasta no sólo en Algebra. Se utiliza ampliamente para la demostración de las relaciones trigonométricas y afirmaciones geométricas.

7. *Demostrar que para cualquier número entero positivo n tiene lugar una desigualdad* $|\operatorname{sen} nx|\leqslant n\,|\operatorname{sen} x|$.

Para $n=1$ la desigualdad es evidentemente válida. Suponiendo que $|\operatorname{sen} kx|\leqslant k\cdot|\operatorname{sen} x|$, demostramos que $|\operatorname{sen}(k+1)x|\leqslant(k+$ $+1)\cdot|\operatorname{sen} x|$. En realidad, utilizando la desigualdad $|\cos kx|\leqslant 1$, tenemos que

$|\operatorname{sen}(k+1)x|=|\operatorname{sen} kx\cdot\cos x+\operatorname{sen} x\cdot\cos kx|\leqslant|\operatorname{sen} kx|\cdot|\cos x|+$
$+|\operatorname{sen} x|\cdot|\cos\ \ kx|\leqslant|\operatorname{sen}\ \ kx|+|\operatorname{sen} x|\leqslant k\cdot|\operatorname{sen} x|+|\operatorname{sen} x|=$
$=(k+1)\cdot|\operatorname{sen}\ x|\cdot$

Por consiguiente, la desigualdad requerida es válida.

8. *Demostrar que para cualquier número entero positivo n es válida la igualdad*

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}=2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\sin\frac{n+1}{6}\pi. \tag{4}$$

Cuando $n=1$ obtenemos la igualdad correcta

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}.$$

Al aplicar la hipótesis de la inducción, consideremos la suma del primer miembro de la igualdad (4) siendo $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{k\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{3}=\\
&\qquad=2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}+\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{3}=\\
&\qquad=2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}+2\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}\cos\frac{(k+1)\pi}{6}=\\
&\qquad=2\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}\left[\operatorname{sen}\frac{k\pi}{6}+\cos\frac{(k+1)\pi}{6}\right]=\\
&\qquad=2\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{(k-1)\pi}{6}=\\
&\qquad=2\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}\cos\frac{(k-1)\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Para finalizar la demostración es suficiente notar que

$$\cos\frac{(k-1)\pi}{6}=\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{(k-1)\pi}{6}\right]=\operatorname{sen}\frac{(4-k)\pi}{6}=$$
$$=\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{(4-k)\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\frac{(k+2)\pi}{6}.$$

Por consiguiente, la fórmula (4) queda demostrada.

9. *En un plano hay trazadas n rectas de las cuales dos no son paralelas y tres no pasan por un mismo punto. Determinar entre cuántas partes queda dividido el plano con estas rectas.*

Al trazar los dibujos requeridos, podemos anotar la siguiente correlación entre el número n de rectas que reúnen las condiciones del problema y el número a_n de partes en las que estas rectas dividen el plano:

$$\begin{aligned} n&=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\\ a_n&=2,\ 4,\ 7,\ 11,\ 16,\ \ldots\end{aligned}$$

Es fácil ver [1] que en calidad del término general de la sucesión a_n conviene emplear la expresión

$$a_n=1+\frac{n(n+1)}{2}. \tag{5}$$

La fórmula (5) se comprueba fácilmente para los primeros valores de n, sin embargo, de ahí no se deduce que da respuesta al problema planteado. Esta afirmación requiere una demostración complementaria aplicando el método de inducción matemática.

Al prescindir de "la selección" recién efectuada, demostremos que n rectas (de las cuales dos no son paralelas y tres no pasan por un mismo punto) dividen el plano en a_n partes, donde a_n se calcula según la fórmula (5).

[1] Para esto hay que notar que, a juzgar por los primeros términos, la sucesión a_n es tal que las diferencias a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, ... forman una progresión aritmética; hay que aprovecharse del ejemplo 9 del § 7

Es evidente que cuando $n = 1$, la fórmula (5) es válida. Aplicando la hipótesis de la inducción, examinemos $k + 1$-ésima recta que satisface la condición del problema. Eliminando de éstas arbitrariamente k rectas, podemos decir que dividen el plano en $1 + k(k+1)/2$ partes. Ahora adicionamos $(k+1)$-ésima recta. Dado que no es paralela a ninguna de las rectas precedentes, intersecará, por consiguiente, todas las k rectas. Ya que no pasará por ninguno de los puntos de intersección de las rectas precedentes, pasará entonces por un fragmento $k + 1$, en los que ya fue dividido el plano, y dividirá en dos partes cada uno de estos fragmentos, es decir, resultrarán añadidos $k + 1$ fragmentos. Por consiguiente, el número total de fragmentos en los cuales se divide el plano por $k + 1$ rectas es:

$$1 + \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = 1 + \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = a_{k+1}.$$

Con esto queda terminada la demostración.

Como se deduce de todo lo expuesto, el método de inducción matemática se aplica a la demostración de las afirmaciones dependientes de un número entero positivo n. Sin embargo, muchas afirmaciones, en cuyo enunciado n no participa en absoluto, pueden sustituirse por afirmaciones equivalentes que con evidencia dependen de n. Demostremos, por ejemplo, que:

10. *En cualquier instante del tiempo la cantidad de hombres en la Tierra que se han dado un número impar de apretones de manos, es par.*

Para hacer la demostración enumeraremos cada apretón de manos en un orden cronológico. Es claro que nuestra afirmación es equivalente a lo siguiente: cualquiera que sea el número n, después de un apretón de manos con el número n, la cantidad de hombres que se han dado un número impar de apretones de manos es par.

Esta afirmación depende de n y la demostraremos por el método de inducción. Por abreviar el asunto llamaremos "malos" a los hombres que se han dado el número impar de apretones de manos, y a los demás, "buenos".

Después de haberse dado el apretón de manos resultaron dos hombres "malos", o sea, un número par. Inmediatamente que se de el apretón de manos con el número k, el número de hombres "malos" será par, y después de eso, el apretón de manos será el número $k + 1$. Con esto pueden presentarse tres casos: se dan un apretón de manos a) los dos "buenos", b) los dos "malos", c) un "bueno" y un "malo".

En el primer caso los dos "buenos" suman a su número par de apretones de manos un apretón más, o sea, se hacen "malos"; en el segundo, los dos "malos" llegan a ser "buenos", y en el tercero, el "bueno" se hace "malo" y el "malo" resulta ser "bueno". De esa manera, la cantidad de hombres "malos" aumenta en dos ó disminuye en dos, ó no cambia, es decir, en cualquier caso es par. La aseveración queda demostrada.

Los ejemplos examinados demuestran con qué éxito se emplea el método de inducción matemática en los problemas más diversos. Al mismo tiempo, no se puede exagerar el alcance del método de inducción matemática: hay muchos problemas para cuya resolución parece que se impone el método de inducción, no obstante, la prueba de aplicar este método choca con dificultades insuperables.

Probemos, por ejemplo, valiéndonos de la inducción, demostrar la desigualdad:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Para $n=1$ esta desigualdad tiene la forma $\frac{1}{9}<\frac{1}{4}$, es decir, es válida. Supongamos que la desigualdad a demostrar es válida para $n=k$:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Para $n=k+1$ el primer miembro es igual a

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+3)^2}=\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}\right]+\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

Según la hipótesis de la inducción, la suma entre los corchetes es menor que $\frac{1}{4}$, por eso

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+3)^2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

Es claro, que de la desigualdad obtenida de ninguna manera se puede deducir que su primer miembro es menor que 1/4. De tal modo, según la inducción, la demostración queda sin solución. Sin embargo, esta desigualdad se demuestra fácilmente por otro método, como fue demostrado en el ejemplo 13 del § 8.

EJERCICIOS:

Demostrar las formulas por el método de inducción matemática:

1. a) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

3. El número de permutaciones P_n de n elementos, donde $n>1$,

$$P_n=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

4. La fórmula de Moivre
$$[r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\operatorname{sen} n\varphi).$$

5. a) $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\ldots+\operatorname{sen} nx=\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{n+1}{2}x\cdot\operatorname{sen}\dfrac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}$, $x\neq 2k\pi$.

b) $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(x+h)+\ldots+\operatorname{sen}(x+nh)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{nh}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\dfrac{n+1}{2}h}{\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}}$,

$h\neq 2k\pi$.

6. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}$.

Demostrar las desigualdades:

7. $n!>2^{n-1}$, si $n>2$.

8. $2^n\cdot n!<n^n$, si $n>2$.

9. $(n!)^2<\left[\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n$.

10. $(2n)!<\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^{2n}$.

11. $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_1}\geqslant n$, si $a_1>0,\ \ldots,\ a_n>0$.

12. $\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}>a^ab^bc^c$, si a, b, c, son

los números enteros positivos distintos.

13. Demostrar que para cualquier número entero n, el número n^7-n se divide por 7.

14. Demostrar que para cualquier número entero n, el número $11^{n+2}+12^{2n+1}$ se divide por 133.

15. Demostrar la igualdad

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\ldots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{\log_x^2 2}.$$

16. Demostrar que para cualesquier números positivos a y b y cualquier número natural n es válida la desigualdad $(a+b)^n<2^n\,(a^n+b^n)$.

17. Demostrar que para cualquier número $a>0$ es válida la desigualdad

$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}<\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ (en el primer miembro la cantidad de radicales es arbitraria).

18. Demostrar que para todos los números enteros positivos n y k es válida la igualdad

$$C_{n+1}^0-C_{n+1}^1+C_{n+1}^2-\ldots+(-1)^k C_{n+1}^k=(-1)^k C_n^k.$$

(Según la definición se considera que $C_m^0=1$ para cualquier número m y $C_p^q=0$, si $q>p$).

§ 4. NÚMEROS REALES

En este párrafo nos detendremos solamente en dos problemas: el valor absoluto del número real y la raíz aritmética.

En la mayoría de los casos los estudiantes contestan correctamente a la pregunta: ¿a qué magnitud es igual el valor absoluto de un número real concreto? No obstante, cuando se trata de la *definición* del valor absoluto, entonces surgen a menudo contestas absurdas: el valor absoluto de un número es "el número sin signo", o bien, es "el número con signo positivo", esto es, "el valor positivo del número". Mientras tanto, a los estudiantes se les exige una definición exacta. El valor absoluto de un número a (se designa por $|a|$) se define del modo siguiente:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0, \\ 0, & \text{si } a = 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Al valor absoluto de un número se le llama con frecuencia su *módulo.*

Esta definición permite calcular el valor absoluto de cualquier número real. Para esto hay que valerse del primer, segundo o tercer renglón de la definición en dependencia de que el número concreto dado sea positivo, negativo o igual a cero.

Por ejemplo, a la pregunta: *¿ a qué iguala el valor absoluto del número* -3?, la respuesta completa debe ser así: $-3<0$; por lo tanto, según el tercer renglón de la definición, el valor absoluto del número -3 es igual $a-(-3)=3$, es decir, $|-3|=3$.

Notando que para $a=0$ es válida la igualdad $|a|=a$, podemos escribir más brevemente la definición de valor absoluto [1]:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

De la definición del módulo se sigue inmediatamente que $|a| \geqslant 0$ para cualquier número a. Esto es un *teorema*, aunque muy sencillo. Para la demostración consideremos dos casos:

a) $a \geqslant 0$. Entonces $|a| = a \geqslant 0$, lo que era necesario demostrar.

b) $a<0$. Entonces $|a| = -a$. Pero, $-a>0$, ya que $a<0$, o sea $|a|>0$, lo que era necesario demostrar.

Conviene comprender bien que la expresión $|a|$ es siempre positiva o igual a cero, pero no es una definición del valor absoluto sino su corolario; en la definición nada se dice del signo de la expresión $|a|$.

El fácil observar que $|a|$ significa distancia en sentido geométrico, es decir, la longitud del segmento en el eje numérico (número positivo o cero) desde el punto a hasta cero. Además, se puede demos-

[1] Véase también el ejercicio 1.

trar, considerando ciertos casos, que $|b-a|$ es la distancia entre los puntos a y b (véase el ejercicio 5).

Estas notaciones geométricas son muy útiles para la resolución de los problemas, y en los casos muy sencillos permiten en seguida dar la solución prescindiendo del método ordinario que consideremos a continuación.

Por ejemplo, la ecuación $|x-1|=2$ se resuelve geométricamente de la manera siguiente: su resolución son los puntos que se encuentran a la distancia 2 desde el punto 1, es decir, $x_1=3$, $x_2=-1$. Es análoga la resolución de la desigualdad $|x+2|\leqslant 5$. Aquí son los puntos que distan del punto -2 a una distancia no mayor que 5, o sea, son los puntos del intervalo [1] $-7\leqslant x\leqslant 3$.

Para la resolución de problemas son muy útiles las siguientes propiedades del valor absoluto:

Para cualesquier números reales a y b

I. $|a+b|\leqslant |a|+|b|$,

II. $|a-b|\geqslant ||a|-|b||$,

III. $|ab|=|a||b|$,

IV. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

Se demuestran más fácilmente las propiedades III y IV. Esto se hace, por ejemplo, por selección ordinaria de todas las combinaciones posibles de los símbolos a y b y se ofrece al lector. Notemos además un corolario importante de la propiedad III: $|a|^2=a^2$ para cualquier número a (en efecto, al tomar $a=b$ obtendremos $|a|^2=$ $=|a^2|$, lo que es igual a a^2, ya que $a^2\geqslant 0$).

Para la demostración de la propiedad I notemos que

$$|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

y

$$(|a|+|b|)^2=|a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2=a^2+2|ab|+b^2,$$

pero $ab\leqslant|ab|$, por lo que

$$|a+b|^2\leqslant(|a|+|b|)^2.$$

Pues, de dos números no negativos $|a+b|$ y $|a|+|b|$ el menor es aquel cuyo cuadrado es menor; lo que demuestra la propiedad I. La otra demostración se basa en la selección de los casos posibles.

Análogamente puede ser demostrada la propiedad II o deducida de la propiedad I. Precisamente, por la propiedad I

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

[1] Aquí y más abajo no usamos términos corrientes como "intervalo abierto" (para el conjunto de números x tales como $a<x<b$), "intervalo cerrado" (para $a\leqslant x\leqslant b$) e "intervalo semiabierto" (para $a\leqslant x<b$ y $a<x\leqslant b$) designando cada uno de tales conjuntos por "intervalo" (a veces, "segmento"). El sentido correspondiente lo tiene el término "intervalo infinito".

de donde $|a|-|b|\leqslant|a-b|$. Así mismo se demuestra que $|b|-|a|\leqslant|a-b|$. Pero, una de las dos expresiones, ya sea $|a|-|b|$, o $|b|-|a|$ no es negativa, y, por consiguiente, coincide con su valor absoluto, así que $||a|-|b||\leqslant|a-b|$, lo que era necesario demostrar.

Como regla general, los problemas relacionados con el valor absoluto se resuelven aplicando el procedimiento ordinario que consiste en "la eliminación del módulo": según la definición, se consideran todos los casos de distribución de los signos entre las expresiones puestas bajo el signo del módulo; en cada uno de estos casos cada módulo "se abre", es decir, se sustituye por la misma expresión o por la expresión que le es contraria por el signo; después de esto resulta un problema en el que falta el signo del módulo [1]. Casi todos los estudiantes conocen este procedimiento. No obstante, durante su aplicación práctica cometen dos errores gravísimos.

El primer error está relacionado con la comprensión incorrecta (o bien, puede ser con la aplicación incorrecta) de la definición del módulo: en los casos en que bajo el signo del módulo queda puesto no x sino alguna otra expresión $f(x)$, como regla se encuentran precisamente tales casos, en lugar de una igualdad correcta

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{si } f(x)\geqslant 0, \\ -f(x), & \text{si } f(x)<0, \end{cases} \tag{2}$$

$f(x) \neq x$

escriben a veces "la igualdad"

$$\boxed{|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{si } x\geqslant 0, \\ -f(x), & \text{si } x<0, \end{cases}}$$

lo que es, obviamente, incorrecto.

El segundo error proviene de la comprensión insuficiente de la esencia lógica del mismo método. Efectivamente, el análisis de algunos casos, digamos, en cuanto a la resolución de una ecuación o una desigualdad, significa que en cada una de éstas buscamos una solución solamente dentro de un campo reducido, a saber: dentro del campo determinado por las condiciones del caso concreto. Después de hallar soluciones en el caso concreto, debemos cada vez tomar sólo áquellas que entran en el campo requerido, o sea, que satisfacen las condiciones de este caso concreto. Al mismo tiempo, es de observar a menudo, cómo los estudiantes eligen acertadamente algunos casos, resuelven ecuaciones en cada caso concreto, mientras que las condiciones de estos casos quedan en suspenso y tienen el aspecto de

[1] Sin embargo, es conveniente comprender, que este procedimiento, por sí mismo, no es la resolución del problema; después de su aplicación pueden tener lugar serias dificultades en cada uno de los casos considerados. La finalidad de este procedimiento consiste en anular las dificultades relacionadas con el módulo, o sea, plantear el problema en que no existe el signo del módulo.

respuesta formal: si es necesario considerar el caso, yo lo hago — piensa uno — pero, para qué , esto no me importa.

Por lo demás, a veces ambos errores arriba mencionados se deben a la falta de atención, a la despreocupación, aunque por estas causas éstos no dejan de ser errores. En lo referente a los problemas donde se requiere analizar numerosos casos, el cuidado de los que resuelven problemas, su reconcentración y atención tienen una importancia trascedental.

Pasamos a considerar los ejemplos.

1. *Resolver la ecuación* $x^2-2|x|-3=0$.

Consideremos dos casos para liberarse del módulo:

a) $x\geqslant 0$ y b) $x<0$.

En el caso a) obtenemos la ecuación $x^2-2x-3=0$ cuyas raíces son $x_1=3$, $x_2=-1$. Pués, según la condición a), sólo son necesarias las $x\geqslant 0$, por la razón de que en la ecuación inicial la raíz será $x=3$.

En el caso b) la ecuación tomará un aspecto $x^2+2x-3=0$; las raíces de esta ecuación serán: $x_1=1$, $x_2=-3$. Pero, en el caso dado, de acuerdo con la condición b), nos interesan solamente las raíces negativas, es decir, $x=-3$.

De tal modo, la ecuación inicial tiene las raíces $x_{1,2}=\pm 3$[1].

2. *Resolver la ecuación* $|x^2-x-6|=x+2$.

Consideremos sucesivamente dos casos:

a) $x^2-x-6<0$. En este caso tenemos una ecuación $-x^2+x+6=x+2$ cuyas raíces $x_1=2$, $x_2=-2$. Ahora es necesario verificar si x_1 y x_2 satisfacen la condición a). Para esto es suficiente poner estos valores en el primer miembo de la desigualdad $x^2-x-6<0$. Después de esta sustitución obtenemos las desigualdades numéricas $-4<0$ y $0<0$. La primera de ellas es válida, mientras que la segunda, no; por eso solamente 2 es la raíz de la ecuación inicial.

b) $x^2-x-6\geqslant 0$. En este caso tenemos la ecuación $x^2-x-6=x+2$ cuyas raíces son: $x_1=4$, $x_2=-2$. Ya que ambos valores de x satisfacen la condición b), 4 y -2 son raíces de la ecuación inicial.

De tal manera, la ecuación inicial tiene tres raíces: -2, 2 y 4.

En el análisis atento de esta solución a veces surge la siguiente pregunta: ¿ primeramente hemos dejado de lado el valor de $x=-2$ y luego lo hemos hallado de nuevo, de tal modo que al fin y al cabo este valor resultó ser la raíz de la ecuación inicial? ¿ Y cómo hay que comprender esto? El asunto radica en lo siguiente: en el primer caso, al omitir el valor de $x=-2$, no hemos afirmado en absoluto que éste no es una raíz de la ecuación inicial. Hemos afirmado solamente que este valor no conviene a las limitaciones impuestas para x en la condición del caso a). Naturalmente, nada impide al mismo

[1] Notemos que por la sustitución $y=|x|$ la ecuación dada puede ser reducida a la ecuación cuadrática.

valor satisfacer la condición de uno u otro caso y ser la raíz de la ecuación inicial.

En el problema siguiente, muchos estudiantes cometen el primero de los errores graves, mencionados arriba.

3. *Resolver la desigualdad*

$$|x^2+3x|+x^2-2\geqslant 0.$$

Según la definición del módulo tengamos que considerar dos casos:

$$\text{a) } x^2+3x\geqslant 0, \quad \text{b) } x^2+3x<0.$$

Mientras tanto, muchos estudiantes consideran los casos $x\geqslant 0$ y $x<0$. En el primero de éstos, como resulta, el signo del módulo se puede quitar; para $x\geqslant 0$ es también válida la desigualdad $x^2+3x\geqslant 0$; pero, para $x<0$, nada se puede decir del signo de x^2+3x lo que no impide a los autores de tal solución anotar, para $x<0$, la igualdad $|x^2+3x|=-x^2-3x$ o hasta $|x^2+3x|=x^2-3x$.

Resolviendo acertadamente el caso a) obtenemos la desigualdad $2x^2+3x-2\geqslant 0$ cuyas soluciones son $x\leqslant -2$ y $x\geqslant 1/2$. La condi-

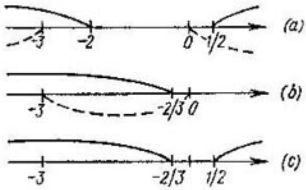


Fig. 1

ción de a) se satisface cuando $x\leqslant -3$ y $x\geqslant 0$. De estas soluciones hay que elegir aquellas que satisfagan la condición a), o sea, tomar sólo $x\leqslant -3$ y $x\geqslant 1/2$. Es más fácil representar en el dibujo (fig. **1**, *a*). Como resultado, obtendremos la solución (en el caso a)):

$$x\leqslant -3 \text{ y } x\geqslant 1/2.$$

En el caso b) tenemos la desigualdad $-3x-2\geqslant 0$ o bien $x\leqslant -2/3$. La condición b) se satisface para $-3<x<0$, porque de todos los valores de $x\leqslant -2/3$ quedan sólo los valores de x del intervalo de $-3<x\leqslant -2/3$ (fig. 1, *b*).

Uniendo las soluciones halladas en los casos a) y b) (fig. 1, *c*) obtenemos: $x\leqslant -2/3$ y $x\geqslant 1/2$.

4. *Resolver la desigualdad* $2|3+5x-2x^2|<1-x$. Consideremos dos casos:

a) $3+5x-2x^2\geqslant 0$. En este caso la desigualdad se escribirá así: $2(3+5x-2x^2)<1-x$, o bien, después de una simplificación, $4x^2-11x-5>0$. La última desigualdad es válida para

$x > (11+\sqrt{201})/8$ y para $x < (11-\sqrt{201})/8$. Sin embargo, van a satisfacer la desigualdad inicial solamente aquellos valores de x que satisfacen también la condición del caso considerado, o sea, la desigualdad $3+5x-2x^2 \geqslant 0$. Resolviendo esta desigualdad, obtendremos que ésta se satisface cuando $-1/2 \leqslant x \leqslant 3$.

Ahora tenemos que escoger de los intervalos hallados $x > (11+$ $+\sqrt{201})/8$ y $x < (11-\sqrt{201})/8$ aquellos valores de x que entran

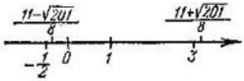


Fig 2

simultáneamente en el intervalo $-1/2 \leqslant x \leqslant 3$. Es más fácil hacerlo valiéndose de un eje numérico. Marquemos en el eje numérico los puntos $(11-\sqrt{201})/8$, $(11+\sqrt{201})/8$, $-1/2$ y 3 (fig. 2). La figura muestra claramente que ninguno de los valores de x que satisface la desigualdad $x > (11+\sqrt{201})/8$ entra en el intervalo $-1/2 \leqslant$ $\leqslant x \leqslant 3$, es decir, entre estos valores de x no existe ninguna solución para la desigualdad inicial. Entre $x < (11-\sqrt{201})/8$ se hallarán valores que entran en este intervalo: éstos serán todos los x del intervalo

$$-1/2 \leqslant x < \frac{11-\sqrt{201}}{8}.$$

Estos valores de x son la solución de la desigualdad inicial en el caso considerado.

b) $3+5x-2x^2 < 0$. En el presente caso tenemos una desigualdad $2(2x^2-5x-3) < 1-x$, o bien, $4x^2-9x-7 < 0$. Resolviendo esta desigualdad obtendremos que

$$\frac{9-\sqrt{193}}{8} < x < \frac{9+\sqrt{193}}{8}.$$

Sin embargo, de estos valores de x hay que escoger sólo aquellos valores que satisfagan simultáneamente la desigualdad $3+5x-2x^2 <$ < 0, la solución de la cual son dos expresiones: $x < -1/2$ y $x > 3$. En la figura 3 se ve que la solución de la desigualdad inicial en el caso considerado será el intervalo

$$\frac{9-\sqrt{193}}{8} < x < -\frac{1}{2}.$$

De tal modo, la solución de la desigualdad inicial consta de dos intervalos:

$$\frac{9-\sqrt{193}}{8} < x < -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{11-\sqrt{201}}{8}.$$

Es fácil ver que estos intervalos se unen en uno solo, así que la solución definitiva de esta desigualdad es el intervalo

$$\frac{9-\sqrt{193}}{8}<x<\frac{11-\sqrt{201}}{8}.$$

Hagamos unas observaciones sobre cómo realizar dibujos semejantes a los de las figuras 2 y 3. Lo más esencial radica, al disponer en el eje los puntos correspondientes a los números dados, en la necesidad

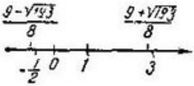


Fig. 3

de observar cuidadosamente que no se altere la sucesión de estos números. Por lo tanto, en particular, si los números considerados se diferencian poco uno de otro, no hace falta aglomerarlos, sino disponerlos de modo que el dibujo resulte lo más claro posible, aunque pierda un poco la correlación con la escala. Para disponer los números en la sucesión requerida, tendremos que recurrir frecuentemente a los cálculos aproximados y, a veces, hasta demostrar especialmente desigualdades numéricas.

Por ejemplo, en la figura 2 el número $(11-\sqrt{201})/8$ se coloca más a la derecha que $-1/2$. Esto se deduce de la desigualdad $-1/2<(11-\sqrt{201})/8$ que se demuestra fácilmente. Así mismo, el número $(11+\sqrt{201})/8$ se encuentra a la derecha del número 3, porque $3<(11+\sqrt{201})/8$ (pues, $\sqrt{201}>14$ y, por consiguiente, el numerador de la fracción del segundo miembro de la desigualdad es mayor que 25).

Consideremos unos ejemplos en los que bajo el signo del módulo figuran unas cuantas expresiones. En tales ejemplos, para liberarse de los módulos se debe examinar, en principio, todas las combinaciones de signos posibles de estas expresiones. En el primero de ellos procederemos así y en los dos siguientes, mostraremos cómo se puede proceder de otro modo.

5. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} |x^2-2x|+y=1, \\ x^2+|y|=1. \end{cases}$$

Aquí son posibles las siguientes cuatro combinaciones de signos de las expresiones que están bajo el signo del módulo:

a) $x^2-2x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$; b) $x^2-2x\geqslant 0,\ y<0$;

c) $x^2-2x<0,\ y\geqslant 0$; d) $x^2-2x<0,\ y<0$.

Vamos a considerarlas consecuentemente.

a) En este caso tenemos un sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y = 1, \\ \quad x^2 + y = 1, \end{cases}$$

de lo que resulta con facilidad que $x=0$, $y=1$. Este par satisface la condición a) y, por consiguiente, es la solución del sistema inicial.

b) En este caso el sistema tiene una forma:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y = 1, \\ \quad x^2 - y = 1, \end{cases}$$

de la que, sumando las ecuaciones, obtenemos que $x^2 - x = 1$, o sea, $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. La segunda ecuación permite calcular los valores correspondientes de y, procediendo, sin embargo, más fácilmente; en efecto, x_1 y x_2 satisfacen la igualdad $x^2 - x = 1$ y, comparándola con la segunda ecuación, obtenemos: $y = x$, es decir, $y_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

Comprobamos la condición b). Ya que $y_1 < 0$, el par x_1, y_1 no la satisface, y por eso lo omitimos. Luego, ya que y_2 satisface la condición b) y para x_2 es válida la desigualdad $x^2 - 2x \geqslant 0$ (porque $x_2 < 0$), entonces en este caso tenemos la solución: $x = (1 - \sqrt{5})/2$, $y = (1 - \sqrt{5})/2$.

c) En este caso obtenemos un sistema:

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + y = 1, \\ \quad x^2 + y = 1, \end{cases}$$

en donde, restando la primera ecuación de la segunda, obtendremos que $x^2 - x = 0$, o sea, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$. El par x_1, y_1 no satisface la condición c) y x_2, y_2 la satisface, por consiguiente, el par $x = 1$, $y = 0$ será la solución del caso que examinamos.

d) En este caso tenemos un sistema:

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + y = 1, \\ \quad x^2 - y = 1, \end{cases}$$

de donde, al sumar las ecuaciones, obtenemos que $x = 1$ y, por consiguiente, $y=0$. Con todo, este par no satisface la condición d), y por esa razón ha de ser omitido, aunque en realidad es la solución del sistema inicial. Aquí la situación es la misma que en el ejemplo 2, donde se han dado las explicaciones necesarias.

De tal modo, el sistema tiene tres soluciones:

$$x_1 = 0,\ y_1 = 1;\ x_2 = (1 - \sqrt{5})/2,\ y_2 = (1 - \sqrt{5})/2;$$
$$x_3 = 1,\ y_3 = 0.$$

6. *Resolver la desigualdad*

$$|x-1|-|x|+|2x+3|>2x+4.$$

En este problema, al examinar completamente todas las combinaciones de signos, tendríamos que considerar 8 casos posibles. No obstante, en realidad se puede evitar tanta cantidad de casos y limitarse sólo a cuatro. Esto se consigue mediante un procedimiento especial: "el método de intervalos".

Marquemos en el eje numérico aquellos valores de x para los cuales cada expresión que está bajo el signo del valor absoluto, se convierte en cero: estos puntos son $-3/2$, 0 y 1. De tal modo, todo el eje se divide en cuatro intervalos [1]:

$$x<-3/2,\ -3/2\leqslant x<0,\ 0\leqslant x<1,\ 1\leqslant x.$$

Examinemos por turno cada una de estas expresiones.

a) $x<-3/2$. En este caso $2x+3<0$, $x<0$ y $x-1<0$, es decir, la desigualdad inicial toma un aspecto $-x+1+x-2x-3>2x+4$. Esta se satisface para $x<-3/2$; en combinación con la condición a) obtenemos que $x<-3/2$ es la solución de la desigualdad inicial.

b) $-3/2\leqslant x<0$. En este caso $2x+3\geqslant 0$, $x<0$ y $x-1<0$ con que la desigualdad inicial toma el aspecto $-x+1+x+2x+3>2x+4$, es decir, $0>0$.

Algunos estudiantes perciben con perplejidad esta desigualdad: ¿y cómo solucionarla? En realidad no hace falta resolver nada, porque para cualquier valor de x del intervalo $-3/2\leqslant x<0$ la desigualdad inicial se transforma en una desigualdad incorrecta $0>0$ y por eso en el caso b) no tiene soluciones.

c) $0\leqslant x<1$ En este caso $2x+3\geqslant 0$, $x\geqslant 0$ y $x-1<0$; por consiguiente, la desigualdad inicial se reduce a la desigualdad $-x+1-x+2x+3>2x+4$. Esta se satisface cuando $x<0$, sin embargo, esta relación es incompatible con la condición c): entre los valores de x del intervalo $0\leqslant x<1$ no hay soluciones para la desigualdad inicial.

d) $1\leqslant x$. En este caso la desigualdad toma el aspecto $x-1-x+2x+3>2x+4$ es decir, $2>4$; en otras palabras, entre $x\geqslant 1$ no hay valores que satisfagan la desigualdad inicial.

Pues, la desigualdad presentada es válida para $x<-3/2$.

Según lo expuesto arriba es evidente que la función

$$y=|x-1|-|x|+|2x+3|$$

[1] Notemos que estos intervalos pueden expresarse de otra manera: por ejemplo, $x\leqslant -3/2$, $-3/2<x<0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $1<x$; en la solución nada variará, como lo verá el lector; nuestra elección fue hecha de acuerdo con la definición del valor absoluto, dada en la forma (1).

se puede escribir en la forma que ya no utiliza el símbolo del valor absoluto:

$$y=\begin{cases} -2x-2, & \text{si } x<-3/2, \\ 2x+4, & \text{si } -3/2\leqslant x<0, \\ 4, & \text{si } 0\leqslant x<1, \\ 2x+2, & \text{si } 1\leqslant x. \end{cases}$$

Es muy útil saber expresar las funciones, que contienen el signo del módulo, de esta forma.

El problema siguiente, además de dos módulos, presenta también otras dificultades para su resolución, aunque éstas no son difíciles, pero sí tienen un carácter excepcional. Entre tanto, nos hemos encontrado ya con tales dificultades en el ejemplo 6 (caso b)).

7. *Resolver la ecuación*

$$|x^2-9|+|x^2-4|=5.$$

Siguiendo el método del problema 6, consideremos tres casos [1]:

$$\text{a) } x^2<4; \quad \text{b) } 4\leqslant x^2\leqslant 9; \quad \text{c) } 9<x^2.$$

En el primer caso $|x^2-9|=9-x^2$, $|x^2-4|=4-x^2$, o sea,

$$9-x^2+4-x^2=5,\ x^2=4,\ x_{1,2}=\pm 2.$$

Pero, según la condición del primer caso, x^2 ha de ser menor que 4; por consiguiente, los valores de $x_{1,2}=\pm 2$ no son convenientes y en este caso la ecuación dada no tiene raíces.

En el segundo caso $|x^2-9|=9-x^2$, $|x^2-4|=x^2-4$, o sea, $9-x^2+x^2-4=5$, o bien, $5=5$. Precisamente, esta situación deja perplejos a muchos: "¡la ecuación se dio por perdida!" En realidad no ocurrió nada de extraordinario: a condición de que $4\leqslant x^2\leqslant 9$, la ecuación inicial es simplemente equivalente a la identidad $5=5$, es decir, se satisface con cualquier valor de x. De tal modo, cualquier valor de x que satisfaga la condición $4\leqslant x^2\leqslant 9$, es la solución de la ecuación. Ahora no nos queda otra cosa que resolver esta doble desigualdad. Y como resultado obtenemos: $-3\leqslant x\leqslant -2$; $2\leqslant x\leqslant 3$.

El tercer caso se considera análogamente al primero; aquí no aparecen nuevas soluciones.

En definitiva, las raíces de la ecuación inicial llenan dos intervalos del eje numérico aunque tal situación parece asombrosa en lo que se refiere a las ecuaciones (a diferencia de las desigualdades).

En este aspecto no es menos interesante el ejemplo siguiente, donde las soluciones constituyen un intervalo infinito más un punto.

8. *Resolver la ecuación*

$$2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1.$$

[1] Aquí, las condiciones de los casos pueden también escribirse de otro modo, por ejemplo: $x^2<4$, $4\leqslant x^2<9$, $9\leqslant x^2$; naturalmente, el resultado definitivo será el mismo.

Consideremos dos casos.

a) $x+2\geqslant 0$. En este caso obtenemos la ecuación $2^{x+1}-1=$ $=|2^{x+1}-1|$, ya que $2^{|x+2|}=2^{x+2}$ y $2^{x+2}-2^{x+1}=2^{x+1}$. Esta ecuación se satisface, evidentemente, cuando $2^{x+1}-1\geqslant 0$, o bien, cuando $x+1\geqslant 0$, es decir, $x\geqslant -1$. Estos valores de x satisfacen la condición a) y son las raíces de nuestra ecuación.

b) $x+2<0$. En este caso, después de unas transformaciones fáciles y la sustitución de 2^{x+1} por y obtenemos la ecuación

$$2y^2+2y+2y\,|y-1\,|=1.$$

Se puede resolver esta ecuación considerando dos casos para liberarse del módulo, al igual que en los ejemplos precedentes. Pero se puede comprender también que para $y\geqslant 1$ el primer miembro es mayor que 1, y por eso tenemos que buscar sólo las raíces de $y<1$; y para $y<1$ obtenemos la ecuación $4y=1$, de donde se deduce que $y=1/4$ por razón de que $x=-3$.

Uniendo las soluciones obtenidas en los casos a) y b) llegamos al resultado: $x=-3$ y $x\geqslant -1$.

Los ejemplos examinados demuestran de manera evidente que el concepto de un valor absoluto no presenta dificultades de principio durante las resoluciones de los problemas, porque un método común, como es la consideración de unos casos, siempre permite liberarse del signo del valor absoluto. Naturalmente, el análisis de diferentes casos es un método único para la resolución de los ejemplos con módulos.

Las particularidades de un problema concreto permiten frecuentemente hallar otras vías de resolución, más cortas y originales. Por lo tanto, al ver en la condición del problema el signo del valor absoluto, no hace falta considerar "de paso" unos casos; esta posibilidad de solución no desaparecerá nunca, pero es muy útil pensar primeramente en el problema planteado, tratar de escoger otros métodos.

De vez en cuando es posible hallar un método muy específico que sirve de origen inmediato para resolver, por ejemplo, el problema siguiente.

9. *Resolver la desigualdad* $x^2+x+|x|+1\leqslant 0$.

Efectivamente, se puede recurrir a un método común. Pero, si escribimos esta desigualdad en la forma de $|x|\leqslant -(x^2+x+1)$, se ve entonces que no puede tener soluciones. En realidad, $|x|\geqslant 0$ para todos los valores de x y el segundo miembro de la última desigualdad siempre es rigurosamente negativo, porque $x^2+x+1=$ $=(x+1/2)^2+3/4>0$.

Y en el problema siguiente la ventaja del método especial es más sorprendiente: el método común exige cálculos fastidiosos con los números irracionales, no obstante, este procedimiento con bastante facilidad permite hallar rápidamente la solución.

10. *Resolver la desigualdad*

$$|x^2-3x-3|>|x^2+7x-13|.$$

Como es sabido, una desigualdad con los miembros no negativos, al elevarlos al cuadrado, se sustituye por una equivalente (véase el § 10). Por lo tanto, nuestra desigualdad es equivalente a la siguiente:

$$|x^2-3x-3|^2>|x^2+7x-13|^2.$$

Pero, $|a|^2=a^2$, y por eso se puede anotar esta desigualdad como

$$(x^2-3x-3)^2>(x^2+7x-13)^2.$$

Ahora, trasladando todo al segundo miembro y utilizando la fórmula de diferencia entre los cuadrados, obtenemos la desigualdad:

$$2(x^2+2x-8)\cdot 10(x-1)<0,$$

o sea, que es lo mismo,

$$(x+4)(x-2)(x-1)<0.$$

La desigualdad obtenida se resuelve fácilmente aplicando el llamado "método de intervalos" (véase el § 10); sus soluciones y, por consiguiente, las soluciones de la desigualdad inicial son:

$$x<-4 \quad \text{y} \quad 1<x<2.$$

Terminando de examinar el concepto sobre el valor absoluto, consideremos un problema cuya complejidad radica en la presencia de un *parámetro*. Sin embargo, como vamos a ver, la presencia de este parámetro hace muy complejo el problema, que exige, además del conocimiento del método y de un buen procedimiento de solución, mucho cuidado en los cálculos.

11. *Para cada número real a resolver la ecuación* $x|x+1|+a=0$.

Consideremos dos casos: $x<-1$ y $x\geqslant-1$. En el primer caso la ecuación toma la forma $x(-x-1)+a=0$, o bien, $x^2+x-a=0$. Aquí resultó una ecuación de segundo grado con el parámetro a. Nos interesan sólo aquellas raíces reales de esta ecuación que satisfagan la condición $x<-1$. Claro está que las raíces de la ecuación dependen del parámetro a: con algunos valores de a las raíces pueden resultar reales, con otros, imaginarias. Por esto, es necesario señalar antes aquellos valores de a, para cada uno de los cuales las raíces de la ecuación $x^2+x-a=0$ son reales. La condición de las raíces reales consiste en que el discriminante no es negativo: $D=1+4a\geqslant 0$. En otras palabras, para $a\geqslant-1/4$ las raíces de la ecuación son reales:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2},$$

y con otros valores de a, o sea, cuando $a<-\frac{1}{4}$ las raíces de esta ecuación son imaginarias. Por consiguiente, para $a<-\frac{1}{4}$ (examinando ahora el primer caso) la ecuación inicial no tiene soluciones.

De tal modo, nos queda por hallar las soluciones de la ecuación inicial, en el caso que consideramos, cuando $a\geqslant -1/4$. Con esto, de los números hallados x_1 y x_2 tendremos que tomar aquellos que satisfagan la condición $x<-1$.

Para esto hay que resolver las desigualdades:

$$\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}<-1 \quad \text{y} \quad \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}<-1.$$

La primera desigualdad se reduce con facilidad a la expresión $1+\sqrt{1+4a}<0$, es decir, que no se cumple para ningún valor de a. La segunda desigualdad se reducie a $1<\sqrt{1+4a}$ y se cumple, como se ve fácilmente cuando $a>0$.

De esta manera, para $a>0$ la ecuación inicial tiene una raíz real $x=(-1-\sqrt{1+4a})/2$ que satisface la condición del caso examinado cuando $x<-1$, y no hay ninguna raíz para $a\leqslant 0$.

En el segundo caso tenemos la ecuación $x^2+x+a=0$. La condición de las raíces reales $D=1-4a\geqslant 0$ demuestra que esta ecuación tiene raíces reales sólo cuado $a\leqslant 1/4$, y para $a>1/4$ (en el segundo caso ahora considerado) la ecuación inicial no tiene soluciones. Nos queda hallar los valores de a para $a\leqslant 1/4$ en los cuales las raíces de la ecuación $x^2+x+a=0$ satisfacen la condición del caso $x\geqslant -1$, es decir, hay que resolver las desigualdades:

$$\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\geqslant -1 \quad \text{y} \quad \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}\geqslant -1.$$

La primera desigualdad se reduce a la forma $1+\sqrt{1-4a}\geqslant 0$ y, por consiguiente, se cumple con todos los valores *posibles* de a, es decir, cuando $a\leqslant 1/4$. La segunda desigualdad se reduce a la expresión $\sqrt{1-4a}\leqslant 1$ y se cumple, como es fácil ver, con todos los valores positivos posibles de a, es decir, cuando $0\leqslant a\leqslant 1/4$.

De tal modo, para $0\leqslant a\leqslant 1/4$ la ecuación inicial tiene dos raíces reales en la expresión $x\geqslant -1$:

$$x'=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}, \quad x''=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$$

(cuando $a=1/4$ estas raíces coinciden) y cuando $a<0$ tiene solamente una sola raíz $x=(-1+\sqrt{1-4a})/2$; cuando $a>1/4$ en la expresión $x\geqslant -1$, la ecuación inicial no tiene raíces.

Haremos el resumen, enunciando los resultados de dos casos en conjunto:

para $a < 0$ $x = \frac{-1 + \sqrt{1-4a}}{2}$;

para $0 \leqslant a \leqslant 1/4$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1-4a}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{1-4a}}{2}$$

(para $a = 0$ tenemos $x_1 = x_3$; para $a = 1/4$ tenemos $x_2 = x_3$);

$$\text{para } a > 1/4 \quad x = \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}.$$

En vez de hacer una observación sobre la coincidencia de las raíces se podría escribir ambos casos, $a = 0$ y $a = \frac{1}{4}$, en diferentes líneas:

para $a=0$ $x_1 = -1$, $x_2 = 0$;

para $a = 1/4$ $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -1/2$.

El concepto de raíz aritmética está relacionado estrechamente con el valor absoluto del número real. Vamos a plantear la pregunta: *¿ a qué es igual $\sqrt{x^2}$?* En otras palabras, ¿cómo se puede escribir esta expresión sin el signo del radical? La contesta más frecuente es la siguiente: $\sqrt{x^2} = x$ para cualquier x. No es difícil convencerse de que la contesta es incorrecta; en realidad, para $x = -2$, por ejemplo, tenemos que

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2.$$

También se contesta frecuentemente que $\sqrt{x^2} = \pm x$. Esto tampoco es correcto, porque $\sqrt{x^2}$, en correspondencia con su definición, representa un número completamente determinado y no dos números: $+x$ y $-x$.

Para comprender esta cuestión, recordemos las definiciones y hechos fundamentales que se refieren al concepto de la raíz.

Definición 1. *El número b se llama raiz cuadrada del número a si* $b^2 = a$.

De conformidad con esta definición se tienen dos afirmaciones: "b es la raíz cuadrada de a" y "$b^2 = a$" que significan lo mismo.

Para subrayar una particularidad esencial de esta definición vamos a compararla, por ejemplo, con la definición del cuadrado de un número: al cuadrado del número b se le llama producto de este número por sí mismo. Esta definición vale mucho porque da una *regla* para hallar el número b^2. En contradicción con esto, la definición de la raíz cuadrada no es tan buena, ya que no da una regla para calcular la raíz cuadrada; tampoco está claro si siempre puede extraerse la raíz cuadrada de un número dado a y cuántas raíces pueden extraerse, es decir, cuántos diferentes números b pueden satisfacer la ecuación $b^2 = a$. Por consiguiente, lo primero que hay que hacer es examinar el problema sobre la existencia y la cantidad de raíces cuadradas del número dado a.

La resolución de este problema se realiza mediante tres afirmaciones:

1) *Si el número a es positivo, existen exactamente dos raíces cuadradas de a; con esto, una de éstas es positiva y la otra, negativa.*

2) *Si $a = 0$, existe una sola raíz cuadrada de a, la que es igual a cero.*

3) *Si el número a es negativo, no existe ninguna raíz cuadrada de a*[1].

En la escuela secundaria se toma sin demostración la existencia de la raíz positiva del número positivo [2]. Las demás afirmaciones de los puntos 1) — 3) pueden ser demostradas fácilmente [3].

Examinemos ahora el número positivo a. De este número se pueden extraer dos raíces cuadradas. Para diferenciarlas entre ellas se introduce un concepto de la raíz aritmética.

Definición 2. *Llámase raíz cuadrada aritmética de un número a la raíz cuadrada positiva de este número positivo.*

La raíz cuadrada aritmética de a se designa con el símbolo $\sqrt{a}$. Bajo la expresión $\sqrt{0}$ se entiende siempre una raíz única, es decir, cero.

De tal modo, la afirmación de que "b es la raíz cuadrada aritmética de a" es equivalente a un conjunto de dos afirmaciones: "$b^2 = a$" y "$b \geqslant 0$"; con esto se supone que a es un número positivo o cero. Si b es una raíz cuadrada aritmética de a, entonces la segunda raíz de a es $-b$.

De tal manera, $\sqrt{x^2}$, de que hemos hablado al principio, no es simplemente un número cualquiera que elevado al cuadrado da x^2, sino que es indispensablemente un *número positivo o cero*.

Entonces, ¿ a qué es igual $\sqrt{x^2}$?

Para que la consideración sea más cómoda supongamos que $x \neq 0$, ya que en el caso $x=0$ todo está claro: $\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$. Según la definición 2 sabemos que $\sqrt{x^2}$ representa un número positivo que elevado al cuadrado da x^2. Es fácil ver que los números x y $-x$ (y solamente ellos) tienen la última propiedad. Pero, el número positivo, está claro, es sólo único y este número positivo es, precisamente, igual a $\sqrt{x^2}$.

[1] Recordemos que en este párrafo sólo estamos examinando los números reales.

[2] Con esto se comunica también un método que permite calcular esta raíz con un grado de precisión arbitrario, dado con anterioridad. Es necesario conocer y saber aplicar este método para calcular la raíz de un número concreto dado.

[3] Dejamos que el lector mismo haga demostraciones.

De tal modo, *si x es positiva, entonces* $\sqrt{x^2}=x$, *si* $-x$ *es positiva (es decir, x es negativa), entonces* $\sqrt{x^2}=-x$. En ese caso se puede componer la tabla siguiente:

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & \text{si } x>0, \\ 0, & \text{si } x=0, \\ -x, & \text{si } x<0. \end{cases}$$

Si aplicamos la designación del valor absoluto, se puede anotar brevemente así:

$$\sqrt{x^2}=|x| \tag{3}$$

para cualquier x (real).

Lo antes dicho tiene gran importancia al realizar transformaciones algebraicas y trigonométricas. El olvido de la propiedad expuesta lleva a veces a errores graves (véase el ejemplo 1, § 1, Parte II).

Si en las expresiones algebraicas que llevan radicales, no todas las letras designan números no negativos, pues cuando se realicen unas transformaciones idénticas es siempre necesario aplicar la fórmula (3).

12. *Simplificar la expresión* $(a>0, a\neq 1)$

$$\frac{a^{-x}}{\sqrt{5}}\left[2a^{2x}-a^{x}(2a^{x}-1)\right]\left[1-\left(\frac{\sqrt{5}\,a^{x}}{2a^{x}-1}\right)^{-2}\right]^{-1/2}\times$$
$$\times\sqrt{(a^{x}-2)^{2}-5}-(a^{2x}+4)\left[a^{2x}+4(1-a^{x})\right]^{-1/2}+$$
$$+4a^{x}\left[1+(a^{x}+2)(a^{2x}-4a^{x}+4)^{-1/2}\right]\times$$
$$\times\left[a^{x}+2+(a^{2x}-4a^{x}+4)^{1/2}\right]^{-1}$$

y determinar para cuáles valores de x esta espresión es igual a 1.

Ante todo, vamos a reducir esta expresión a una forma más simple, utilizando las transformaciones idénticas algebraicas. Valiéndose de las definiciones de las potencias fraccionarias y negativas, se puede reducir el primer sumando a la forma a^x, y el tercero, a la siguiente:

$$\frac{4a^{x}}{\sqrt{a^{2x}-4a^{x}+4}};$$

claro está, al realizar varios cálculos. Por consiguiente, se puede escribir la expresión propuesta como sigue:

$$a^{x}-\frac{a^{2x}-4a^{x}+4}{\sqrt{a^{2x}-4a^{x}+4}}=a^{x}-\sqrt{(a^{x}-2)^{2}}.$$

El mismo lector tiene la posibilidad de realizar las transformaciones formales necesarias.

Ya sabemos que es imposible escribir la última expresión como $a^x-(a^x-2)=2$; ya que la diferencia a^x-2 no es obligatorio que sea positiva, entonces la solución de que "la expresión propuesta es igual a 2 para todos los valores de x", es gravemente errónea. La solución verdadera tiene la representación siguiente: "la expresión inicial se transforma en la forma $a^x - |a^x - 2|$".

Nos queda hallar aquellos valores de x para los cuales

$$a^x - |a^x - 2| = 1.$$

Si $a^x \geqslant 2$, esta ecuación no tiene, por lo visto, soluciones. Si $a^x < 2$, entonces, para determinar x tenemos la ecuación $a^x - (2 - a^x) = 1$, es decir, $a^x = \frac{3}{2}$. Notemos que con este valor de x se cumple la condición $a^x < 2$, por razón de que hallamos el valor buscado $x = \log_a 3/2$.

EJERCICIOS:

1. Si son válidas o no las siguientes igualdades:

a) $|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0, \\ -a, & \text{si } a \leqslant 0; \end{cases}$

b) $|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{si } a \leqslant 0. \end{cases}$

2. Demostrar que. a) $|x| = |-x|$; b) $x \leqslant |x|$.

3. Demostrar que si $|a| = 0$; entonces $a = 0$.

4. ¿Qué se puede decir de los números $a_1, \ldots, a_n$, si se sabe que $|a_1| + \ldots + |a_n| = 0$?

5. Demostrar que la distancia entre los puntos a y b del eje numérico es igual a $|b - a|$.

6. Resolver las desigualdades: a) $|x - a| < b$; b) $|x - a| \geqslant b$, donde a y $b > 0$ son los números dados; dar una interpretación geométrica de las soluciones.

Resolver las ecuaciones y las desigualdades:

7. $|3x - 4| = 1/2$.

8. $||x + 1| + 2| = 2$.

9. $||x - 1| + 2| = 1$.

10. $|x - 3| > -1$.

11. $|34 + 21x - x^2| \leqslant -1$.

12. $|4 - 3x| \leqslant 1/2$.

13. $|x| + x^3 = 0$

14. $|x^2 - 1| + x + 1 = 0$.

15. $|2x - x^2 - 3| = 1$.

16. $(1 + x)^2 \geqslant |1 - x^2|$.

17. $|x^2 - 6x + 8| \leqslant 4 - x$.

18. $|x^2 + 4x + 3| > x + 3$.

19. $|x - 1 - x^2| \leqslant |x^2 - 3x + 4|$.

20. $|x^3 - 1| \leqslant x^2 + x + 1$.

21. $|x^2 - 4x + 2| = (5x - 4)/3$.

22. $(x + 1)(|x| - 1) = -1/2$.

23. $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0$.

24. $9^{-|x|} = (1/2)^{|x+1| + |x-1|}$

25. $(x + 4)\, 3^{1 - |x-1|} - x = (x + 1)|3^x - 1| + 3^{x+1} + 1$.

26. $|x - 1| \geqslant (x + 1)/2$.

27. $|x - 2| < x/2$

28. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$.

29. $x^2 - |3x + 2| + x \geqslant 0$.

30. $x^2+2|x+3|-10\leqslant 0$.

31. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y-2|x|+3=0, \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$$

Resolver las ecuaciones para cada número real a:

32. $x^2+|x|+a=0$.

33. $144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0$.

34. $9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0$.

35. Demostrar que si los números x, y son de un mismo signo, entonces

$$\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|=|x|+|y|$$

36. Simplificar las expresiones: $\sqrt[4]{x^2}$; $\sqrt{x^4}$; $\sqrt[6]{x^6}$; $\sqrt[3]{x^3}$; $\sqrt{x^8y}$; $\sqrt[5]{x^{15}y^{10}}$.

37. ¿Es siempre correcta la igualdad $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$?

38. Simplificar la expresión

$$\sqrt{9-6a+a^2}+\sqrt{9+6a+a^2}, \text{ si } a<-3.$$

39. Simplificar la expresión para $1<x<2$:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}.$$

40. Simplificar la expresión:

$$\sqrt{(1-\cos\alpha\cos\beta)^2-\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}.$$

§ 5. NÚMEROS COMPLEJOS

La definición lógica de los números complejos y de las reglas para las operaciones con éstos, es una de las dificultades fundamentales de este tema.

Por ejemplo, los números complejos "se definen" a menudo así: "al número complejo se le llama número de la expresión $a+bi$, donde a y b son números reales e $i=\sqrt{-1}$". En realidad, esta definición es incomprensible, porque el signo del radical $\sqrt{}$ se utiliza (véase el § 4) para designar la raíz cuadrada aritmética de un número real positivo. ¡Y qué significa $\sqrt{-1}$, no se sabe!

Los estudiantes pueden formular *las definiciones* principales de los números complejos así:

Llámase número complejo a la expresión $a+bi$, donde a y b son números reales e i es un símbolo. Dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ se consideran iguales, según la definición, si $a=c$ y $b=d$.

Partiendo de la definición, las operaciones algebraicas con los números complejos se efectúan según las mismas reglas que sirven para las operaciones con números reales; con todo eso hay que sustituir siempre i^2 por -1.

Luego conviene presentar las fórmulas de adición, sustracción, multiplicación y división que se deducen de esta definición.

Hay que hacer la observación de que la definición citada arriba por nosotros, no es absolutamente exacta. En efecto, sería muy útil si cada estudiante se familiarizara con la teoría de los números complejos, lógicamente rigurosa. Por lo tanto, consideramos útil exponer aquí uno de los conceptos rigurosos posibles de esta teoría.

Para construir los números complejos vamos a considerar las expresiones formales de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales. Denominando *formales* a estas *expresiones*, subrayamos que *no les damos ningún sentido*, no planteamos un problema sobre su significación, no pensamos cómo estas expresiones están relacionadas con algo práctico. Las entendemos como *puramente formales*: para obtener tal expresión hay que tomar dos números reales, diferentes o iguales, a y b y con ayuda de los símbolos auxiliares $+$ e i componer de estos números la expresión de la forma impuesta. Por ejemplo, estas expresiones serán:

$$2+3i,\ 2+(-3i),\ 2+0i,\ 0+1i,\ (-\pi)+\sqrt{3}i.$$

Tampoco hablamos aquí del sentido de los símbolos auxiliares $+$ e i. Aquí el signo $+$ *no es un signo de adición*, como siempre lo habíamos considerado. ¡En efecto, hemos sabido adicionar sólo números reales! Por esto, aquí el signo $+$ es simplemente un signo formal, su sentido único es que con su ayuda se forman expresiones formales que ahora estamos analizando.

En vista de que estas expresiones son objetos absolutamente nuevos, tenemos que, ante todo, ponernos de acuerdo de cómo distinguirlas una de otra, en cuáles casos considerar idénticas e *iguales* dos de estas expresiones. Subrayamos que *nos acordaremos* de esto no deducir de unos axiomas o teoremas precedentes sino dar una *definición*. En cuanto a estas expresiones, no tenemos ningunos teoremas porque los introducimos recientemente y el asunto de cómo hay que distinguirlas es cosa nuestra.

De esa manera, demos la definición siguiente.

Definición 1. *Vamos a considerar que las expresiones $a+bi$ y $c+di$ son iguales cuando y sólo cuando $a=c$ y $b=d$ simultáneamente. La igualdad de las expresiones $a+bi$ y $c+di$ la escribiremos como $a+bi=c+di$.*

Después de esta definición podemos decir que cuando dos expresiones son diferentes: $a+bi$ y $c+di$ son *distintas* si se cumple aunque sea una de las dos desigualdades $a\neq c$, $b\neq d$.

El problema siguiente consiste en aprender a operar con estas expresiones: adicionarlas, multiplicarlas, etc. Somos nosotros mismos los que tenemos que determinar cómo hacerlo.

Vamos a basarnos en la misma idea de la operación aritmética: el adicionar o el multiplicar dos números significa que, según una regla, hay que construir un tercer número, llamado suma o producto, respectivamente. De esa manera, para aprender a adicionar o multiplicar nuestras expresiones, hace falta imponer unas reglas según las cuales es necesario realizarlo.

Definición 2. *A la suma de las expresiones $a+bi$ y $c+di$ la llamaremos expresión $(a+c)+(b+d)i$. Designemos la suma de las expresiones $a+bi$ y $c+di$ por medio de*

$$(a+bi)+(c+di).$$

Notemos que en la última expresión el signo $+$ entre los paréntesis tiene un nuevo sentido: es el signo de adición de las expresiones formales.

Definición 3. *Al producto de las expresiones $a+bi$ y $c+di$ vamos a llamar expresión $(ac-bd)+(ad+bc)i$. Designemos el producto de las expresiones $a+bi$ y $c+di$ por*

$$(a+bi)(c+di).$$

Ahora introduzcamos una terminología corriente.

Las expresiones $a+bi$, que se diferencian según la regla expuesta en la definición 1 que se adicionan según la definición 2 y se multiplican según la definición 3, se denominan números complejos.

Aquí surge una pregunta natural: ¿por qué hemos introducido el término "números complejos" no al principio, sino ahora mismo, después de tres definiciones precedentes? Sería incorrecto hacerlo antes. El hecho consiste en que en la base de las expresiones $a+bi$ se pueden también elaborarse otras teorías, en nada parecidas a la teoría de los números complejos. Y la teoría que vaya a elaborarse, dependerá precisamente de las reglas con las cuales vamos a operar con estas expresiones. Por lo tanto, cuando hablamos de los números complejos, no se trata simplemente de un conjunto de expresiones del tipo $a+bi$, sino que suponemos siempre que para sumarlas y multiplicarlas se debe proceder de conformidad con las definiciones 2 y 3.

Con esto termina la definición de los números complejos, y ahora estamos en condiciones de poder desarrollar la teoría. Así, por ejemplo, se puede definir *la diferencia* de los números complejos $a+bi$ y $c+di$ como un número complejo, el cual en la suma con $c+di$ da $a+bi$, y demostrar que esta diferencia $(a+bi)-(c+di)$ es igual a $(a-c)+(b-d)i$; luego se puede definir *el cociente* de la división de $a+bi$ entre $c+di$ como un número complejo, cuyo producto por $c+di$ es igual a $a+bi$, y demostrar que para $c+di\neq 0+0i$ este cociente $\dfrac{a+bi}{c+di}$ es igual a

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Se puede dar también una interpretación geométrica de los números complejos, etc.

Pero, queda no aclarada una cuestión de principio: ¿cómo están relacionados los números reales y los complejos? Vamos a considerar las expresiones formales de la forma $a+0i$. Calculemos (según las definiciones 2 y 3) la suma y el producto de los dos números siguientes:

$$(a+0i)+(b+0i)=(a+b)+(0+0)i=(a+b)+0i,$$
$$(a+0i)(b+0i)=(ab-0\cdot 0)+(a\cdot 0+0\cdot b)=ab+0i.$$

Vemos que para hallar la suma de los números complejos $a+0i$ y $b+0i$ se pueden sumar los números reales a y b y luego añadir al resultado $0i$, es decir, formar una expresión $(a+b)+0i$. El caso es análogo cuando se refiere al producto.

De tal modo, las operaciones con los números complejos de la forma $a+0i$ se efectúan esencialmente como si se tratase de números reales. Por eso, cada número complejo $a+0i$ es natural identificarlo con el número real a.

Como resultado de esta identificación obtenemos que el conjunto de números reales forma parte del conjunto de números complejos, ya que cualquier número real es a la vez un número complejo. Por lo tanto, en lo ulterior, los números a y $a+0i$ no se diferencian.

Examinemos aún más el número $0+1i$. Este número juega un papel fundamental en toda la teoría, el cual, para *abreviar* el concepto, se consigna simplemente por i. Después de esto se ve que el número complejo $a+bi$, que se entendía hasta ahora como una expresión formal, se le puede comunicar el sentido siguiente: es la suma del número complejo a (es decir, $a+0i$) y del producto del número complejo b (es decir, $b+0i$) por el número complejo i (es decir, $0+1i$). Efectivamente,

$$(a+0i)+(b+0i)(0+1i)=(a+0i)+[(b\cdot 0-0\cdot 1)+(b\cdot 1+0\cdot 0)i]=$$
$$=(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=a+bi.$$

Por consiguiente, de estos razonamientos hemos dado un sentido al signo $+$ en la expresión formal $a+bi$: se le puede entender como el signo de adición de los números complejos.

Ahora es preciso aclarar la propiedad fundamental del número complejo i. Es fácil comprobar que

$$i^2=i\cdot i=(0+1i)(0+1i)=-1+0i=-1.$$

De tal modo, se puede actuar con los números complejos según las mismas reglas que se aplican para las operaciones con los números reales, en este caso hay que sustituir siempre i^2 por -1.

La igualdad $i^2=-1$ se puede interpretar como sigue: el número i es la raíz de la ecuación $x^2+1=0$. Precisamente este problema consistente en la solución de la ecuación $x^2+1=0$ que no tiene raíces reales, sirvió de motivo para crear la teoría de los números complejos.

A causa de la divergencia existente en la terminología citaremos aquí unas cuantas definiciones.

El número complejo $a+bi$ *se llama real (o material), si* $b=0$.

Ejemplos de números reales: 1; -3; 0.

El número complejo $a+bi$ *se llama imaginario, si* $b\neq 0$.

Ejemplos de números imaginarios: $2i$; $1-i$; $\sqrt{7}-i\sqrt{3}$.

El número complejo $a+bi$ *se llama puramente imaginario, si* $a=0$.

Ejemplos de números puramente imaginarios: $-2i$; πi; 0. Aquí hay que señalar que el número 0 es real y puramente imaginario, pero no es un número imaginario.

A la parte real del número complejo $a+bi$ *se le llama número* a.

A la parte imaginaria del número complejo $a+bi$ *se le llama número* b.

Durante la solución de muchos problemas se utiliza a menudo *la interpretación geométrica* de los números complejos como *puntos* de un plano.

En este caso, juega un papel importante *el concepto de módulo del número complejo* $z=a+bi$, *que se determina por la igualdad*

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{1}$$

Es evidente que el módulo es un número real no negativo que se determina, según esta fórmula, unívocamente para cada número complejo $z=a+bi$. El módulo tiene un simple sentido geométrico: $|z|$ es, evidentemente, la distancia desde el origen de las coordenadas hasta el punto correspondiente al número z. En esta interpretación geométrica se basa una gran cantidad de problemas.

1. *En un plano está dado un punto que representa el número complejo* $z=a+bi$. *¿Dónde se encuentran los puntos*: a) $z+1$; b) $z-2+i$?

a) Ya que el número $z+1=(a+1)+bi$, entonces el punto que presenta el número complejo $z+1$, tendrá las coordenadas $(a+1, b)$, es decir, la ordenada ha quedado la misma y la abscisa ha aumentado en 1. Por lo tanto, el punto $z+1$ resulta del punto z desplazándose a la derecha en 1 (fig. 4).

b) Ya que el número $z-2+i=(a-2)+(b+1)i$, entonces el punto que presenta el número complejo $z-2+i$, tendrá las coordenadas $(a-2, b+1)$, es decir, la abscisa ha disminuido en 2 y la ordenada ha aumentado en 1. Por lo tanto, el punto $z-2+i$ resulta del punto z desplazándose a la izquierda en 2 y hacia arriba en 1 (fig. 4).

2. *¿Dónde se encuentran en el plano los puntos para los cuales* $|z|=1$?

Según la interpretación geométrica del módulo de un número complejo, todos los puntos que representan los números complejos con $|z|=1$, se encuentran a una misma distancia, igual a 1, desde el origen de las coordenadas, o sea, se hallan (según la definición) en una circunferencia de radio 1 con el centro en el origen de las coordenadas.

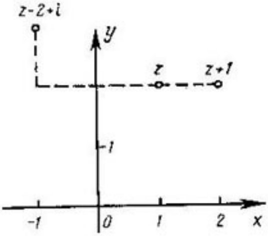


Fig. 4

3. *Sea* $|z|=2$. *¿Dónde se encuentran los puntos* $3z$?

Los puntos z que satisfacen la condición $|z|=2$, se hallan en una circunferencia de radio 2 con el centro en el origen de las coordenadas (véase el problema anterior). El punto $3z$ se encuentra en el mismo radio que el punto z, pero dista del origen de las coordenadas a una distancia tres veces mayor que el punto z. (¿Por qué? Hagan el dibujo.) Por eso, los puntos $3z$, donde $|z|=2$, se encuentran en una circunferencia de radio 6 con el centro en el origen de las coordenadas.

4. *Sea* $|z|=1$. *¿Dónde se encuentran los puntos* $1+2z$?

Los puntos z que satisfacen la condición $|z|=1$, se encuentran en una circunferencia de radio 1 con el centro en el origen de las coordenadas. Todos los puntos $2z$, donde $|z|=1$, se encuentran en una circunferencia de radio 2 con el centro en el origen de las coordenadas. El punto $2z+1$ resulta del punto $2z$ desplazándose a la derecha en 1 (véase el problema 1). Por lo tanto, los puntos $1+2z$, donde $|z|=1$, se hallan en una circunferencia de radio 2 con el centro en el punto $(1, 0)$ (fig. 5).

5. *¿Dónde se encuentran los puntos para los cuales* $2<|z|<3$?

Sabemos que los puntos que satisfacen la condición $|z|=2$, se encuentran en una circunferencia de radio 2 con el centro en el origen de las coordenadas. Y los puntos para los cuales $|z|>2$ se encuentran más distantes del origen de las coordenadas que los puntos de esta circunferencia, es decir, fuera de la misma. Análogamente, los puntos que satisfacen la condición $|z|<3$ se encuentran en el interior de una circunferencia de radio 3 con el centro en el origen de las coordenadas. Quiere decir que los puntos que satisfacen la condición $2<|z|<3$ se encuentran dentro de un anillo acotado por las circunferencias concéntricas con el centro en el origen de las coordenadas y los radios $r_1=2$ y $r_2=3$ (fig. 6).

El número complejo se puede considerar también como un *vector* cuyo origen se encuentra en un plano, en el origen del sistema de coordenadas, y su extremo se halla en el punto que representa este número. Mediante tal interpretación es fácil explicar geométricamente las operaciones de *adición* y *sustracción*.

Si el vector $\overrightarrow{OM_1}$ representa el número $z_1 = a + bi$, y $\overrightarrow{OM_2}$ es el vector que representa el número $z_2 = c + di$, la suma de estos vectores,

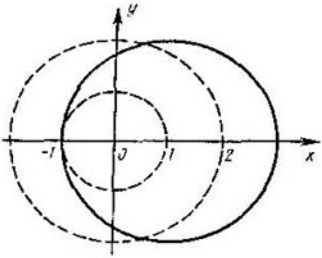


Fig. 5

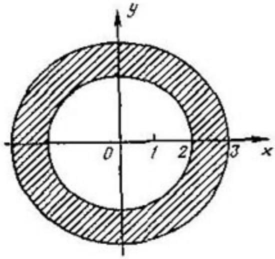


Fig. 6

$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, es la diagonal $\overrightarrow{OM_3}$ del paralelogramo $OM_1M_3M_2$. El extremo de esta diagonal, el punto M_3, tiene, evidentemente, las coordenadas $(a+c,\ b+d)$ (fig. 7). De tal modo, el vector $\overrightarrow{OM_3}$ es

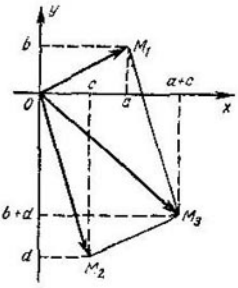


Fig. 7

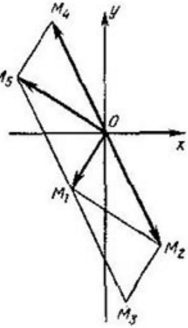


Fig. 8

el que representa el número complejo $z_3 = z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,i$. Si el vector $\overrightarrow{OM}$ representa el número z, entonces el número $-z$ se representará por el vector $\overrightarrow{ON}$ cuyo extremo es un punto simétrico al punto M respecto al origen de las coordenadas. Debido a esto, la operación de sustracción de los números complejos admite también una simple interpretación geométrica. Justamente: ya que $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, entonces, en lugar del vector $\overrightarrow{OM_2}$, que representa el número z_2, vamos a analizar el vector $\overrightarrow{OM_4}$ simétrico al primero respecto al origen de las coordenadas (fig. 8). Sumando, como hicimos arriba, el vector $\overrightarrow{OM_1}$ que representa el número z_1, y el vector $\overrightarrow{OM_4}$, obtendremos el vector $\overrightarrow{OM_5}$ que representa la diferencia $z_1 - z_2$. Está claro que la longitud del vector $\overrightarrow{OM_5}$ es igual a la del vector $\overrightarrow{M_2M_1}$, o sea, a la longitud de la diagonal M_1M_2 del paralelogramo $OM_1M_3M_2$. Porque la longitud del vector $\overrightarrow{OM_5}$ es igual al módulo de la diferencia $z_1 - z_2$, la longitud de la diagonal M_1M_2 es también igual a $|z_1 - z_2|$. Resultó una simple interpretación geométrica del módulo de la diferencia de dos números complejos: $|z_1 - z_2|$ es una distancia entre los puntos M_1 y M_2 que representan los números complejos z_1 y z_2. Esta interpretación se aplica a menudo para la solución de los problemas.

6. *¿Dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos z para los cuales $|z-1|=2$?*

Si el punto z es un punto incógnito, la distancia entre z y 1 es igual a 2. Pero, los puntos que se hallan desde 1 a una distancia de 2, están en la circunferencia. En ese caso, los puntos que representan los números para los cuales $|z-1|=2$, se encuentran en una circunferencia de radio 2 con el centro en el punto (1, 0).

Se puede razonar de otra manera. Designamos $z-1=w$. Entonces obtenemos una igualdad $|w|=2$. Por consiguiente, los puntos w se encuentran en una circunferencia de radio 2 con el centro en el origen de las coordenadas. Pues $z=w+1$, los puntos z resultan de los puntos w desplazándose a la derecha en 1. De tal modo, los puntos incógnitos se hallan en una circunferencia de radio 2 con el centro en el punto (1, 0).

7. *¿Dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos z para los cuales $|z+2i| \leqslant 1$?*

Copiemos esta condición así: $|z-(-2i)| \leqslant 1$. Esto quiere decir que la distancia desde los puntos z hasta el punto $-2i$ no es mayor que 1, o sea, todos los puntos que la satisfacen, se encontrarán en el interior o en el límite del círculo de radio 1 con el centro en el punto (0, —2), que representa el número complejo $-2i$.

8. *Los números complejos z satisfacen la condición $1 < |z+2-3i| < 2$. ¿Dónde se encuentran los puntos que representan estos números?*

Copiemos nuestra condición así: $1 < |z-(-2+3i| < 2$. Todos los puntos que satisfacen esta condición se encuentran dentro de un anillo acotado por las circunferencias concéntricas con el centro en el punto (—2, 3) y los radios $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$.

9. *Los números complejos z satisfacen la condición*

$$|z-i|=|z+2|.$$

¿Dónde se encuentran los puntos que representan estos números?

El módulo $|z-i|$ es la distancia entre los puntos z y un punto fijo que representa el número i. El módulo $|z+2|=|z-(-2)|$ es la distancia entre los puntos z y un punto fijo que representa el número -2.

La condición del problema exige hallar los puntos para los cuales estas distancias sean iguales. Es decir, la solución del problema

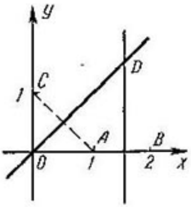


Fig. 9

será el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos fijos del plano: de un punto que representa el número complejo i, o sea, del punto $(0, 1)$, y de un punto que representa el punto -2, o sea, del punto $(-2, 0)$.

Se sabe de la geometría que el lugar geométrico es una recta perpendicular al segmento que une los dos puntos señalados, y que pasa por su centro. Esto quiere decir que los puntos que representan los números complejos z, que satisfacen la condición $|z-i|=|z+2|$, se encuentran en la recta perpendicular al segmento que une los puntos con las coordenadas $(-2, 0)$ y $(0, 1)$, y que pasa por el centro de este segmento.

10. *¿Dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos z para los cuales* $|z-1|=|z-2|=|z-i|$?

El conjunto de puntos que satisfacen la condición $|z-1|=|z-2|$ es una recta que pasa por el centro del segmento AB, donde $A(1, 0)$ y $B(2, 0)$, perpendicularmente a éste. El conjunto de puntos que satisfacen la condición $|z-1|=|z-i|$ es una recta que pasa por el centro del segmento AC, donde $A(1, 0)$ y $C(0, 1)$, perpendicularmente a éste (véase la fig. 9).

Ahora está claro que a la condición

$$|z-1|=|z-2|=|z-i|$$

le satisface solamente un punto D que es el de intersección de estas dos rectas. Es fácil calcular que las coordenadas de este punto serán $x=y=3/2$. En otras palabras, un solo número complejo $z=3/2+3/2i$ satisface la condición del problema.

A menudo es conveniente escribir los números complejos, distintos de cero, de otra manera, llamada forma *trigonométrica*.

Ante todo, introduzcamos para estos números el concepto de argumento: *argumento de un número $z=a+bi\neq0$ se llama a cualesquiera de los números φ que son la solución de un sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \operatorname{sen}\varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Para el número $z=0$ el argumento no se determina.

Se sabe de Trigonometría que este sistema de ecuaciones tiene un conjunto infinito de soluciones; además, si φ es una de sus soluciones, todas las demás soluciones se deducen de la primera según la fórmula:

$$\varphi=\varphi_0+2k\pi,\ k \text{ es un número entero cualquiera.} \tag{3}$$

De esa manera, cualquier número complejo $z\neq0$ tiene una cantidad infinita de argumentos y todos ellos pueden ser obtenidos de uno solo, según la fórmula señalada (3).

Notemos que entre los argumentos del número complejo z siempre hay *uno* que satisface las desigualdades $0\leqslant\varphi<2\pi$; a veces, a este valor de φ se le denomina argumento del número z. No obstante, esta limitación resulta a menudo incómoda. Vamos a seguir la definición arriba expuesta aplicando el término "*el valor principal del argumento*" para el valor de φ en el intervalo de 0 a 2π. En correspondencia con esto, a continuación, siempre que sea necesario hallar un argumento de cualquier número complejo z, nos limitamos a buscar uno de sus argumentos (no es obligatorio que sea el principal). Este argumento incógnito se designa frecuentemente por el símbolo $\arg z$.

El argumento de un número complejo z adquiere el siguiente sentido geométrico. Si consideramos al número complejo $z=a+bi\neq0$ como el vector $\overrightarrow{OM}$, el valor principal del argumento del número z será un ángulo φ, al cual hace falta girar en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj el semieje positivo Ox hasta que coincida con el vector $\overrightarrow{OM}$ (fig. 10). El argumento del número considerado z [1] es una magnitud de cualquier ángulo que difiere de éste en un número entero de ángulos completos.

11. *¿Dónde se encuentran los puntos que satisfacen la condición* $\arg z=\pi/3$?

---

[1] Se ve de esta interpretación geométrica que es imposible introducir, de un modo racional, el argumento del número $z=0$. Precisamente por eso no lo hacemos.

Todos los puntos que se encuentran en el radio saliente del origen de las coordenadas bajo el ángulo $\pi/3$ respecto al eje Ox, satisfacen esta condición. Conviene subrayar, que no toda la recta sino que un solo rayo, sin su origen, satisface esta condición (¿Por qué?).

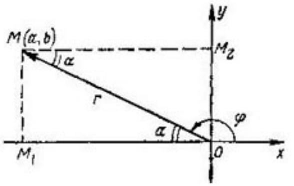


Fig. 10

Ahora, sea $z = a + bi \neq 0$ un número complejo. Designando por r su módulo, calculado según la fórmula (1), y por φ uno de sus argumentos, podremos escribir este número en la forma

$$z = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi). \tag{4}$$

El segundo miembro de esta igualdad es *la forma trigonométrica* del número z. La forma trigonométrica del número $z=0$ no se determina.

La forma trigonométrica de los números complejos está ligada estrechamente con su interpretación geométrica: naturalmente, la fórmula (4) se deduce de las consideraciones geométricas (fig. 10).

Cuando nosotros definimos el módulo y el argumento del número complejo, su forma trigonométrica (4) se dedujo automáticamente. A menudo unos proceden de otro modo. Precisamente, el módulo y el argumento de un número complejo se introducen partiendo de las consideraciones geométricas, y luego se demuestra la fórmula (4). Prestemos atención a que esta fórmula se deduce, en este libro de texto, valiéndose del dibujo en el cual el punto $M(a, b)$ se encuentra en el primer cuadrante. Sin embargo, esta fórmula es válida para cualquier situación del punto M; el estudiante tiene que saber demostrar su validez en cada caso.

Por ejemplo, el punto $M(a, b)$ se encuentra en el segundo cuadrante, según se señala en la fig. 10. En este caso $OM_1 = r\cos\alpha$, $OM_2 = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$ y $\alpha = \pi - \varphi$. Ya que para los puntos del segundo cuadrante $a<0$ y $b>0$, entonces $OM_1 = -a$, $OM_2 = b$ y, por consiguiente,

$$-a = r\cos\alpha = r\cos(\pi-\varphi) = -r\cos\varphi,$$
$$b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha = r\,\mathrm{sen}\,(\pi-\varphi) = r\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

es decir,

$$a+bi = r\cos\varphi + ir\,\mathrm{sen}\,\varphi = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi);$$

la fórmula es válida si el punto M se encuentra en el segundo cuadrante. Es fácil ver, por lo demás, que no hay necesidad de revisar los cuadrantes: las fórmulas $a=r\cos\varphi$ y $b=r\operatorname{sen}\varphi$ pueden ser deducidas directamente de las definiciones del coseno y del seno del ángulo φ, de donde se deduce inmediatamente la validez de la fórmula (4) en cualquier posición del punto M.

Las fórmulas

$$a=r\cos\varphi,$$
$$b=r\operatorname{sen}\varphi$$

son las fórmulas de transición de la forma trigonométrica de un número complejo a la algebraica, porque sabiendo r y φ, es fácil hallar a y b.

Con más frecuencia se necesita resolver el problema inverso: sabiendo a y b hay que hallar r y φ. El módulo r se determina (véase la fórmula (1)) fácilmente: $r=\sqrt{a^2+b^2}$. Sin embargo, al determi-

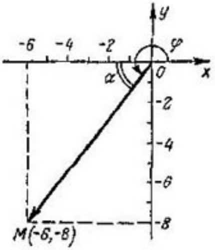


Fig. 11

nar el argumento φ se cometen muchos errores. El más típico de éstos es el siguiente: del sistema (2) es claro que $\operatorname{tg}\varphi=b/a$; de ahí se deduce que $\varphi=\operatorname{arc\,tg} b/a$. En realidad, aunque $\operatorname{tg}\varphi=b/a$, no se deduce de ahí que $\varphi=\operatorname{arc\,tg} b/a$. A fin de determinar correctamente el argumento del número complejo z, es necesario saber en qué cuadrante se encuentra el punto z, para lo cual será mejor valerse cada vez de la interpretación geométrica del número complejo del mismo modo cómo se hace en el ejemplo que sigue.

12. *Hallar la forma trigonométrica del número complejo* $z=-6-8i$.

Está claro que $|z|=10$ y $\operatorname{tg}\varphi=b/a=4/3$. Como se ve en la fig. 11, $\arg z=\pi+\alpha$, donde α es un ángulo agudo tal que $\operatorname{tg}\alpha=4/3$. Por eso $\alpha=\operatorname{arc\,tg} 4/3$, o sea, $\varphi=\pi+\operatorname{arc\,tg} 4/3$, por razón de que la forma trigonométrica tiene un aspecto:

$$z=-6-8i=10(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi),\quad \varphi=\pi+\operatorname{arc\,tg} 4/3.$$

Notemos que el concepto de la forma trigonométrica de un número complejo, distinto de cero, está definido con *absoluta exactitud*:

precisamente, esta es la anotación del número complejo $z \neq 0$ en la forma de

$$z = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$

donde r, que es el módulo del número z, es número positivo, y el coseno y el seno se toman del mismo ángulo φ, que es el argumento del número z; entre ellos está obligatoriamente el signo $+$. Por ejemplo, veamos los siguientes números complejos:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right),$$
$$z_3 = \cos\frac{\alpha}{2} - i\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}, \qquad z_4 = \mathrm{sen}\ 30^\circ + i\cos 30^\circ$$

que no son escritos en forma trigonométrica. La forma trigonométrica de estos números complejos serán formas de su anotación, que a continuación se dan:

$$z_1 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{7\pi}{4};$$
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4}{3}\pi\right);$$
$$z_3 = \cos\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right);$$
$$z_4 = \cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen}\,60^\circ.$$

Las cuestiones expuestas se plantean a menudo en forma de problemas; además de esto, una serie de propiedades esenciales de los números complejos, que son muy útiles, se deducen al analizar las operaciones con números complejos en forma trigonométrica.

Propiamente dicho, no hay dificultades en las reglas de multiplicación y división de los números complejos, escritos en forma trigonométrica; solamente se aplican las fórmulas que son bien sabidas de la Trigonometría. Por eso recomendamos familiarizarse con estas reglas.

De estas reglas se deducen, particularmente, las propiedades de los módulos de los números complejos que siguen:

I. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

II. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Estas propiedades se aplican con bastante frecuencia para resolver muchos problemas. Además, resulta muy útil la fórmula que sigue:

III. $|z^n| = |z|^n$, *donde n es un número entero cualquiera*. Se obtiene para cualquier número entero $n \neq 0$ como resultado de las propiedades I y II con ayuda de la inducción matemática (véase el § 3). Para $n = 0$ la validez de la propiedad III se deduce de la **definición** de uso general: *cada número complejo, distinto de cero, en la potencia cero es igual a* 1.

En definitiva, son válidas dos fórmulas más que expresan las propiedades del módulo de suma y diferencia:

IV. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

V. $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$.

Para demostrar la propiedad IV supongamos que

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2).$$

Entonces, aplicando la fórmula (1), tenemos:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |(r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2) + i (r_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + r_2 \operatorname{sen} \varphi_2)| = \\ &= \sqrt{(r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2)^2 + (r_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + r_2 \operatorname{sen} \varphi_2)^2} = \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que $\cos (\varphi_1 - \varphi_2) \leqslant 1$, entonces obtendremos

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)} \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2} = r_1 + r_2 = |z_1| + |z_2|. \end{aligned}$$

La propiedad V se demuestra análogamente [1]:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)} \geqslant \\ &\geqslant \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2} = |r_1 - r_2| = ||z_1| - |z_2||. \end{aligned}$$

Resulta interesante señalar la interpretación geométrica de las propiedades IV y V. Sea el vector $\overrightarrow{OM_1}$ un número z_1 y el vector $\overrightarrow{OM_2}$, un número z_2 (fig. 7). Entonces el vector $\overrightarrow{OM_3}$ representa la suma $z_1 + z_2$. La propiedad IV significa que la longitud de la diagonal OM_3 del paralelogramo $OM_1M_3M_2$ no es mayor que la suma de las longitudes de sus lados OM_1 y OM_2. La propiedad V significa que la longitud de la diagonal M_1M_2 no es menor que el valor absoluto de diferencia de los lados OM_1 y OM_2.

Subrayemos que las propiedades análogas a las fórmulas I — —V ya se han formulado en el párrafo anterior para el valor absoluto de los números reales. Está claro que el módulo de cualquier número real, considerado como un caso particular de los números complejos, coincide con el valor absoluto de este número real. Por lo tanto, las propiedades I — V recién indicadas son una generalización de las propiedades del valor absoluto. Pero sus demostraciones se hacen de una manera absolutamente distinta.

[1] La propiedad V se puede deducir también de la propiedad IV. Efectivamente, la igualdad $z_2 = z_1 + (z_2 - z_1)$ es evidente. De ahí se sigue que $|z_2| = |z_1 + (z_2 - z_1)| \leqslant \leqslant |z_1| + |z_2 - z_1|$, es decir, $|z_2 - z_1| \geqslant |z_2| - |z_1|$. De la igualdad $z_1 = z_2 + (z_1 - z_2)$ obtenemos a la vez que $|z_1| = |z_2 + (z_1 - z_2)| \leqslant |z_2| + |z_1 - z_2|$, o sea, $|z_1 - z_2| \geqslant \geqslant |z_1| - |z_2|$. La propiedad V resulta como la unión de dos desigualdades obtenidas en una sola fórmula.

Recordemos una definición más referente a la teoría de los números complejos, que es la **definición** del número conjugado. *Al número conjugado con el número complejo $a+bi$ se le llama número complejo $a-bi$.* El número conjugado con el número complejo z se disigna por el símbolo $\bar{z}$.

Es del todo evidente que $(\bar{\bar{z}})=z$, es decir, no sólo el número $\bar{z}$ está conjugado con el número z, sino también z está conjugado con $\bar{z}$. Por esta razón los números z y $\bar{z}$ se denominan *conjugados recíprocamente*.

Es útil guardar en la memoria las siguientes dos propiedades de los números conjugados:

I. $z\bar{z}=|z|^2$,

II. $|\bar{z}|=|z|$;

éstas se obtienen directamente de las definiciones.

Ahora pasemos a examinar varios problemas.

13. *¿Dónde se encuentran los números complejos $z=a+bi$ para los cuales*

$$\log_{1/2}|z-2|>\log_{1/2}|z|?$$

Hay que señalar, ante todo, que el primer miembro de nuestra desigualdad tiene sentido para todos los números complejos z, excepto $z=2$, y el segundo miembro, para todos los números $z\neq 0$. Por eso, las expresiones que forman nuestra desigualdad tienen sentido simultáneo para todos los números complejos z, excepto $z=0$ y $z=2$. Precisamente entre estos números hay que hallar la solución de la desigualdad.

Según las propiedades de los logaritmos (véase el § 6), para todos estos números nuestra desigualdad es equivalente a la siguiente: $|z-2|<|z|$.

Sabemos (véase el ejemplo 9 dado anteriormente) que a la igualdad $|z-2|=|z|$ le satisfacen todos los números complejos que se hallan en la recta l, paralela al eje Oy, que pasa por el punto A (1, 0), ya que todos los puntos de esta recta son equidistantes de dos puntos $O(0, 0)$ y $B(2, 0)$. Pero, nos hace falta hallar en el plano todos aquellos puntos que están más próximos al punto $B(2, 0)$ que al punto $O(0, 0)$.

Claro es que éstos serán los puntos del plano que se encuentran por el mismo lado de la recta l donde está el punto B. De tal modo, todos los puntos del semiplano situados *a la derecha* de la recta l satisfacen la condición $|z-2|<|z|$ (fig. 12); los puntos de la misma recta l se anulan.

Ahora recordemos que para obtener la solución del problema planteado es necesario eliminar el punto $B(2, 0)$ de este semiplano situado a la derecha de la recta l.

Pues, la condición del problema la satisfacen todos los puntos del plano que se encuentran a la derecha de la recta paralela al eje Oy y la que pasa por el punto (1, 0), excepto el punto (2, 0).

14. *Sea $z \neq -1$ un número complejo. Demostrar que:*

a) *si $|z| = 1$, el número $\frac{z-1}{z+1}$ es puramente imaginario;*

b) *si el número $\frac{z-1}{z+1}$ es puramente imaginario, $|z| = 1$.*

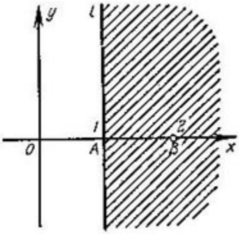


Fig. 12

Sean $z = a + bi$ y $z \neq -1$. Entonces es claro que $z + 1 \neq 0$ y la expresión $\frac{z-1}{z+1}$ tiene sentido.

El número $\frac{z-1}{z+1}$ es el cociente de la división de dos números complejos, por cuya razón su forma algebraica será:

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(a-1)+bi}{(a+1)+bi} = \frac{[(a-1)+bi][(a+1)-bi]}{(a+1)^2+b^2} =$$

$$= \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} + i\,\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}.$$

De aquí se deduce que si $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$, entonces $a^2 + b^2 - 1 = 0$, es decir, el número $\frac{z-1}{z+1}$ es puramente imaginario [1] y con ello la afirmación a) queda demostrada.

Demostremos la afirmación b). Sea $\frac{z-1}{z+1}$ un número puramente imaginario. Entonces $\frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} = 0$, de donde $a^2 + b^2 - 1 = 0$, es decir, $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ y con ello la afirmación b) queda demostrada.

15. *Hallar el argumento de un número complejo $z_1 = z^2 - z$,* si $z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$.

---

[1] Presten atención a que para $z = 1$, o sea, para $a = 1$, $b = 0$, el número $\frac{z-1}{z+1}$ es igual a cero. Recordemos que, según la definición expuesta arriba, el número 0 es puramente imaginario.

Unos cálculos sencillos muestran que

$$\begin{aligned} z_1 &= (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^2 - (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi + 2i\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi = \\ &= (\cos 2\varphi - \cos\varphi) + i(\operatorname{sen} 2\varphi - \operatorname{sen}\varphi) = \\ &= 2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\left[-\operatorname{sen}\frac{3\varphi}{2} + i\cos\frac{3\varphi}{2}\right]. \end{aligned}$$

De tal manera,

$$|z_1| = \sqrt{4\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}\left(\operatorname{sen}^2\frac{3\varphi}{2} + \cos^2\frac{3\varphi}{2}\right)} = 2\left|\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right|.$$

En correspondencia con la definición del valor absoluto tenemos que considerar tres casos:

a) Si $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = 0$, es decir, $\varphi = 2k\pi$, donde k es un número entero cualquiera, entonces $|z_1| = 0$ y por eso también $z_1 = 0$. De esta manera, para $\varphi = 2k\pi$ (k es un número entero cualquiera) el argumento del número z_1 queda indeterminado.

b) Si $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} > 0$, lo que tiene lugar para $2k\pi < \frac{\varphi}{2} < (2k+1)\pi$, o sea, cuando

$$4k\pi < \varphi < (4k+2)\pi, \tag{5}$$

k es un número entero cualquiera, entonces $|z_1| = 2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$, de donde se sigue que la forma trigonométrica del número complejo z_1 será la siguiente:

$$z_1 = 2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\left[\cos\frac{\pi+3\varphi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi+3\varphi}{2}\right].$$

Por consiguiente, si φ satisface la condición (5), entonces

$$\arg z_1 = \frac{\pi+3\varphi}{2}.$$

c) Si $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} < 0$, es decir,

$$(4k+2)\pi < \varphi < (4k+4)\pi, \tag{6}$$

k es un número entero cualquiera, entonces $|z_1| = -2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$, de donde se deduce que la forma trigonométrica del número complejo z_1 será la siguiente:

$$z_1 = -2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\left[\cos\frac{3\pi+3\varphi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi+3\varphi}{2}\right].$$

Por consiguiente, si φ satisface la condición (6), entonces

$$\arg z_1 = \frac{3\pi+3\varphi}{3}.$$

Es curioso dar una interpretación geométrica de la solución que presentaremos sólo en el caso de $0<\varphi<\pi$. El número $z_1=z^2-z=$ $=z^2+(-z)$ es una suma de dos números complejos

$$z^2=\cos 2\varphi+i\operatorname{sen} 2\varphi$$

y

$$-z=-\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi=\cos(\pi+\varphi)+i\operatorname{sen}(\pi+\varphi),$$

cuyos módulos son iguales a 1. Para determinar su suma hay que hallar la diagonal del paralelogramo construido a base de los vectores $\overrightarrow{OM_1}$ y $\overrightarrow{OM_2}$ que representan respectivamente los números

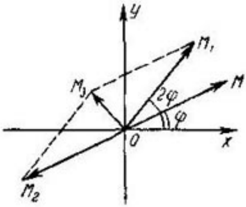


Fig. 13

z^2 y $-z$ (fig. 13). Pues, este paralelogramo es un rombo. Por consiguiente, la diagonal incógnita OM_3 es la bisectriz del ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OM_1}$ y $\overrightarrow{OM_2}$ por razón de que el ángulo, que forma el vector $\overrightarrow{OM_3}$ con la dirección positiva del eje Ox, es una semisuma de ángulos formados por los vectores $\overrightarrow{OM_1}$ y $\overrightarrow{OM_2}$ con esta dirección, o sea,

$$\arg z_1=\arg(z^2-z)=\frac{2\varphi+\pi+\varphi}{2}=\frac{\pi+3\varphi}{2}.$$

16. *Hallar la forma trigonométrica del número complejo*

$$z=1+i\operatorname{tg}\alpha,$$

donde $-\pi<\alpha<\pi$, $\alpha\neq\pm\pi/2$.

Es natural escribir el número dado en la forma

$$z=1+i\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha).$$

Este es el momento cuando muchos estudiantes cometen un error grave al afirmar que esta es precisamente la forma trigonométrica del número dado. Sin embargo, esto es correcto sólo cuando $1/\cos\alpha>0$, es decir, cuando $-\pi/2<\alpha<\pi/2$ (según la condición se analizan los valores de α sólo en el intervalo de $-\pi$ a $+\pi$). Si $1/\cos\alpha<0$, que tiene lugar para $-\pi < \alpha < -\pi/2$ y para $\pi/2 < \alpha < \pi$, entonces, presentemos la igualdad escrita anteriormente en la forma:

$$z = -\frac{1}{\cos\alpha}(-\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha) = -\frac{1}{\cos\alpha}[\cos(\pi+\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\pi+\alpha)].$$

La última expresión es precisamente la forma trigonométrica del número z para $-\pi < \alpha < -\pi/2$ y para $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Este problema se puede resolver también valiéndose de la regla general para hallar la forma trigonométrica; con este fin hay que hallar el módulo y el argumento del número z. El módulo de este número se halla según la fórmula (1):

$$r = |z| = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{1}{|\cos\alpha|},$$

y el argumento es cualquier solución del sistema (véase (2)):

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= |\cos\alpha|, \\ \mathrm{sen}\,\varphi &= \mathrm{tg}\,\alpha\cdot|\cos\alpha|. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Para la solución de este sistema necesitamos examinar dos casos:

a) $\cos\alpha > 0$, o sea, α se encuentra en el intervalo $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. En este caso $|\cos\alpha| = \cos\alpha$, y el sistema (7) toma un aspecto

$$\left\{\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos\alpha, \\ \mathrm{sen}\,\varphi &= \mathrm{sen}\,\alpha. \end{aligned}\right.$$

Es evidente que una de las soluciones de este sistema es $\varphi = \alpha$ y, por consiguiente, para $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ la forma trigonométrica será:

$$z = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha).$$

b) $\cos\alpha < 0$, o sea, α se encuentra en el intervalo $-\pi < \alpha < -\pi/2$, o bien, en el intervalo $\pi/2 < \alpha < \pi$. En este caso $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$, y el sistema (7) toma la forma

$$\left\{\begin{aligned} \cos\varphi &= -\cos\alpha, \\ \mathrm{sen}\,\varphi &= -\mathrm{sen}\,\alpha, \end{aligned}\right. \quad \text{o bien,} \quad \left\{\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos(\pi+\alpha), \\ \mathrm{sen}\,\varphi &= \mathrm{sen}(\pi+\alpha). \end{aligned}\right.$$

Su solución será, en particular, $\varphi = \pi + \alpha$. Por consiguiente, para $-\pi < \alpha < -\pi/2$ y para $\pi/2 < \alpha < \pi$ la forma trigonométrica será:

$$z = \frac{1}{|\cos\alpha|}[\cos(\pi+\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\pi+\alpha)].$$

17. *Hallar las soluciones completas de la ecuación* $(1-i)^x = 2^x$.

Supongamos que un número entero k es la solución de esta ecuación. Entonces, de la igualdad de los números complejos $(1-i)^k = 2^k$ se deduce la igualdad de sus módulos, es decir, $|(1-i)^k| = 2^k$.

Tomando en consideración que $|1-i|=\sqrt{2}$, según la propiedad del módulo, tenemos

$$|(1-i)^k|=|1-i|^k=(\sqrt{2})^k=2^{\frac{k}{2}}.$$

En efecto, si k es la solución de la ecuación inicial, entonces $2^{k/2}=2^k$, lo que es posible sólo cuando $k=0$.

Ahora vamos a comprobar mediante una sustitución, si el número 0 es la solución de la ecuación inicial. Recordando que el número complejo, distinto de cero, en la potencia cero es igual a 1, según la definición, deducimos que $x=0$ es la raíz de la ecuación inicial.

18. *Hallar todos los números complejos z, para cada número real $a\geqslant 0$, que satisfagan la igualdad*

$$|z|^2-2iz+2a(1+i)=0.$$

Representemos el número z en la forma algebraica: $z=x+iy$. Entonces $|z|^2=x^2+y^2$, y la ecuación tomará la forma

$$x^2+y^2-2ix+2y+2a+2ai=0.$$

Si los términos real e imaginario los igualamos a cero, obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y+2a=0, \\ -2x+2a=0. \end{cases}$$

De ahí se deduce que $x=a$, y para la determinación de y tenemos una ecuación de segundo grado

$$y^2+2y+a^2+2a=0$$

con el parámetro a. Hallemos las raíces *reales* de esta ecuación.

Según se sabe, las raíces de una ecuación de segundo grado son reales si su discriminante no es negativo; por eso nuestra ecuación lleva raíces reales sólo para tales valores de a para los cuales $D=1-a^2-2a\geqslant 0$. Para estos valores de a obtenemos

$$y_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-a^2-2a}.$$

De tal modo, si el número a satisface la desigualdad $1-a^2-2a\geqslant 0$, la ecuación inicial tiene dos soluciones

$$z_{1,2}=a+(-1\pm\sqrt{1-a^2-2a})\,i.$$

(Para $1-a^2-2a=0$ estas dos soluciones coinciden, es decir, hablando en rigor, para los valores correspondientes de a, hay una sola solución.) Para todos los demás valores de a la ecuación inicial no tiene soluciones.

Nos queda por señalar los límites de variación de a para los cuales existen soluciones. Según la condición $a\geqslant 0$; además de esto, hemos obtenido que a ha de satisfacer la condición de la desigualdad

$1-a^2-2a \geqslant 0$, o bien, $a^2+2a-1 \leqslant 0$, que es lo mismo. La solución de la última desigualdad es el intervalo $-1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1+\sqrt{2}$; escogiendo de este intervalo los números $a \geqslant 0$, obtenemos $0 \leqslant a \leqslant -1+\sqrt{2}$.

La solución definitiva puede ser escrita en la forma siguiente:

para $0 \leqslant a < -1+\sqrt{2}$ $\quad z_{1,2} = a + (-1 \pm \sqrt{1-a^2-2a})\, i$,

para $a = -1+\sqrt{2}$ $\quad z = -1+\sqrt{2} - i$,

para $a > -1+\sqrt{2}$ $\quad$ no hay soluciones.

19. *Resolver en números complejos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} z^{13}w^{19} = 1, \\ z^5 w^7 = 1, \\ z^2 + w^2 = -2. \end{cases}$$

No debe ser motivo de asombro el hecho de que en el sistema dado hay tres ecuaciones y solamente dos números incógnitos: pero, no hay nada de particular en lo que *dos* números incógnitos satisfagan *tres* condiciones.

Para resolver este problema vamos a recurrir a un método más natural, que se aplica más frecuentemente: vamos a deducir de este sistema diferentes corolarios y los resultados obtenidos les comprobaremos mediante sustitución, si satisfacen al sistema inicial o son extraños al mismo.

Al elevar al cubo ambos miembros de la segunda ecuación y al dividir el resultado por la primera ecuación, obtenemos que $z^2w^2 = 1$. Pues, de aquí se deduce que $z^6w^6 = 1$ y, al dividir esta igualdad por la segunda ecuación, obtenemos $z = w$. Ahora, de la tercera ecuación se deduce que $w^2 = -1$, de donde $w_1 = i$, $w_2 = -i$, es decir, $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

Aún es necesario hacer una comprobación. Esta se efectúa inmediatamente y resulta que ambos pares obtenidos son las soluciones del sistema inicial.

Respecto a esta solución puede, naturalmente, surgir la pregunta: ¿cómo nos ha ocurrido combinar la ecuación precisamente de este modo y cómo hemos llegado con tanta rapidez a la solución? A tal pregunta se puede contestar así. Primero, se puede resolver el sistema propuesto más brevemente (elevando la segunda ecuación a la octava potencia y dividiendo el resultado por la primera ecuación elevada al cuadrado, obtenemos directamente que $z = w$). Segundo, la brevedad no es una condición necesaria para la solución. Se podria solucionar este sistema al recurrir a un procedimiento habitual: eliminando una de las incógnitas.

Por ejemplo, es muy natural la siguiente solución. Elevando la primera ecuación a la quinta potencia y dividiendo el resultado por la segunda ecuación elevada a potencia 13, obtenemos que

$$w^4 = 1.$$

No conviene darse prisa para extraer la raíz o resolver la ecuación $w^4 - 1 = 0$: en este caso obtenemos cuatro valores distintos para w y, hallando los valores de z correspondientes a cada valor de w, llegamos a un gran número de pares diferentes de w, z, entre los cuales hay que buscar soluciones mediante la comprobación. Es más fácil elevar la primera ecuación del sistema a la séptima potencia, y la segunda, a potencia 19 dividiendo la segunda por la primera; entonces obtenemos que

$$z^4 = 1.$$

Después de esto se puede escribir la primera ecuación en la forma $zw^3 = 1$, de donde $z = 1/w^3$, o sea, $z = w$ (tengan en cuenta que ¡$w^4 = 1$!). Luego la solución va terminando así mismo como la hemos realizado anteriormente.

20. *Resolver en números complejos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} z^3 + \overline{w}^7 = 0, \\ z^5 \cdot w^{11} = 1. \end{cases}$$

Así, como en el ejemplo anterior, para resolver este sistema vamos a deducir diferentes corolarios. De la primera ecuación tenemos $z^3 = -\overline{w}^7$; de la segunda, $z^5 = 1/w^{11}$. De ambas obtenemos, respectivamente, $z^{15} = -\overline{w}^{35}$ y $z^{15} = 1/w^{33}$, por consiguiente, $-\overline{w}^{35} = 1/w^{33}$, o sea, $w^{33}\overline{w}^{35} = -1$.

De esta igualdad se desprende que $|w^{33}\overline{w}^{35}| = 1$. Basándonos en las propiedades de los módulos y los números conjugados, obtenemos $|w^{33}\overline{w}^{35}| = |w|^{33}\cdot|\overline{w}|^{35} = |w|^{68} = 1$, así que $w = 1$. Volviendo a la ecuación $w^{33}\overline{w}^{35} = -1$ escribamos su primer miembro: $(w^{33}\overline{w}^{33})\overline{w}^2 = (w\overline{w})^{33}\overline{w}^2 = (|w|^2)^{33}\overline{w}^2 = \overline{w}^2$ (aquí hemos utilizado una propiedad más de los números recíprocamente conjugados). De esta manera, hemos llegado a la ecuación $\overline{w}^2 = -1$, es decir, $\overline{w}_1 = i$, $\overline{w}_2 = -i$, de donde $w_1 = -i$, $w_2 = i$.

Ahora calculamos los valores correspondientes de z. Si $w = -i$, entonces, al tomar la primera ecuación del sistema inicial, hallamos que

$$z^3 = -i^7 = i,$$

y tomando la segunda ecuación, obtenemos que

$$z^5 = \frac{1}{(-i)^{11}} = \frac{1}{i} = -i.$$

Dividiendo la segunda igualdad obtenida por la primera tenemos $z^2 = -1$ y, como $z^3 = i$, entonces $z = -i$. En forma análoga hallamos que $z = i$ en el caso de que $w = i$.

Teniendo presente que durante la solución hemos considerado no el sistema inicial sino sus corolarios, es necesario verificar si los valores hallados de las incógnitas satisfacen realmente el sistema mencionado. Esto se verifica por una sustitución directa que nos convence de que el sistema propuesto tiene dos soluciones:

$$z_1 = -i,\ w_1 = -i \quad \text{y} \quad z_2 = i,\ w_2 = i.$$

EJERCICIOS:

1. Sea $|z| = 5$. ¿Dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos: a) $-4z$; b) $2-z$; c) $-1+3z$?

Señalar dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos z para los cuales:

2. $|z| < 1$.
3. $|z| \geqslant 2$.
4. $1 \leqslant |z| < 2$.
5. $|z| < \left|\frac{z}{2}\right| + 1$.
6. $|z+1| = 3$. **7.** $|i-z| < 1$.
8. $|z+1-2i| = \sqrt{i}$. **9.** $|i-1-2z| > 9$.
10. $2 \leqslant |z+i| \leqslant 3$. **11.** $|z| = \left|z+\frac{1}{3i}\right|$.
12. $|z-1| = |z+1| = |z-i\sqrt{3}|$.
13. $|z|-2 = |z-i| - |z+5i| = 0$.
14. $|z-i\sqrt{2}| - |z+4| = |z| - 1 = 0$.
15. $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$.
16. $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 5$.

17. Hallar el número complejo z que satisface simultáneamente dos igualdades

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

18. Se proponen dos números complejos z_1 y z_2. Hallar el número complejo que corresponde al centro del segmento entre z_1 y z_2.

19. Los vértices de un triángulo son los números complejos z_1, z_2, z_3. Hallar todos los números complejos z que completen este triángulo hasta un paralelogramo.

Representar en la forma trigonométrica los siguientes números:

20. $z = -\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ$. **21.** $z = 1 + \cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ$.
22. $z = -\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$.
23. $z = \operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha$.
24. $z = \operatorname{tg}\alpha - i$, $0 \leqslant \alpha < \pi$, $\alpha \neq \pi/2$.

Señalar dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos z para los cuales:

25. $\arg z = \pi/4$. **26.** $\arg z = -5\pi/6$.
27. $\pi/3 < \arg z \leqslant 3\pi/2$.
28. $\arg z = \pi$, $|z| < 1$.
29. $\begin{cases} |z-i| = 1, \\ \arg z = \pi/2. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 0 < \arg z < \pi/4, \\ |z-6i| = \sqrt{3}. \end{cases}$

31. Hallar un número que tenga argumento positivo mínimo, entre los números complejos z que satisfacen la condición $|z-25i| \leqslant 15$.

32. Hallar el argumento del número complejo $z_1 = z^2 + \bar{z}$ si $z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

33. Si los números complejos z_1 y z_2 son tales que su producto $z_1 \cdot z_2$ es un número real, entonces, ¿son éstos números complejos conjugados?

34. Si los números complejos z_1 y z_2 son tales que su suma $z_1 + z_2$ es un número real, entonces, ¿son éstos números complejos conjugados?

35. Demostrar que z_1 y z_2 son números complejos conjugados, si los números complejos z_1 y z_2, con el miembro imaginario distinto de cero son tales que su producto $z_1 \cdot z_2$ y su suma $z_1 + z_2$ son números reales.

36. Demostrar que se puede representar el número complejo $a + bi$, cuyo módulo es igual a 1 y $b \neq 0$, en la forma que sigue:

$$a + bi = \frac{c+i}{c-i},$$

donde c es un número real.

Resolver las ecuaciones:

37. $\bar{z} = z$. **38.** $\bar{z} = -z$. **39.** $\bar{z} = 2 - z$. **40.** $\bar{z} = -4z$.

41. $z^2 + \bar{z} = 0$. **42.** $z^2 + |z| = 0$.

43. ¿Para cuáles valores reales de x e y los números $-3 + ix^2y$ y $x^2 + y + 4i$ serán complejamente conjugados?

44. ¿Dónde se hallan los números complejos $z = a + bi$ para los cuales:

a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$;

b) $\log_{\sqrt{3}} \frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} < 2$?

45. Para cada número real $a \geqslant 1$ hallar todos los números complejos z que satisfacen la igualdad

$$z + a|z+1| + i = 0.$$

46. Para cada número real $a \geqslant 0$ hallar todos los números complejos z que satisfacen la igualdad

$$2|z| - 4az + 1 + ia = 0.$$

47. Resolver en números complejos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} z^3 + \omega^5 = 0, \\ z^2 \cdot \bar{\omega}^4 = 1. \end{cases}$$

§ 6. LOGARITMOS

Al estudiar las propiedades de los logaritmos es necesario prestar atención particular a todas sus propiedades que se derivan de las potencias correspondientes; por lo tanto, para conocer bien los logaritmos hay que obrar bien con las potencias. La relación es tan estrecha entre la logaritmación y la elevación de potencias que la definición de logaritmo se da mediante el concepto de la potencia.

Citemos la definición de logaritmo, dada por otro autor: "Llámase logaritmo de un número dado para una base dada al exponente a que debe elevarse esta base para obtener el número dado". De tal modo, el número x es un logaritmo del número N de base a, si $a^x = N$.

En esta definición hay un detalle muy esencial: "la base dada" no lleva impuestas limitaciones algunas, a fuerza de que, si seguimos esta definición estrictamente al pie de la letra (pues, *siempre* hay que seguir literalmente una definición), hemos de considerar, por ejemplo, que 3 es el logaritmo de -8 de base -2 (porque $(-2)^3=-8$), 2 es el logaritmo de 4 de base -2 (porque $(-2)^2=4$), etc. Pero en lo que se refiere a la base 1 la cosa resulta más confusa: cualquier número x es el logaritmo de 1 de base 1; efectivamente, $1^x=1$ para cualquier x [1].

Cualquier persona familiarizada con el curso escolar puede decir que todos los ejemplos citados arriba son absurdos porque tenemos que considerar sólo los logaritmos *de base positiva distinta de* 1. En efecto, tal concepto es aceptado para la escuela secundaria, pero es mucho mejor imponer esta limitación para la base *directamente* en la definición. De tal modo, *la definición* de logaritmo debe darse así:

Sea el número $a>0$ y $a\neq 1$. El número x se denomina logaritmo del número N de base a, si $a^x=N$.

Es probable que algunos lectores hayan advertido que ni una sola vez hemos escrito la igualdad $x=\log_a N$, sino que siempre decíamos: x es el logaritmo de N de base a. Esto se explica fácilmente, ya que hasta que no nos convenzamos de que ningún número tiene dos logaritmos diferentes para base dada, no estamos autorizados a utilizar el signo de igualdad. En realidad, supongamos por un momento que para un número N existen dos logaritmos de la misma base a, entonces, utilizando el signo de igualdad, podríamos escribir que $\alpha=\log_a N$ y $\beta=\log_a N$, de lo que resultaría que $\alpha=\beta$ [2].

Por esta razón, antes de que se introduzca la designación para el logaritmo hay que persuadirse de que *ningún número puede tener dos logaritmos diferentes para una misma base*. Efectivamente, si los números diferentes α y β son logaritmos del número N de base a, entonces, según la definición, se cumplen las igualdades

$$a^\alpha=N \quad \text{y} \quad a^\beta=N, \tag{*}$$

de donde $a^\alpha=a^\beta$. Por esto, según la propiedad de las potencias de base positiva distinta de 1, llegaríamos a la igualdad $\alpha=\beta$. En consecuencia, *el logaritmo* de un número N de base a es *único* y *se designa con el símbolo* $\log_a N$.

---

[1] Además, cualquier número positivo es el logaritmo de 0, de base 0, ya que $0^x=0$ para cualquier valor de $x>0$.

[2] Recordemos que una situación muy similar tuvo lugar cuando definimos la raíz cuadrada (§ 4). Allí introducimos también la definición sin el signo de igualdad y sólo más tarde se vio que la definición con la igualdad hubiera sido imposible, porque, al introducir la designación para la raíz cuadrada, tendríamos que demostrar seguidamente "las igualdades" del tipo $2=-2$ (ambos números habrían sido "iguales" a la raíz de 4, o sea, iguales entre sí). Precisamente por eso, la raíz cuadrada nunca tiene signo y existe solamente el radical $\sqrt{\ }$ para la raíz cuadrada positiva de un número positivo.

De tal modo, según la definición,

$$x=\log_a N, \quad \text{si} \quad a^x=N.$$

Por consiguiente, las igualdades $x=\log_a N$ y $a^x=N$ (al cumplir las limitaciones impuestas anteriormente en el número a) expresan con exactitud la misma relación entre los números x, a, N, escrita en el primer caso en "el lenguaje de los logaritmos" y en el segundo, en "el lenguaje de las potencias".

Es fácil demostrar que *los números negativos y cero de ninguna base a (claro está que $a>0$ y $a\neq 1$) no tienen logaritmos*. En realidad, si $N\leqslant 0$ y $x=\log_a N$, entonces $a^x=N\leqslant 0$, lo que contradice a la propiedad de las potencias de base positiva.

En cuanto a los números positivos, aceptamos *sin demostración* que *cada número positivo para cualquier base tiene un logaritmo*. Esta afirmación en la escuela secundaria es aceptada cómo cierta, aunque no es fácil establecer su validez (para esto sería necesario aplicar la teoría bien desarrollada de los números reales y la teoría de los límites).

Es natural que cada estudiante ha de saber no sólo las definiciones sino también *las propiedades de los logaritmos* y saber, desde luego, demostrarlas.

Señalemos, ante todo, la llamada *identidad logarítmica fundamental*

$$a^{\log_a N}=N,$$

que es válida para cualesquier N y a, para los cuales $a>0$, $a\neq 1$, $N>0$. Esta identidad se deduce inmediatamente de las igualdades(*).

Citemos a continuación las fórmulas que se aplican más frecuentemente para la solución de los problemas [1].

I. $\log_a MN=\log_a M+\log_a N \quad (M>0,\ N>0)$.

II. $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N \quad (M>0,\ N>0)$.

III. $\log_a N^\alpha=\alpha\log_a N \quad (N>0,\ \alpha$ es un número cualquiera).

IV. $\log_{a^\beta} N^\alpha=\frac{\alpha}{\beta}\log_a N \quad (N>0,\ \alpha\neq 0,\ \beta\neq 0)$.

V. $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b} \quad (N>0)$.

VI. $\log_b a\cdot\log_a b=1$.

Demostremos la igualdad I. Elevemos el número a a potencia con el exponente $\log_a M+\log_a N$. Según la propiedad de las potencias y la identidad logarítmica fundamental tenemos:

$$a^{\log_a M+\log_a N}=a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N}=MN.$$

[1] Recordemos una vez más que, según la definición del logaritmo, las bases consideradas son siempre positivas y distintas de 1.

La igualdad obtenida

$$a^{\log_a M+\log_a N}=MN$$

podemos escribirla "en el lenguaje de los logaritmos" así (véase (*)): $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$, lo que significa la validez de la fórmula I.

Así mismo se demuestra la fórmula II.

Para demostrar la igualdad III el número a elevémoslo a potencia cuyo exponente sea $\alpha \log_a N$ y utilicemos las propiedades de las potencias:

$$a^{\alpha \log_a N}=(a^{\log_a N})^{\alpha}=N^{\alpha}.$$

De ahí obtenemos, según la definición de los logaritmos, la igualdad que había que demostrar.

La igualdad IV se sigue de los cálculos:

$$(a^{\beta})^{\frac{\alpha}{\beta}\log_a N}=a^{\alpha \log_a N}=(a^{\log_a N})^{\alpha}=N^{\alpha}.$$

Es muy útil mencionar los siguientes dos casos particulares de la fórmula IV:

IVa. $\log_{a^{\beta}} N=\frac{1}{\beta}\log_a N \quad (N>0,\ \beta\neq 0)$.

IVb. $\log_{a^{\alpha}} N^{\alpha}=\log_a N \quad (N>0,\ \alpha\neq 0)$.

Para demostrar la igualdad V la anotaremos primeramente en la forma $\log_a N=\log_a b\cdot\log_b N$. La validez de esta igualdad la demostramos análogamente a la forma anterior:

$$a^{\log_a b\cdot\log_b N}=(a^{\log_a b})^{\log_b N}=b^{\log_b N}=N.$$

Se puede razonar también de otro modo. Al anotar la identidad logarítmica fundamental

$$b^{\log_b N}=N,$$

obtenemos la igualdad

$$\log_a(b^{\log_b N})=\log_a N$$

(¡los números iguales tienen iguales logaritmos!). Ahora, utilizando la propiedad III, nos convencemos de lo justo de la fórmula V.

La fórmula VI es el caso particular de la antecedente, la que resulta para $b=N$. Esta igualdad V se llama habitualmente *regla de transición a una nueva base.* Debido a esta igualdad no hay tablas de logaritmos para todas las bases: es suficiente tener sólo las tablas de logaritmos, por ejemplo, decimales. Efectivamente, sea necesario, por ejemplo, calcular $\log_5 13$. Valiéndose de la propiedad V podemos escribir: $\log_5 13=\frac{\lg 13}{\lg 5}$. Al hallar en las tablas $\lg 13\approx 1{,}1139$ y $\lg 5\approx 0{,}6990$ obtenemos que $\log_5 13\approx 1{,}5937$.

Citemos las propiedades de los logaritmos absolutamente necesarias para la solución de las desigualdades:

VII. *Si* $a>1$, *entonces de* $0<x_1<x_2$ *se deduce que* $\log_a x_1<\log_a x_2$, *y de* $\log_a x_1<\log_a x_2$ *se sigue que* $0<x_1<x_2$. En otras palabras, para $a>1$ las desigualdades $0<x_1<x_2$ y $\log_a x_1<\log_a x_2$ son equivalentes (véase el § 10).

VIII. *Si* $0<a<1$, *entonces de* $0<x_1<x_2$ *se deduce que* $\log_a x_1>$ $>\log_a x_2$, *y de* $\log_a x_1>\log_a x_2$ *se sigue que* $0<x_1<x_2$. Es decir, para $a<1$ las desigualdades $0<x_1<x_2$ y $\log_a x_1>\log_a x_2$ son equivalentes.

Estas dos propiedades se demuestran análogamente y por ello sólo demostremos la propiedad VIII.

Sea a un número positivo y menor que 1. Si se cumple la desigualdad $0<x_1<x_2$, entonces existen los números $\log_a x_1$ y $\log_a x_2$. Utilizando la identidad logarítmica fundamental, copiemos la desigualdad $x_1<x_2$ en la forma

$$a^{\log_a x_1}<a^{\log_a x_2}.$$

De ahí concluimos, en virtud de las propiedades de las potencias para una base menor que 1, que $\log_a x_1>\log_a x_2$.

Al contrario, si se cumple la desigualdad $\log_a x_1>\log_a x_2$, entonces ambos números x_1 y x_2 son positivos. Esto es lo primero. Segundo, elevando el número a, $0<a<1$, a potencia con los exponentes $\log_a x_1$ y $\log_a x_2$ obtenemos (una vez más en vigor de las propiedades de las potencias para una base menor que 1) la desigualdad

$$a^{\log_a x_1}<a^{\log_a x_2},$$

es decir $x_1<x_2$. Ya que, como ya hemos señalado, los números x_1 y x_2 son positivos, entonces $0<x_1<x_2$, lo que fue necesario demostrar.

De las propiedades demostradas en calidad de corolarios resultan las afirmaciones:

VIIa. Si $a>1$, las desigualdades $\log_a x<\alpha$ y $0<x<a^\alpha$ son equivalentes.

VIIb. Si $a>1$, las desigualdades $\log_a x>\alpha$ y $x>a^\alpha$ son equivalentes.

VIIIa. Si $0<a<1$, las desigualdades $\log_a x<\alpha$ y $x>a^\alpha$ son equivalentes.

VIIIb. Si $0<a<1$, las desigualdades $\log_a x>\alpha$ y $0<x<a^\alpha$ son equivalentes.

Para la demostración es suficiente señalar que $\alpha=\log_a a^\alpha$.

Se deduce con facilidad de estas afirmaciones que para una base mayor que 1, los logaritmos de los números mayores que 1 son positivos, y los logaritmos de los números menores que 1 (¡se entiende, claro está, que sean positivos!) son negativos; para una base menor que 1, resultan ser a la inversa.

Ahora vamos a resolver unos ejemplos referentes a la aplicación de las propiedades fundamentales de los logaritmos.

1. *Calcular* $\log_{3\sqrt{3}} 27$.

A base de la fórmula IV tenemos

$$\log_{3\sqrt{3}} 27 = \log_{3^{3/2}} 3^3 = \frac{3}{3/2}\log_3 3 = 2.$$

2. *Calcular* $2^{\log_{2\sqrt{2}} 15}$.

A base de la fórmula IVa tenemos

$$\log_{2\sqrt{2}} 15 = \log_{2^{3/2}} 15 = \frac{2}{3}\log_2 15.$$

Utilizando ahora la identidad logarítmica fundamental, obtenemos

$$2^{\log_{2\sqrt{2}} 15} = 2^{2/3 \log_2 15} = (2^{\log_2 15})^{2/3} = 15^{2/3} = \sqrt[3]{225}.$$

3. *Calcular* $\log_3 5\cdot\log_{25} 27$.

A base de la fórmula IV tenemos

$$\log_3 5\cdot\log_{25} 27 = \log_3 5\cdot\log_{5^2} 3^3 = \frac{3}{2}\log_3 5\cdot\log_5 3.$$

Ya que, según la fórmula VI, $\log_3 5\cdot\log_5 3 = 1$, entonces $\log_3 5 \times$ $\times \log_{25} 27 = 3/2$.

4. *Calcular* $(\sqrt[3]{9})^{\frac{1}{5\log_5 3}}$.

A base de la fórmula VI tenemos

$$\frac{1}{5\log_5 3} = \frac{1}{5}\log_3 5.$$

Luego nos queda sólo utilizar la identidad logarítmica fundamental y las propiedades de las potencias:

$$(\sqrt[3]{9})^{\frac{1}{5\log_5 3}} = (9^{1/3})^{\frac{1}{5}\log_3 5} = (3^{2/3})^{\frac{1}{5}\log_3 5} =$$
$$= (3^{\log_3 5})^{2/3\cdot 1/5} = 5^{2/15} = \sqrt[15]{25}.$$

5. *Calcular* $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^{2-\frac{\log_5 13}{2\log_5 9}}}$.

Utilizando sucesivamente las propiedades de los logaritmos y de las potencias, calculemos el radicando:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^{2-\frac{\log_5 13}{2\log_5 9}} = \frac{1}{27}\cdot(\sqrt{27})^{\frac{1}{2}\log_9 13} = \frac{1}{27}(3^{\log_3 13})^{3/8} = 3^{-3}\cdot 13^{3/8},$$

de donde resulta bien claro que el número dado es igual a $3^{-3/2}\cdot 13^{3/16}$.

6. *¿Cuál es mayor*: $\log_4 5$ *ó* $\log_{1/16}\frac{1}{25}$?

A base de la fórmula IVb tenemos

$$\log_{1/16}\frac{1}{25}=\log_{4^{-2}}5^{-2}=\log_4 5,$$

por lo tanto los dos números propuestos son iguales.

7. *Calcular* $\log_3 2\cdot\log_4 3\ \ldots\ \log_{10}9\cdot\log_{11}10$.

A base de la fórmula V tenemos

$$\log_3 2=\frac{\log_{11}2}{\log_{11}3};\quad \log_4 3=\frac{\log_{11}3}{\log_{11}4};\quad \ldots;\quad \log_{10}9=\frac{\log_{11}9}{\log_{11}10}.$$

De aquí se deduce que

$$\log_3 2\cdot\log_4 3\ldots\log_{11}10=\frac{\log_{11}2}{\log_{11}3}\cdot\frac{\log_{11}3}{\log_{11}4}\cdots\frac{\log_{11}9}{\log_{11}10}\cdot\log_{11}10=\log_{11}2.$$

8. *Demostrar que la relación de los logaritmos de dos números no depende de la base, es decir,*

$$\frac{\log_a N_1}{\log_a N_2}=\frac{\log_b N_1}{\log_b N_2}\quad (N_1>0,\ N_2>0,\ N_2\neq 1).$$

A base de la fórmula V tenemos

$$\frac{\log_a N_1}{\log_a N_2}=\log_{N_2}N_1\quad \text{y}\quad \frac{\log_b N_1}{\log_b N_2}=\log_{N_2}N_1,$$

de donde se ve que nuestra igualdad es justa.

9. *¿Cuál es mayor*: $\log_2 3$ *ó* $\log_{1/4}5$?

Ya que $\log_2 3>0$ y $\log_{1/4}5<0$, entonces $\log_2 3>\log_{1/4}5$.

10. *¿Cuál es mayor*: $\log_5 7$ *ó* $\log_8 3$?

Ya que $\log_5 7>1$ y $\log_8 3<1$, entonces $\log_5 7>\log_8 3$.

11. *Calcular* $\log_{ab}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, *si* $\log_{ab}a=4$.

A base de las propiedades de los logaritmos tenemos:

$$\log_{ab}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\frac{1}{3}\log_{ab}a-\frac{1}{2}\log_{ab}b=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\log_{ab}b.$$

Nos queda hallar el valor de $\log_{ab}b$. Ya que

$$1=\log_{ab}ab=\log_{ab}a+\log_{ab}b=4+\log_{ab}b,$$

entonces $\log_{ab}b=-3$, por razón de que

$$\log_{ab}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\cdot(-3)=\frac{17}{16}.$$

12. *Calcular* $\log_8 16$, *si* $\log_{12}27=a$.

Una cadena de transformaciones

$$\log_6 16 = 4\log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1+\log_2 3}$$

muestra que para calcular $\log_6 16$ es necesario saber a qué es igual $\log_2 3$. Lo hallamos de la condición $\log_{12} 27 = a$:

$$a = \log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1+2\log_3 2} =$$
$$= \frac{3}{1+\frac{2}{\log_2 3}} = \frac{3\log_2 3}{2+\log_2 3}, \text{ es decir, } \log_2 3 = \frac{2a}{3-a}$$

(notemos: es evidente que $a \neq 3$). En definitiva tenemos: $\log_6 16 = = \frac{4(2-a)}{3+a}$.

13. *Calcular* $\log_{25} 24$, *si* $\log_6 15 = \alpha$ y $\log_{12} 18 = \beta$.
Tenemos la siguiente igualdad:

$$\log_{25} 24 = \frac{1}{2}(\log_5 3 + 3\log_5 2) = \frac{3}{2}\log_5 2 + \frac{1}{2}\log_5 3,$$

la cual nos muestra que es necesario determinar $\log_5 2$ y $\log_5 3$. La igualdad $\log_6 15 = \alpha$ presenta:

$$\alpha = \log_6 15 = \log_6 3 + \log_6 5 = \frac{1}{1+\log_3 2} + \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3}$$

y la igualdad $\log_{12} 18 = \beta$ nos da:

$$\beta = \log_{12} 18 = \log_{12} 2 + 2\log_{12} 3 = \frac{1}{2+\log_2 3} + \frac{2}{1+2\log_3 2}.$$

Pasando a los logaritmos de base 5, según la fórmula V, obtenemos:

$$\alpha = \frac{1}{1+\log_3 2} + \frac{1}{\log_5 2+\log_5 3} = \frac{1}{1+\frac{\log_5 2}{\log_5 3}} + \frac{1}{\log_5 2+\log_5 3} = \frac{1+\log_5 3}{\log_5 2+\log_5 3};$$

$$\beta = \frac{1}{2+\log_2 3} + \frac{2}{1+2\log_3 2} = \frac{1}{2+\frac{\log_5 3}{\log_5 2}} + \frac{2}{1+2\frac{\log_5 2}{\log_5 3}} = \frac{\log_5 2+2\log_5 3}{\log_5 3+2\log_5 2}.$$

Las últimas dos igualdades pueden considerarse como un sistema de ecuaciones para determinar $\log_5 2$ y $\log_5 3$:

$$\begin{cases} \alpha\log_5 2 + (\alpha-1)\log_5 3 = 1, \\ (2\beta-1)\log_5 2 + (\beta-2)\log_5 3 = 0. \end{cases}$$

Si $\alpha(\beta-2)-(\alpha-1)(2\beta-1) = -\alpha-\alpha\beta+2\beta-1 \neq 0$ (véase el § 11) entonces este sistema tiene la solución:

$$\log_5 2 = \frac{2-\beta}{\alpha+\alpha\beta-2\beta+1}, \quad \log_5 3 = \frac{2\beta-1}{\alpha+\alpha\beta-2\beta+1}.$$

En definitiva obtenemos:

$$\log_{25} 24 = \frac{5-\beta}{2\alpha+2\alpha\beta-4\beta+2}.$$

Ahora comprobemos que la expresión $\alpha+\alpha\beta-2\beta+1$ es realmente distinta de cero. En efecto, tenemos que

$$\alpha+\alpha\beta-2\beta+1=\log_6 15+\log_6 15\cdot\log_{12}18-2\log_{12}18+1=(\log_6 15-\log_{12}18+1)+\log_{12}18\cdot(\log_6 15-1).$$

Aquí el segundo sumando es positivo porque $\log_{12}18>0$ y $\log_6 15>1$. En lo que se refiere al primer sumando podemos escribir, utilizando las propiedades de los logaritmos:

$\log_6 15>1$, $\log_{12}18<2$ y por eso $\log_6 15-\log_{12}18+1>0$.

Por lo tanto, la expresión $\alpha+\alpha\beta-2\beta+1$ es positiva.

Las propiedades de los logaritmos, en particular las I — VIII expuestas arriba, se usan ampliamente para solución de los problemas más variados, incluso la solución de ecuaciones y sistemas logarítmicos, de desigualdades logarítmicas, etc. Aquí examinemos unos ejemplos más sencillos dejando más complejos para los §§ 9 y 10.

14. *Resolver la ecuación* $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6$.

Permutando $x \lg 5$ al primer miembro de la ecuación y utilizando las propiedades de los logaritmos, obtenemos

$$x+\lg(1+2^x)-x\lg 5=x\lg 10-x\lg 5+\lg(1+2^x)=\lg 2^x(1+2^x).$$

Por consiguiente, la ecuación puede ser expresada así: $\lg 2^x(1+2^x)=\lg 6$, de donde se deduce que

$$(2^x)^2+2^x-6=0.$$

Designando $z=2^x$, llegamos a la ecuación cuadrática $z^2+z-6=0$, que tiene raíces $z_1=-3$, $z_2=2$. Ya que la igualdad $2^x=-3$ es inadmisible (porque 2^x para cualquier valor de x es positivo) queda para resolver la ecuación $2^x=2$. Esta ecuación tiene la raíz $x=1$ que es única para la ecuación inicial.

15. *Resolver la ecuación*

$$\log_a(ax)\cdot\log_x(ax)=\log_{a^2}\frac{1}{a},\ \text{donde } a>0,\ a\neq 1.$$

Es claro que las raíces han de satisfacer las condiciones $x>0$, $x\neq 1$. A base de las propiedades de los logaritmos transformemos las expresiones que figuran en la ecuación:

$$\log_x(ax)=1+\log_x a=1+\frac{1}{\log_a x}=\frac{\log_a x+1}{\log_a x};$$

$$\log_{a^2}\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}\log_a a=-\frac{1}{2};$$

$$\log_a(ax)=1+\log_a x.$$

Ahora podemos representar nuestra ecuación así:

$$\frac{(\log_a x+1)^2}{\log_a x}=-\frac{1}{2},$$

de donde $(\log_a x)^2+\frac{5}{2}\log_a x+1=0$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$x_1=\frac{1}{a^2};\quad x_2=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

16. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 5(\log_y x+\log_x y)=26, \\ xy=64. \end{cases}$$

Es evidente que ha de tener lugar: $x>0$, $y>0$, $x\neq 1$, $y\neq 1$. Designando $z=\log_x y$ y aplicando la fórmula VI, obtenemos que la primera ecuación de nuestro sistema se puede representar así: $5(z+1/z)=26$, de donde $z_1=5$, $z_2=\frac{1}{5}$. Es decir, hace falta hallar las soluciones del sistema inicial tanto entre las solucionse del sistema

$$\begin{cases} \log_x y=5, \\ xy=64, \end{cases}$$

como entre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \log_x y=1/5, \\ xy=64. \end{cases}$$

Resolviendo estos sistemas y eligiendo las soluciones que satisfagan las condiciones $x>0$, $x\neq 1$, $y>0$, $y\neq 1$, obtenemos el resultado: el sistema inicial tiene dos soluciones $x_1=2$, $y_1=32$, $x_2=32$, $y_2=2$.

17. *¿ Qué se puede decir del número x si se sabe que para cualquier número real* $a\,(a\neq 0)$

$$\log_x(a^2+1)<0?$$

Para cualquier valor de $a\neq 0$ el número $1+a^2>1$. Pero, a causa de que el logaritmo de un número mayor que 1 es negativo sólo cuando la base es menor que 1, entonces $x<1$. Luego, ya que los logaritmos se consideran sólo cuando su base es positiva, entonces $x>0$. De tal modo, en definitiva obtenemos que el número x, de que se trata en cuestión, se toma del intervalo $0<x<1$.

18. *Hallar todos los x tales que* $\log_{1/2}x>\log_{1/3}x$. Según la fórmula V tenemos que

$$\log_{1/3}x=\frac{\log_{1/2}x}{\log_{1/2}\frac{1}{3}}=\log_{1/3}\frac{1}{2}\cdot\log_{1/2}x.$$

Por eso se puede representar nuestra desigualdad así:

$$\log_{1/2} x \left(1-\log_{1/3} \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Puesto que $1-\log_{1/3}\frac{1}{2} > 0$, obtenemos de la última desigualdad: $\log_{1/2} x > 0$, de donde $x < 1$. Pero se tiene sentido considerar la desigualdad inicial sólo para $x > 0$. Por esta razón, todos los valores de x que satisfacen la desigualdad inicial, se encuentran dentro del intervalo $0 < x < 1$.

19. *Resolver la desigualdad* $\frac{1}{\log_a x} > 1$, $a > 1$.

La fracción $1/p$ es mayor que 1 cuando su denominador p está comprendido entre cero y 1. De esa manera nos hace falta hallar tales valores de x que sus logaritmos (de base $a > 1$) estén comprendidos entre cero y 1, es decir, que se satisfagan simultáneamente dos condiciones: $0 < \log_a x$ y $\log_a x < 1$. La primera significa que los valores de x han de ser mayores que 1 y la segunda, menores que a. Por consiguiente, el intervalo $1 < x < a$ es la solución de la desigualdad inicial.

Se puede analizar de otro modo. El primer miembro de la desigualdad propuesta tiene sentido sólo para los valores positivos de x, distintos de 1, y por eso se puede representar esta desigualdad en la forma $\log_x a > 1$. Dicha desigualdad es válida solamente para los valores de x, mayores que 1 (porque para $0 < x < 1$ tenemos $\log_x a < 0$ para $a > 1$), pero menores que a (porque para $x > a > 1$, según las propiedades de los logaritmos, tenemos $\log_x a < 1$).

En los ejemplos anteriores, las fórmulas I—VI se aplican eficazmente para las transformaciones de diferentes expresiones tanto de números concretos como dados por letras. Tales transformaciones se hacen necesarias, ante todo, para resolver ecuaciones y desigualdades.

Sin embargo, estas fórmulas son insuficientes para la solución de muchas ecuaciones y desigualdades. En primer lugar, esto se explica, porque las letras que figuran en las fórmulas han de satisfacer limitaciones muy grandes. Además, las fórmulas I—IV tienen imperfecciones aún más grandes: sus primeros y segundos miembros tienen sentido con *diferentes* limitaciones para los valores de las letras que entran en aquéllas.

Por ejemplo, la fórmula I, $\log_a MN$ tiene sentido, tanto en el caso cuando los números M y N son positivos, como en el caso en que éstos son negativos. En contraposición a esto, el segundo miembro de dicha fórmula tiene sentido sólo en el primer caso. Pues, esto significa que si, durante las transformaciones de una ecuación, sustituimos el logaritmo del producto de dos expresiones M y N que contienen una incógnita, por la suma de los logaritmos de estas expresiones, entonces, para los valores de las incógnitas que convierten M y N

en números negativos, de la expresión $\log_a MN$ obtendremos una expresión absurda $\log_a M + \log_a N$. Como resultado de tal transformación, según se explica en el § 9, podemos perder algunas raíces de la ecuación que buscamos.

Lo mismo sucede en las fórmulas II y III.

Por estas causas, para la solución de diferentes problemas que contienen valores incógnitos, es necesario aplicar fórmulas más generales:

I*. $\log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N| \, (MN > 0)$.

II*. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N| \quad (MN > 0)$.

III*. $\log_a N^{2k} = 2k \log_a |N| \quad (N \neq 0,$ k es un número entero).

IV*. $\log_{x^{2k}} N = \frac{1}{2} \log_{|x|^k} |N| \quad (N > 0,$ $k \neq 0$ es un número entero, $x \neq 0, \quad |x| \neq 1)$.

Conviene señalar que en las fórmulas I* y II* tenemos los mismos defectos indicados arriba: sus primeros y segundos miembros tienen sentido con *diferentes* limitaciones para los valores de las letras o símbolos que entran en éstas. Precisamente, los segundos miembros tienen sentido para cualesquiera que sean los valores de M y N, distintos de cero, y los primeros miembros, sólo cuando M y N son de signo igual, es decir, están afectadas por las limitaciones más rigurosas. Por lo tanto, al resolver, por ejemplo, ecuaciones, la sustitución de $\log_a MN$ por $\log_a |M| + \log_a |N|$ puede dar lugar a soluciones extrañas; en este caso las soluciones no se pierden como puede ocurrir al aplicar las fórmulas I—IV. Como la obtención de soluciones extrañas de una ecuación es preferible a su pérdida (¡ las soluciones innecesarias pueden omitirse mediante la comprobación, y las perdidas no se hallarán!), para las transformaciones de expresiones de letras deben aplicarse las fórmulas I*—IV*.

A continuación proponemos unos problemas que muestran la importancia que tiene la aplicación acertada de estas propiedades.

20. *Simplificar la expresión*

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2 \log_4 4x^4$$

y calcular, seguidamente, su valor para $x = -2$.

En este ejemplo se observa bien que los cálculos según las fórmulas I y III

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2 \log_4 4x^4 = 2 \log_4 x - \log_4 4 - 2 \log_4 4 - 8 \log_4 x =$$
$$= -3 - 6 \log_4 x$$

son erróneos, porque para $x = -2$ la última expresión no tiene sentido y es igual a -6.

Este resultado paradójico se obtuvo debido a que las fórmulas I y III son sólo utilizables para los valores positivos designados por letras. Así, aplicando las fórmulas I* y III* recién expuestas, en las cuales los valores de las letras pueden ser también negativos, obtenemos

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4 = 2\log_4|x| - 1 - 2 - 8\log_4|x| = -3 - 6\log_4|x|.$$

Es evidente que para $x = -2$ la última expresión es igual a -6.

21. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \log_2 xy = 5, \\ \log_{1/2} \dfrac{x}{y} = 1. \end{cases}$$

Aplicando las fórmulas I* y II*, representemos este sistema así:

$$\begin{cases} \log_2|x| + \log_2|y| = 5, \\ \log_{1/2}|x| - \log_{1/2}|y| = 1. \end{cases}$$

Designando $z_1 = \log_2|x|$, $z_2 = \log_2|y|$, obtendremos

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 5, \\ z_1 - z_2 = -1, \end{cases}$$

de donde $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, es decir, $|x| = 4$, $|y| = 8$.

Pero este resultado no quiere decir que el sistema inicial tiene cuatro soluciones:

$$x_1 = 4, \quad y_1 = 8; \qquad x_2 = -4, \quad y_2 = -8;$$
$$x_3 = 4, \quad y_3 = -8; \qquad x_4 = -4; \quad y_4 = 8,$$

porque en la condición se requiere que tengan sentido las expresiones $\log_2 xy$ y $\log_{1/2} \frac{x}{y}$. Es claro que éstas tendrán sentido sólo cuando x e y tengan signos iguales. Por consiguiente, nuestro sistema tendrá sólo dos soluciones:

$$x_1 = 4, \ y_1 = 8 \quad \text{y} \quad x_2 = -4, \ y_2 = -8.$$

De tal modo, al aplicar las fórmulas I* y II*, hemos obtenido soluciones de sobra, de las cuales nos hemos librado fácilmente durante la comprobación y si hubiéramos utilizado las fórmulas I y II, es decir, hubiéramos representado este sistema así:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5, \\ \log_{1/2} x - \log_{1/2} y = 1, \end{cases}$$

habríamos perdido la solución $x_2 = -4$, $y_2 = -8$.

Además, notemos que el sistema inicial se puede resolver también de otro modo, reduciéndolo al sistema

$$xy = 32, \ \frac{x}{y} = \frac{1}{2},$$

de donde obtendríamos el resultado adecuado.

En conclusión de este párrafo examinaremos un problema más: la resolución de la desigualdad logarítmica y su interpretación geométrica.

22. *En un plano está dado el sistema de coordenadas cartesianas. Representar el campo de este plano lleno de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad*

$$\log_x \log_y x > 0.$$

Señalemos que x e y, que satisfacen la condición del problema, son tales que $x>0$, $y>0$, $x\neq 1$ e $y\neq 1$. Dado que las propiedades

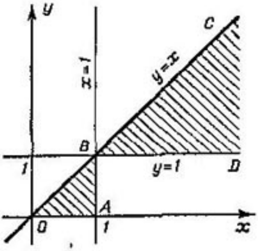


Fig. 14

de los logaritmos son diferentes para bases mayores o menores que la unidad, es natural analizar dos casos:

a) Sea $x>1$. Entonces, en virtud de las propiedades de los logaritmos, la desigualdad inicial será válida si se cumple la desigualdad $\log_y x>1$. Como se sabe, los logaritmos de los números mayores que la unidad, de base menor que la unidad, son negativos. Por eso, la desigualdad $\log_y x>1$ no puede cumplirse para y del intervalo $0<y<1$.

Por consiguiente, la desigualdad $\log_y x>1$ puede ser válida en el caso en que $y>1$. Pero, si $y>1$, la solución de la desigualdad $\log_y x>$ >1 serán todos los valores de $x>y$.

De tal modo, si $x>1$, entonces y debe ser obligatoriamente mayor que la unidad, $y>1$, para que se cumpla la desigualdad inicial. Los puntos del plano, para cuyas coordenadas será cumplida también la condición $x>y$, van a satisfacer la desigualdad inicial.

Si representamos este campo en un dibujo, veremos que éste es la parte interna del ángulo infinito CBD (fig. 14).

b) Ahora sea $0<x<1$. Si razonamos de manera análoga, obtenemos que la condición del problema será satisfecha por aquellos puntos del plano para cuyas coordenadas se cumplen las condiciones $0<x<1$, $0<y<1$ e $y<x$ (en la fig. 14 este campo es la parte interior del triángulo AOB).

El campo que da la solución de nuestro problema, consta de dos partes: la interior del triángulo AOB y la interior del ángulo infinito CBD (fig. 14).

EJERCICIOS:

Calcular:

1. $(a^{\alpha})^{-\beta \log_a s N^{\gamma}}$.

2. $-\log_8 \log_4 \log_2 16$.

3. $\log_{\pi} \operatorname{tg}(0{,}25\pi)$.

4. $\log_9 \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}$.

5. $\log_{0,75} \log_2 \sqrt{\sqrt[-2]{0{,}125}}$.

6. $\sqrt[3]{5^{\frac{1}{\log_7 5}} + \dfrac{1}{\sqrt{-\lg 0{,}1}}}$.

7. $a^{\frac{\log_b \log_b N}{\log_b a}}$.

8. $\lg \operatorname{tg} 1^{\circ} + \lg \operatorname{tg} 2^{\circ} + \ldots + \lg \operatorname{tg} 89^{\circ}$.

9. $\lg \operatorname{tg} 1^{\circ} \cdot \lg \operatorname{tg} 2^{\circ} \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 89^{\circ}$.

10. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$.

11. $\left(\dfrac{1}{49}\right)^{1+\log_7 2} + 5^{-\log_{1/5} 7}$.

12. Hallar x, si $1 - \lg 5 = \dfrac{1}{3}\left(\lg\dfrac{1}{2} + \lg x + \dfrac{1}{3}\lg 5\right)$.

¿Cuál es mayor?

13. $\log_3 2$ ó $\log_2 3$.

14. $\log_4 5$ ó $\log_6 5$.

15. $\log_2 3$ ó $\log_3 11$.

16. $\log_2 a$ ó $\log_3 a$.

17. $\log_a 2$ ó $\log_a 3$.

18. $\sqrt[3]{0{,}01}$ ó $\sqrt[5]{0{,}001}$.

19. Demostrar que si $\alpha = \log_{12} 18$ y $\beta = \log_{24} 54$, $\alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = 1$.

20. Hallar $\log_{54} 168$, si $\log_7 12 = a$ y $\log_{12} 24 = b$.

21. Hallar $\log_{30} 8$, si $\log_{30} 3 = a$ y $\log_{30} 5 = b$.

22. Demostrar la fórmula $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$ y mostrar los valores admisibles de los símbolos.

23. Demostrar la identidad

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

24. Calcular la suma

$$\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \frac{1}{\log_4 N} + \ldots + \frac{1}{\log_{1967} N}, \quad \text{donde } N = 1967.$$

25. Demostrar que si a y b son longitudes de los catetos y c es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuando $c - b \neq 1$ y $c + b \neq 1$, entonces

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

26. Demostrar que $|\log_b a + \log_a b| \geqslant 2$ (a y b son números positivos distintos de 1).

27. Demostrar que $\log_{\log_3 2} \dfrac{1}{2} > 0$.

28. Demostrar que $\log_2 17 \cdot \log_{1/5} 2 \cdot \log_3 \dfrac{1}{5} > 2$.

29. ¿Para cuáles valores de a y b tiene lugar la desigualdad

$$\log_a (a^2 b) > \log_b \left(\frac{1}{a^5}\right)?$$

30. Demostrar que $\log_2 3$ es un número irracional.

31. Hallar todos los valores reales de x para los cuales la expresión

$$\sqrt{\log_{1/2} \frac{x}{x^2-1}}$$

es un número real.

Resolver las ecuaciones:

32. $\dfrac{\log_8 \left(\dfrac{8}{x^2}\right)}{(\log_8 x)^2} = 3.$

33. $\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \log_4 \sqrt{\dfrac{2}{x}} = 2.$

34. $\lg^2 x^3 - 20 \lg \sqrt{x} + 1 = 0.$

35. $\log_2 x - 8 \log_{x^2} 2 = 3.$

36. $\log_{\sqrt{x}} 2 + 4 \log_4 x^2 + 9 = 0.$

37. $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0.$

38. $\log_x (ax) \cdot \log_a x = 1 + \log_x \sqrt{a}.$

39. $\log_3 a - \log_x a = \log_{\frac{x}{3}} a.$

40. $x^{(\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x} = 3^{-3 \log_{2\sqrt{2}} 4 + 8}.$

Resolver los sistemas de ecuaciones:

41. $\begin{cases} 2^{\log_{1/2} (x+y)} = 5^{\log_5 (x-y)}, \\ \log_2 x + \log_2 y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \log_{a^2} y = 2y^2, \\ \log_a \sqrt{xa} + 2 \log_{a^2} \dfrac{y}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_2 \dfrac{x}{y} = -3, \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y = 5. \end{cases}$

44. $\begin{cases} x^{2/3} y^{1/3} - x^{1/3} y^{2/3} = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \log_a x - \log_{a^2} y = m, \\ \log_{a^2} x - \log_{a^3} y = n. \end{cases}$

46. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$

47. $\begin{cases} 2x^y - x^{-y} = 1, \\ \log_2 y = \sqrt{x}. \end{cases}$

48. $\begin{cases} x^2 = 1 + 6 \log_4 y, \\ y^2 = 2^x \cdot y + 2^{2x+1}. \end{cases}$

49. Resolver la desigualdad $\log_{1/2} x + \log_3 x > 1$.

50. Resolver la desigualdad $x^{\frac{1}{\lg x}} \cdot \lg x < 1$.

51. ¿Para cuáles valores de a las raíces de la ecuación $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ son reales?

§ 7. PROGRESIONES

Si el concepto de progresión aritmética no presenta ningunas dificultades, en la definición de progresión geométrica a veces hay confusión. Por lo tanto, es útil detenerse en ésta más detalladamente.

Algunos estudiantes citan esta definición de la manera siguiente: "Llámase progresión geométrica a una sucesión de términos de la progresión cada uno de los cuales, a partir del segundo, es igual al precedente multiplicado por un número constante para la sucesión dada y *distinto de cero*". Otros, al definir esta sucesión, no estipulan lo destacado con letra cursiva. Desde el punto de vista de la primera definición, la sucesión

$$2,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots; \tag{1}$$

no es una progresión geométrica, mientras que la segunda definición admite considerarla como una progresión geométrica "con razón nula".

Claro que en la elección de la definición siempre hay cierta libertad. No vale la pena discutir si la definición es correcta o no, porque la definición no se demuestra. Pero, si damos una nueva definición, ésta debe regirse por *la racionalidad.*

Desde este punto de vista analicemos la segunda definición, es decir, admitamos que la razón de la progresión tiene valor nulo.

La introducción del concepto general de progresión geométrica se originó por la aspiración a estudiar las sucesiones de términos positivos que se encontraban en diferentes problemas, en las cuales cada término consecuente es mayor, una cantidad de veces *completamente determinada*, que el precedente. Mientras tanto, para la sucesión (1), el problema de cuántas veces el tercer término es mayor que el segundo, no tiene sentido. Es muy deseable que la progresión geométrica se restablezca *unívocamente* por cualesquier término y razón. Sin embargo, si se sabe que la razón de la progresión es igual a cero y su tercer término es también cero, es imposible determinar unívocamente su primer término. Además, si (para la razón nula) el tercer término es distinto de cero (por ejemplo, es igual a 1), no existe ninguna progresión geométrica que satisfaga estas condiciones [1].

De lo dicho se deduce que las sucesiones de la forma (1) poseen propiedades anómalas en absoluto, debido a que es infructuoso considerar estas sucesiones como progresiones geométricas. Por eso es lógico exigir que la definición de progresión geométrica contenga la razón distinta de cero.

No obstante, esta definición tampoco posee la racionalidad suficiente. En los límites de esta definición nada nos impide considerar la sucesión

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\quad \ldots,\ 0,\ \ldots \tag{2}$$

como una progresión geométrica con la razón 2 o la razón 1/3. La posibilidad de que la razón de una progresión dada no sea unívoca constituye un fenómeno indeseable. [2].

Para eliminar esta posibilidad es mejor formular la definición de progresión geométrica del modo siguiente: "*llámase progresión geométrica a una sucesión de números en la cual el primer término es distinto de cero y cada uno de los consecuentes es igual a su precedente multiplicado por cierto número, distinto de cero, que es constante para la sucesión dada.* Según se deduce de esta definición, entre los términos de una progresión geométrica no puede haber ceros.

De esta manera, si en un problema a resolver, el primer término b_1 de una progresión geométrica es una expresión de una magnitud incógnita, para la incógnita resulta un valor que convierte b_1 en cero, y según la definición recién aceptada, omitimos este valor de la incógnita porque no satisface la condición del problema.

Para la comprensión de la definición de las progresiones se plantea también la siguiente pregunta que a veces presenta dificultades: *¿es una progresión aritmética o la geométrica la sucesión* 1, 1, 1, ..., 1, ...? En realidad, esta sucesión puede considerarse como progresión aritmética (con diferencia de 0) y como geométrica (con razón de 1), simultáneamente.

Es útil prestar atención al hecho de que las definiciones de las progresiones y las fórmulas conocidas del término general y de la suma de n términos son válidas hasta en el caso cuando los términos de la progresión son números *complejos*.

---

[1] Puede citarse también otros "efectos indeseables" que se deducirán de la segunda definición mencionada arriba. Notemos que todos estos efectos no tienen similares en la teoría de la progresión aritmética. Mientras tanto, es razonable que las teorías de las progresiones aritmética y geométrica sean análogas.

[2] Notemos también que de la misma definición de la suma S de una sucesión infinita es fácil hallar la magnitud de la suma de los términos de la sucesión (2) : $S = 0$. Por lo tanto, si consideramos (2) como una progresión geométrica cuya razón es 2, obtendríamos un ejemplo de progresión geométrica que tiene una suma, pero que no es una progresión infinitamente decreciente.

Los conceptos de progresiones aritmética y geométrica se asimilan bien y sus ejemplos se resuelven con bastante seguridad [1]. No obstante, a menudo se proponen problemas que requieren aplicar, junto con las progresiones, otros conocimientos del curso algebraico. Es razonable detenerse más detalladamente en tales problemas "combinados".

1. *¿Para cuáles* x *los tres números*: $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$ *y* $\lg(2^x+3)$, *considerados en la sucesión indicada, van a presentar una progresión aritmética?*

Para resolver este problema, aparte de las progresiones, es necesario saber propiedades de los logaritmos.

Valiéndose de la definición de la progresión aritmética, podemos reducir este problema a una ecuación $2\lg(2^x-1)=\lg 2+\lg(2^x+3)$, la que debemos solucionar. Vamos a representarla así: $(2^x-1)^2=2(2^x+3)$, o bien, designando $2^x-1=z$, obtenemos $z^2-2z-8=0$, de donde $z_1=4$, $z_2=-2$. La raíz z_2 es extraña ya que se ha de cumplir la desigualdad $2^x-1>0$ (la desigualdad $2^x+3>0$ queda cumplida por sí misma para cualquier x). La raíz z_1 reduce a la ecuación $2^x-1=4$ de la que hallamos: $x=\log_2 5$.

2. *Dadas las progresiones aritmética y geométrica de términos positivos. Los primeros términos de estas progresiones coinciden, así como los segundos. Demostrar que cualquier otro término de la progresión aritmética no es mayor que un término respectivo de la progresión geométrica.*

Este problema es muy interesante porque denuncia una relación curiosa entre la progresión aritmética y la geométrica.

Así tenemos dos progresiones: $\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ y $\div\div b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, donde $a_1=b_1$, $a_2=b_2$. Todos los términos de la progresión aritmética son positivos, entonces $a_1>0$ y la diferencia $d\geqslant 0$. La igualdad $a_2=b_2$ en este caso muestra que la diferencia $q=\dfrac{d}{a_1}+1\geqslant 1$.

Hay que demostrar que $b_{n+1}\geqslant a_{n+1}$, $n=2, 3, \ldots$, o sea, que $a_1q^n-a_1-nd\geqslant 0$. No es difícil obtener esta desigualdad si utilizamos la fórmula del binomio de Newton

$$a_1q^n-a_1-nd=a_1\left(1+\frac{d}{a_1}\right)^n-a_1-nd=$$
$$=a_1\left(1+n\frac{d}{a_1}+C_n^2\frac{d^2}{a_1^2}+\ldots+\frac{d^n}{a_1^n}\right)-a_1-nd=C_n^2\frac{d^2}{a_1}+\ldots\geqslant 0,$$

donde los puntos suspensivos sustituyen los términos positivos no escritos. De aquí se comprende que la igualdad $a_n=b_n$ para todos

[1] Préstese atención especial al hecho de que todas las fórmulas y definiciones que se demuestran en la teoría de las progresiones son válidas hasta en los casos en que los términos de las progresiones son números complejos. Sin embargo, en todos los problemas referentes a las progresiones se entiende (si no se especifica lo contrario) que los términos de éstas son números reales.

los valores de n es sólo posible cuando $d = 0$, es decir, cuando todos los términos de la progresión aritmética son iguales entre sí.

Se puede ofrecer otra solución sin recurrir a la fórmula del binomio de Newton. Según lo hallado anteriormente, $q \geqslant 1$ y está relacionada con la diferencia d mediante relación $d = a_1q - a_1$. Por lo tanto,

$$a_1q^n - a_1 - nd = a_1q^n - a_1 - a_1nq + a_1n = a_1(q^n - 1) - a_1n \times$$
$$\times (q-1) = a_1(q-1)\ [q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1 - n] \geqslant 0,$$

porque $a_1 > 0$, $q \geqslant 1$ y la expresión entre los corchetes tampoco es negativa, ya que de $q \geqslant 1$ se desprende que $q^2 \geqslant 1$, $q^3 \geqslant 1$, ..., $q^{n-1} \geqslant 1$, es decir, $q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1 \geqslant n$. La igualdad $a_n = b_n$ para todos los valores de n es posible sólo cuando $q = 1$, o sea, si todos los términos de la progresión geométrica son iguales entre sí.

3. *Demostrar que los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ no pueden ser términos de una progresión aritmética.*

En este problema hay que utilizar el concepto de los números racionales e irracionales. Pero, al principio citaremos una demostración que frecuentemente se propone a partir de la afirmación enunciada: "Dado que $\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 1{,}732 - 1{,}414 = 0{,}318$ y $\sqrt{5} - \sqrt{3} \approx$ $\approx 2{,}236 - 1{,}732 = 0{,}514$, los números propuestos, por consiguiente, no forman una progresión aritmética." Notemos que los cálculos aproximados, sin tener en cuenta su exactitud, no son probatorios en las Matemáticas. Pero, si verificamos la exactitud de los cálculos (lo que no presenta dificultades), esta demostración es incorrecta, ya que muestra que los números dados no pueden ser tres términos *sucesivos* de una progresión aritmética. Sin embargo, no se ha demostrado que éstos no puedan ser tres términos no contiguos de la misma progresión aritmética.

Aquí será correcta la demostración de lo absurdo. Supongamos que en una progresión aritmética, con el primer término a_1 y la diferencia d, tenemos

$$\sqrt{2} = a_k = a_1 + (k-1)\,d,\ \ \sqrt{3} = a_m = a_1 + (m-1)\,d,$$
$$\sqrt{5} = a_n = a_1 + (n-1)\,d.$$

Restando la primera de la segunda de estas igualdades y luego la segunda de la tercera, obtenemos

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = (m-k)\,d,\ \ \sqrt{5} - \sqrt{3} = (n-m)d;$$

dividiendo la primera entre la segunda de las relaciones obtenidas, tenemos la igualdad

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{m-k}{n-m}. \tag{3}$$

Parece evidente para algunos estudiantes que esta igualdad es imposible, porque "a la izquierda se encuentra el número irracional y a la derecha, el racional" [1]. Sin embargo, para que este caso sea más riguroso, es necesario demostrarlo, lo que exigirá ciertas consideraciones complementarias que analizaremos a continuación.

Examinemos la igualdad obtenida (3). Su segundo miembro es un número racional, ya que m, k, n son números enteros (recordemos que se llaman *racionales* a todos los números reales de la forma p/q, donde p y q son números enteros, $q \neq 0$). Designemos este número, para abreviar, por r y escribamos la igualdad (3) en forma de $\sqrt{3}-\sqrt{2}=r(\sqrt{5}-\sqrt{3})$, de donde, al elevar ambos miembros al cuadrado, obtenemos

$$r^2\sqrt{15}-\sqrt{6}=\frac{8r^2-5}{2}.$$

El segundo miembro de esta última igualdad es también un número racional; designémoslo por s. Elevemos al cuadrado ambos miembros de la igualdad $r^2\sqrt{15}-\sqrt{6}=s$; obtenemos $\sqrt{10}=\dfrac{15r^4-s^2+6}{6r^2}$. Esta igualdad demuestra que $\sqrt{10}$ es un número racional, pero esto es incorrecto [2]. La contradicción obtenida demuestra que la igualdad (3) es imposible, o sea, los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ no pueden ser términos de una progresión aritmética.

Antes de pasar a considerar algunos problemas de progresión geométrica nos detendremos en un problema teórico. Sucede con frecuencia que para la resolución de los problemas es necesario escribir la condición a que los números dados presenten una progresión geométrica. Por lo común, esta condición se inscribe así: los números b_1, b_2, b_3 presentarán una progresión geométrica en el caso, en que

$$b_2:b_1=b_3:b_2,$$

o bien

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}. \tag{4}$$

---

[1] En este caso los estudiantes parten simplemente del aspecto exterior del número, considerando que una combinación compleja de números irracionales será obligatoriamente un número irracional. Es fácil convencerse que esto no siempre es correcto. Por ejemplo, el número $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$ no es el número irracional, porque un cálculo sencillo muestra que es igual a 5. He aquí un ejemplo más complejo: el número $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$, a pesar de su aspecto "irracional" complejo, en realidad es racional e igual a 2. Puede convencerse en esto, al notar que los radicandos son cubos exactos.

[2] El hecho de que $\sqrt{10}$ es un número irracional se demuestra asimismo como la irracionalidad del número $\sqrt{2}$.

Es fácil darse cuenta de que la última igualdad no es equivalente a la definición de la progresión geométrica $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_2 q$. En realidad, los valores de tres cifras 2, 0, 0 y 0, 0, 0 son progresiones geométricas (en el primer caso la razón es igual a cero, en el segundo, es un número arbitrario), sin embargo, para cada una de éstas la igualdad (4) pierde su sentido. Por eso, la utilización de la igualdad (4), como criterio de la progresión geométrica, es incorrecta, especialmente en los casos, en que b_1 y b_2 son expresiones de una magnitud incógnita, por razón de que no se sabe de antemano si siempre son o no distintos de cero.

Es más correcto presentar la condición requerida no en la forma (4), sino en la forma $b_2^2 = b_1 b_3$ que tiene sentido para todos los valores de b_1, b_2, b_3 (incluso los valores nulos). Se puede enunciar esta condición en una forma más generalizada. Como se sabe es válida la siguiente propiedad: *en la progresión geométrica, el cuadrado de cualquier término (exceptuando, naturalmente, el primero y el último) es igual al producto de sus términos contiguos.* Es fácil comprobar que es correcta también la afirmación inversa: *si n números situados en un orden determinado son tales que el cuadrado de cada uno de ellos (exceptuando el primero y el último) es igual al producto de los números contiguos con éste, entonces estos números presentan una progresión geométrica.* Valiéndose de esa afirmación podríamos seguidamente escribir esta condición (n constituye dos igualdades) con el cumplimiento de la cual los n números dados presentan una progresión geométrica.

Esta propiedad de la progresión geométrica los estudiantes la interpretan a veces así: cualquier término (exceptuando los extremos) de la progresión geométrica es una media geométrica de los términos contiguos. No obstante, está claro que la afirmación en tal forma es válida sólo para las progresiones con términos *positivos* reales. Si la representamos, por ejemplo, para la progresión geométrica $1, -3, 9$, entonces resultará una igualdad incorrecta: $-3 = \sqrt{1 \cdot 9}$.

4. *Demostrar que los tres números* $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{6}$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ *tomados en la sucesión dada, presentan una progresión geométrica solamente para* $\alpha = \pm\pi/3 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Aunque el problema está formulado en forma trigonométrica, su solución se reduce al análisis de las raíces de un polinomio de tercer grado.

Los números dados presentan una progresión geométrica si se cumple la igualdad

$$\cos^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\alpha}{6}. \tag{5}$$

De tal modo, los tres números señalados en la condición del problema presentan una progresión geométrica sólo en el caso cuando α

satisface la ecuación (5) que se puede escribir así:

$$6\cos^3\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 0. \tag{6}$$

Comprobemos si los números dados para $\alpha = \pm\pi/3 + 2\pi k$ presentan realmente una progresión geométrica. Con este valor de α tenemos: $\cos\alpha = 1/2$ y por medio de una sustitución nos convencemos de que esto constituye la raíz de la ecuación (6).

Algunos estudiantes reducen su solución precisamente a tal razonamiento. Sin embargo, este razonamiento no ofrece una demostración completa de la afirmación dada en la condición del problema. Hemos comprobado que para los valores mencionados de α los números dados forman una progresión geométrica; nos queda por demostrar que para ningunos otros valores de α esto resulta cierto. Designemos $\cos\alpha = z$ y consideremos el polinomio $6z^3 + z^2 - 1$. Sabemos que $z = 1/2$ es una raíz suya, y debemos descomponer en factores este polinomio [1]:

$$6z^3 + z^2 - 1 = (2z - 1)(3z^2 + 2z + 1).$$

Como el discriminante del trinomio cuadrático obtenido es negativo, la ecuación (6) no tiene otras raíces reales, excepto $\cos\alpha = 1/2$. Por consiguiente, la igualdad (5), equivalente a la definición de la progresión geométrica, se satisface sólo con los valores de α expuestos en la condición del problema.

5. *Hallar todos los números complejos x e y tales que los números x, $x + 2y$, $2x + y$ formen una progresión aritmética, y los números $(y + 1)^2$, $xy + 5$, $(x + 1)^2$ presenten la progresión geométrica.*

Según se expresa en la condición ahora debemos considerar las progresiones con números complejos.

Dado que los números x, $x + 2y$, $2x + y$ forman una progresión aritmética, tenemos la igualdad $(x + 2y) - x = (2x + y) - (x + 2y)$, de donde se deduce que: $x = 3y$. Ya que los números $(y + 1)^2$, $xy + 5$, $(x + 1)^2$ han de presentar una progresión geométrica, debe cumplirse la igualdad

$$(xy + 5)^2 = (x + 1)^2 (y + 1)^2.$$

En esta igualdad sustituimos $x = 3y$ y aplicamos la fórmula de diferencia de cuadrados, entonces obtendremos una ecuación para determinar y

$$(y - 1)(3y^2 + 2y + 3) = 0,$$

la cual tiene tres raíces: una real y dos imaginarias. De esa manera, la condición del problema la satisfacen tres pares de números:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1 + 2\sqrt{2}\,i, \quad x_3 = -1 - 2\sqrt{2}\,i,$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{-1 + 2\sqrt{2}\,i}{3}, \quad y_3 = \frac{-1 - 2\sqrt{2}\,i}{3}.$$

[1] Por ejemplo, al dividir el polinomio $6z^3 + z^2 - 1$ por $z - 1/2$ se puede conseguir que sean enteros todos los coeficientes en la descomposición resultante.

Por ejemplo, en el primero de estos casos la progresión aritmética tiene la forma 3, 5, 7 y la geométrica 4, 8, 16; en el segundo caso la progresión aritmética tiene la forma

$$-1+2\sqrt{2}\,i,\quad \frac{-5+10\sqrt{2}\,i}{3},\quad \frac{-7+14\sqrt{2}\,i}{3}$$

$\left(\text{la diferencia es igual a } \frac{-2+4\sqrt{2}\,i}{3}\right)$ y la geométrica

$$\frac{-4+8\sqrt{2}}{9},\quad \frac{8-4\sqrt{2}\,i}{3},\quad -8,$$

(aquí la razón es igual a $-2-\sqrt{2}\,i$). Análogamente, pueden calcularse las progresiones en el tercer caso.

6. *Hallar una progresión geométrica real si se sabe que la suma de sus primeros cuatro términos es igual a* 15 *y la suma de sus cuadrados es igual a* 85.

Este problema no presenta dificultades en lo que se refiere a las progresiones; sin embargo, merece un análisis especial la ecuación que resulta de este problema.

Designemos el primer término de la progresión que se busca por a, y su razón, por q. Entonces, los otros tres términos son iguales a aq, aq^2 y aq^3. Según la condición expuesta tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a(1+q+q^2+q^3)=15, \\ a^2(1+q^2+q^4+q^6)=85. \end{cases}$$

Elevando la primera ecuación al cuadrado y dividiendo el resultado entre la segunda, obtenemos una ecuación para q:

$$\frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{45}{17}.$$

Si simplificamos esta ecuación, resultará una ecuación de sexto grado. Pero podemos proceder de otro modo. Transformemos el primer miembro:

$$\frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{\left(\frac{q^4-1}{q-1}\right)^2}{\frac{q^8-1}{q^2-1}}=\frac{(q^4-1)^2}{(q-1)^2}\cdot\frac{q^2-1}{q^8-1}=\frac{q^4-1}{q-1}\cdot\frac{q+1}{q^4+1}=$$

$$=\frac{(q^3+q^2+q+1)(q+1)}{q^4+1}=\frac{q^4+2q^3+2q^2+2q+1}{q^4+1}.$$

De tal manera obtenemos la ecuación

$$\frac{q^4+2q^3+2q^2+2q+1}{q^4+1}=\frac{45}{17},$$

que puede ser reducida a una ecuación de cuarto grado

$$14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0. \qquad (7)$$

La ecuación obtenida tiene una forma especial, la llamada ecuación *recíproca* de cuarto grado: sus coeficientes equidistantes de los extremos son iguales. La forma general de la ecuación recíproca de cuarto grado se representa así:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0;$$

mediante un procedimiento artificial, se puede resolver cualquier ecuación de esta forma. Señalemos cómo actúa este método en nuestro caso concreto [1], aunque su generalización será evidente en seguida.

Está claro que $q = 0$ no es una raíz de la ecuación (7). Por consiguiente, ambos miembros de esta ecuación se puede dividir entre q^2 y transformar luego el primer miembro del modo siguiente:

$$14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 14\left[\left(q + \frac{1}{q}\right)^2 - 2\right] - $$
$$- 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 14\left(q + \frac{1}{q}\right)^2 - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 45.$$

Designando ahora a $q + 1/q$ por t, obtendremos la ecuación $14t^2 - 17t - 45 = 0$ cuyas raíces son $t_1 = 5/2$, $t_2 = -9/7$. Quedan por resolver dos ecuaciones:

$$q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2}; \quad q + \frac{1}{q} = -\frac{9}{7}.$$

Las raíces de la primera ecuación se hallan sin dificultades: $q_1 = 2$, $q_2 = 1/2$; la segunda ecuación no tiene raíces reales. Sustituyendo sucesivamente los valores hallados de q en la primera ecuación del sistema inicial, obtenemos que $a_1 = 1$, $a_2 = 8$.

De tal modo, las dos progresiones geométricas siguientes satisfacen la condición del problema [2]:

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots \quad \text{y} \quad 8, 4, 2, 1, 1/2, \ldots$$

A veces con el concepto de la progresión se relaciona un caso de Geometría. Así sucede, por ejemplo, en los problemas siguientes.

---

[1] En nuestro caso resultó, además, que $B = C$; en el caso general los coeficientes B y C son distintos.

[2] No es casual el hecho de que resultó recíproca la ecuación (7) durante la resolución del problema. El asunto es que las ecuaciones recíprocas poseen la siguiente propiedad: *si el número a es una raíz, entonces $1/a$ también lo es*; esto se demuestra mediante la comprobación directa. La ecuación (7) determina la razón de la progresión. Sin embargo, en la condición del problema el orden de números incógnitos no tiene importancia; por esto, si cualquier número q es la razón de la progresión que satisface la condición, entonces $1/q$ será también la razón de la progresión que satisface la condición (esta progresión está compuesta de los mismos números que la progresión correspondiente a la razón q, pero escritos en el orden contrario). Por consiguiente, es de esperar que la ecuación para q ha de ser recíproca.

7. *¿Para qué valores de la razón, tres términos contiguos de una progresión geométrica pueden hacerse de longitudes de los lados de un triángulo?*

Es absolutamente evidente que, con la razón igual a 1, cualesquiera tres términos de la progresión geométrica (siendo positivo el primero) pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo equilátero.

Supongamos que nos han propuesto tres números positivos desiguales a, aq, aq^2; ¿para qué valores de q estos números pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo?

Se sabe que tres segmentos forman un triángulo cuando, y sólo cuando, cada uno de éstos es menor que la suma de los otros dos. En realidad, para aclarar si los tres segmentos dados forman un triángulo, es suficiente comprobar si el segmento mayor es menor que la suma de los otros dos.

Utilizando esta propiedad vamos a resolver este problema. Necesitamos aclarar para cuáles valores de q, el mayor de los tres números a, aq, aq^2 es menor que la suma de los otros dos. Claro está que para $q>1$ el número mayor será aq^2, y para $q<1$, el mayor número será a. Por eso examinemos dos casos:

a) Sea $q>1$. En este caso debe cumplirse la desigualdad

$$aq^2 < aq + a.$$

Ya que a es un número positivo, de ahí obtenemos que la razón q satisface la desigualdad $q^2 - q - 1 < 0$. La solución de esta desigualdad serán todos los valores de q que se tienen en el intervalo

$$\frac{-\sqrt{5}+1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Tomando en consideración que en el caso $q>1$ obtenemos que q puede variar en el intervalo

$$1 < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

para cualquier valor de q de este intervalo los tres números a, aq, aq^2 pueden ser las longitudes de los lados del triángulo.

b) Sea $0<q<1$. Puede hallarse un intervalo dentro del cual debe variar la razón q. Sin embargo, procederemos de un modo diferente.

Escribamos la progresión a, aq, aq^2 a la inversa: aq^2, aq, a y designemos su razón, igual a $1/q$, por q'. Ya que $q<1$, entonces $q' = 1/q > 1$. Por eso llegamos al caso anterior y obtenemos que q' ha de variar dentro del intervalo $1 < q' < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, es decir, $1/q$ está comprendido dentro del intervalo $1 < \frac{1}{q}\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. De ahí demostramos que en el caso que se examina q puede variar dentro del intervalo

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < 1.$$

Reuniendo todos los casos considerados más arriba, obtenemos que la razón q de la progresión puede variar solamente dentro del intervalo

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

8. *Una recta pasa por el centro del cuadrado $ABCD$ y interseca el lado AB en el punto N, $AN:NB=1:2$. En esta recta tomamos un punto arbitrario M que se encuentra dentro del cuadrado. Demostrar que*

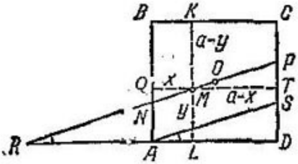


Fig. 15

las distancias desde el punto M hasta los lados del cuadrado AB, AD, BC, CD, tomados en la sucesión indicada, forman una progresión aritmética.

Designemos por x (fig. 15) la distancia desde el punto M hasta el lado AB y por y hasta el lado AD; entonces, las distancias hasta los lados BC y CD serán respectivamente iguales: $a-y$ y $a-x$, donde a es el lado del cuadrado.

Si a través del punto A trazamos $AS \parallel NP$, será fácil comprender que $\operatorname{tg} \angle SAD = 1/3$. Prolonguemos NP hasta la intersección con la prolongación de AD en el punto R y analicemos ΔRML. Ya que $PD=2SD$, según la propiedad conocida de las paralelas, concluimos que $RD=2AD=2a$, por lo cual $RL=2a-(a-x)=a+x$. Seguidamente tenemos: $\frac{ML}{LR}=\operatorname{tg}\angle MRL$, de donde $y=\frac{a+x}{3}$.

Ahora nos queda por comprobar que para cualquier $0<x<a$ los cuatro números: x, $\frac{a+x}{3}$, $a-\frac{a+x}{3}=\frac{2a-x}{3}$, $a-x$ forman la progresión aritmética. Esta comprobación procede directamente de la definición de la progresión aritmética:

$$\frac{a+x}{3}-x=\frac{2a-x}{3}-\frac{a+x}{3}=a-x-\frac{2a-x}{3}.$$

Durante la resolución de este problema algunos estudiantes cometen un error grave. Afirman que los cuatro números MQ, ML, MK, MT forman la progresión aritmética simplemente ya que la suma de los términos extremos, $MQ + MT = a$, es igual a la suma de los términos medios $ML + MK = a$. Es evidente la falta de argumentos de esta afirmación. Efectivamente, si los cuatro números forman una progresión aritmética, la suma de los términos extremos es igual a la suma de los términos medios. No obstante, aunque esta propiedad resulta satisfecha para los cuatro números éstos *no están obligados* a formar una progresión aritmética (por ejemplo: 1, 6, 5, 10).

Notemos que en algunos problemas la aplicación de ciertas fórmulas para las progresiones aritmética o geométrica es posible sólo después de algunas transformaciones especiales.

9. *Hallar el término general de la sucesión* 2, 4, 7, 11, ..., *cuya propiedad es que las diferencias entre los términos contiguos forman una progresión aritmética.*

Examinemos un procedimiento para hallar el término general de cualquiera que sea la sucesión, en la cual las diferencias entre los términos contiguos formen una progresión aritmética.

Designemos la sucesión dada por $a_1, a_2, a_3, \ldots$; entonces,

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= r_1, \\ a_3 - a_2 &= r_2, \\ a_4 - a_3 &= r_3, \\ &\cdots\cdots \\ a_n - a_{n-1} &= r_{n-1} \end{aligned}$$

y según la condición, los números $r_1, r_2, r_3, \ldots$ forman una progresión aritmética. Sumando todas las igualdades escritas y reduciendo todos los términos semejantes obtenemos que

$$a_n = a_1 + r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}.$$

En nuestro caso el primer término de la sucesión es igual a 2 y la suma de la progresión aritmética (su primer término es 2, la diferencia es igual a 1) se halla fácilmente:

$$r_1 + \ldots + r_{n-1} = \frac{2r_1 + d(n-2)}{2}(n-1) = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Por eso

$$a_n = 2 + \frac{(n-1)(n+2)}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

10. *Hallar la suma*

$$1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4 + \ldots + 100\cdot 2^{99}.$$

La suma propuesta no es una suma de progresión geométrica. Sin embargo, si se manifiesta cierta "maestría", la solución se logra sin mucho esfuerzo partiendo de las fórmulas ya conocidas.

Vamos a escribir la suma propuesta, designándola por S, en la forma

$$\begin{aligned} S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + 2^{98} + 2^{99} + \\ + 2^{99}. \end{aligned}$$

Es evidente que en cada uno de los renglones hay una suma de cierta progresión geométrica; aplicando la fórmula adecuada, obtenemos que

$$\begin{aligned} S = \frac{1(2^{100}-1)}{2-1} + \frac{2(2^{99}-1)}{2-1} + \frac{2^2(2^{98}-1)}{2-1} + \frac{2^3(2^{97}-1)}{2-1} + \ldots \\ \ldots + \frac{2^{98}(2^2-1)}{2-1} + \frac{2^{99}(2-1)}{2-1} = (2^{100}-1) + (2^{100}-2) + \\ + (2^{100}-2^2) + (2^{100}-2^3) + \ldots + (2^{100}-2^{98}) + (2^{100}-2^{99}) = \\ = 100\cdot 2^{100} - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) = 100\cdot 2^{100} - \\ - \frac{1(2^{100}-1)}{2-1} = 99\cdot 2^{100} + 1. \end{aligned}$$

11. *Hallar el coeficiente para todos los valores de x^n en la descomposición* $(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n)^2$.

Lo primero es comprender de qué modo pueden aparecer en la descomposición los términos con x^n. Según la fórmula del cuadrado del polinomio, la descomposición incógnita va a contener: primero, los cuadrados de todos los términos de la suma propuesta por la condición; segundo, todos los productos de pares duplicados de estos términos. Es fácil observar: si el número n es impar, los términos con x^n de la descomposición pueden ser obtenidos sólo de los productos dobles; si el número n es par, los términos con x^n de la descomposición también pueden ser obtenidos de los productos dobles; pero, el mismo término puede obtenerse, además, como resultado de la elevación al cuadrado del sumando $\frac{n}{2} x^{\frac{n}{2}}$.

Por consiguiente, para resolver este problema es natural considerar por separado dos casos: cuando n es par y cuando n es impar.

Examinemos al principio el caso en que n es par. Entonces la suma propuesta tiene $n + 1$ términos, es decir, su número es impar y la expresión dada puede anotarse en la siguiente forma, eliminando el término medio:

$$\left[1 + x + 2x^2 + \ldots + \left(\frac{n}{2} - 1\right) x^{\frac{n}{2}-1} + \frac{n}{2} x^{\frac{n}{2}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{n}{2} + 1\right) x^{\frac{n}{2}+1} + \ldots + (n-1)x^{n-1} + nx^n\right]^2.$$

Es evidente que entre los cuadrados de los términos de nuestra suma sólo el cuadrado del término medio nos proporciona el término con x^n, y a partir de los productos dobles la potencia desconocida la darán solamente los productos de los términos equidistantes de los extremos. Por consiguiente, el coeficiente incógnito será igual a:

$$S=\left(\frac{n}{2}\right)^2+2\cdot 1\cdot n+2\cdot 1\cdot (n-1)+2\cdot 2\cdot (n-2)+\ldots$$
$$\ldots+2\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^2+2n+2\cdot 1\cdot n+$$
$$+2\cdot 2\cdot n+2\cdot 3\cdot n+\ldots+2\left(\frac{n}{2}-1\right)n-$$
$$-2\cdot 1\cdot 1-2\cdot 2\cdot 2-2\cdot 3\cdot 3-\ldots-2\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)=$$
$$=\frac{n^2}{4}+2n+2n\left[1+2+3+\ldots+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]-$$
$$-2\left[1^2+2^2+3^2+\ldots+\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right].$$

La suma entre los primeros corchetes se calcula como una suma de progresión aritmética; la suma entre los segundos corchetes se determina por la fórmula de la suma de cuadrados de números enteros:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Es muy útil saber y poder demostrar esta fórmula. Un cálculo simple muestra que cuando n es par el coeficiente de x^n es igual a:

$$S=\frac{n(n^2+11)}{6}.$$

Ahora tenemos que n es un número impar. En este caso la suma propuesta tiene $n+1$ términos, es decir su número es par, y en la expresión dada hay dos términos medios:

$$\left[1+x+2x^2+\ldots+\frac{n-1}{2}x^{\frac{n-1}{2}}+\frac{n+1}{2}x^{\frac{n+1}{2}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(n-1)x^{n-1}+nx^n\right]^2.$$

Es fácil comprender que los términos con x^n pueden aparecer ahora sólo como resultado de los productos dobles de los términos equidistantes de los extremos. Por consiguiente, el coeficiente buscado es igual a:

$$S=2\cdot 1\cdot n+2\cdot 1\cdot (n-1)+2\cdot 2\cdot (n-2)+\ldots+2\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}=$$
$$=2n+2\cdot 1\cdot n+2\cdot 2\cdot n+2\cdot 3\cdot n+\ldots+2\cdot\frac{n-1}{2}\cdot n-$$

$$-2\cdot 1\cdot 1-2\cdot 2\cdot 2-2\cdot 3\cdot 3-\ldots-2\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}=$$
$$=2n+2n\left[1+2+3+\ldots+\frac{n-1}{2}\right]-$$
$$-2\left[1^2+2^2+3^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right]=\frac{n\,(n^2+11)}{6}.$$

De este modo se ve que la fórmula definitiva no depende de la paridad o imparidad del número n.

Son muchos los problemas referentes a la composición de las ecuaciones que están relacionados con las progresiones, mas la mayoría de éstos sólo utilizan las definiciones de las progresiones. Consideremos aquí un solo problema con respecto a la composición de las ecuaciones del tipo de "problemas de soluciones químicas". Los problemas de tal tipo, en los cuales la progresión geométrica está presente con poca evidencia, se encuentran con bastante frecuencia y presentan dificultades.

12. *De un depósito que contiene* 729 l *de un ácido puro, se ha extraído* a l *y se ha rellenado con agua. Después del mezclado total (hasta que se obtenga una solución homogénea), del déposito se ha extraído de nuevo* a l *de la solución y se ha rellenado con agua revolviendo la mezcla escrupulosamente. Después de repetir* 6 *veces tales operaciones, el líquido de depósito contenía* 64 l *de ácido puro. Determinar el valor de* a.

Después de que del depósito se haya extraído por vez primera a l de ácido puro y se haya repuesto con agua, en éste quedó, naturalmente, $729-a$ l de ácido puro. Es evidente que un litro de la solución ahora contiene $\frac{729-a}{729}$ l de ácido puro. Por segunda vez del depósito se extrae $a\cdot\frac{729-a}{729}$ l de ácido y en éste queda

$$729-a-a\cdot\frac{729-a}{729}=\frac{(729-a)^2}{729}\ \text{l}$$

de ácido. Por consiguiente, al reponer el depósito con agua por segunda vez, un litro de la solución contiene $\frac{729-a}{729}:729=\frac{(729-a)^2}{729^2}$ l de ácido. Por lo tanto, la tercera sustracción disminuye la cantidad de ácido en el depósito más en $a\cdot\frac{(729-a)^2}{729^2}$ l, es decir, después de la tercera operación en el depósito quedan

$$\frac{(729-a)^2}{729}-a\cdot\frac{(729-a)^2}{729^2}=\frac{(729-a)^3}{729^2}\ \text{l}$$

de ácido.

No es difícil notar que la cantidad de ácido en el depósito, después de la sexta operación, ha de ser igual a

$$\frac{(729-a)^6}{729^5}\ \mathrm{l}.$$

Pero, esta suposición no sustituye, como es natural, la demostración. Para que la rigurosidad sea más completa, convendría repetir seis veces los razonamientos expuestos arriba, y convencerse de que, después de la sexta operación, en el depósito quedará precisamente tal cantidad de ácido puro [1]. La ecuación

$$\frac{(729-a)^6}{729^5}=64,$$

si anotamos que $2^6=64$ y $3^6=729$, se determina inmediatamente que $a=243$. De tal modo, en cada operación se extraían 243 litros del líquido.

Sacando la conclusión de este párrafo es necesario decir algunas palabras respecto a la progresión geométrica infinitamente decreciente. Aquí se debe, sobre todo, tener una idea clara de la diferencia de principio entre *la definición del concepto* de la suma de tal progresión y *el cálculo de la cantidad* de esta suma.

Si tenemos una cantidad *finita* de números, entonces *la suma* u_1+ $+u_2+u_3+\ldots+u_n$ de estos números tiene un sentido determinado por completo, de acuerdo con los conceptos aritméticos. Tenemos que hallar el número $S_2=u_1+u_2$, adicionar al número obtenido S_2 el tercer número dado y obtener $S_3=S_2+u_3 u_1+u_2+u_3$, a éste adicionarle el cuarto número dado y obtener $S_4=S_3+u_4$, etc., hasta que queden agotados todos los números dados.

Sin embargo, si la cantidad de números es *infinita* es evidente que la determinación de la suma recién dada, es inaplicable, porque nunca podemos agotar todos los números dados. Por esta causa, la anotación $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ hasta ahora no tiene sentido: en efecto, no sabemos qué significa adicionar una cantidad infinita de números.

En este caso procedemos del modo siguiente. Calculemos las lla-

---

[1] Es fácil demostrar también que las cantidades de ácido en el depósito después de cada operación:

$$729-a,\quad \frac{(729-a)^2}{729},\quad \frac{(729-a)^3}{729^2},\ \ldots$$

representan una progresión geométrica con la razón $\frac{729-a}{729}=1-\frac{a}{729}$. En realidad, si después de n-ésima operación en el depósito queda k_n l de ácido puro, entonces 1 l de la solución tendrá $\frac{k_n}{729}$ l de ácido y, como resultado de la $n+1$ operación, la cantidad de ácido disminuye en $\frac{ak_n}{729}$ l y será igual a $k_{n+1}=k_n-\frac{ak_n}{729}=k_n\left(1-\frac{a}{729}\right)\ l.$

madas *sumas parciales*, o sea, las sumas de un número finito de sumandos:

$$S_1 = u_1;$$
$$S_2 = u_1 + u_2;$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3;$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k;$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

puede calcularse (de un modo habitual) para cualquier valor de k. Para la sucesión numérica obtenida de este modo

$$S_1, \ S_2, \ S_3, \ldots, \ S_k, \ \ldots$$

hay dos posibidilades: una, que tenga límite, otra que no lo tenga. Si esta sucesión de las sumas parciales no tiene límite cuando $k \to \infty$, entonces la suma de los números $u_1, \ u_2, \ u_3, \ldots \ , u_n, \ \ldots$ no se determina. *Si el límite existe, entonces ésta, según la definición, se denomina suma de los números dados*; si este límite es igual a S:

$$\lim_{k \to \infty} S_k = S,$$

entonces se escribe que

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = S.$$

De tal manera, la suma de un conjunto infinito de números es un concepto absolutamente nuevo, distinto por su esencia de la noción de la suma que existe en las Aritméticas.

Si ahora consideramos *una progresión geométrica infinitamente decreciente* [1]

$$a, \ aq, \ aq^2, \ldots, \ \ aq^n, \ \ \ldots |q| < 1,$$

entonces la sucesión de las sumas parciales en este caso tiene evidentemente un límite que es igual a: $S = \frac{a}{1-q}$. De tal modo, *la progresión geométrica infinitamente decreciente tiene una suma que es igual a*:

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Conviene tener muy presente que antes de *calcular* la suma de sucesión infinita de los números, hay que convencerse de su *existencia.* Esto se ve claramente en el ejemplo que a continuación se

[1] *La progresión geométrica* con un número infinito de términos y una razón menor que 1 por su valor absoluto, se denomina *infinitamente decreciente*. Sin embargo, esta denominación no es del todo exacta: la progresión infinitamente decreciente puede no ser decreciente y será en realidad decreciente solamente en el caso cuando su primer término sea positivo y la razón satisfaga la desigualdad $0 < q < 1$. Por ejemplo, la progresión geométrica infinitamente decreciente $1, \ -1/2, \ 1/4, \ -1/8, \ \ldots$ no es decreciente según la terminología admitida.

menciona. Tratemos de hallar la suma de la siguiente progresión geométrica infinita: 2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ... Si planteamos el problema, designando la suma por S:

$$S = 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n + \ldots,$$

entonces, multiplicando por 2 ambos miembros de esta igualdad, obtenemos

$$4 + 8 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} + \ldots = 2S,$$

de donde se desprende que $2 + 2S = S$ y, por consiguiente, $S = -2$. El resultado extraño obtenido,— la suma de una cantidad infinita de números positivos es negativa —, se puede explicar muy fácilmente: la sucesión inicial no tiene suma debido a que nuestros cálculos son absurdos. En realidad, la sucesión de sumas parciales

$$S_1 = 2,\ \ S_2 = 2 + 4 = 6,\ \ S_3 = 2 + 4 + 8 = 14,\ \ \ldots,\ \ S_k = 2^{k+1} - 2,\ \ldots$$

para $k \to \infty$ no tiene límite.

13. *Hallar una progresión geométrica infinitamente decreciente cuya suma es dos veces más que la suma k de sus primeros términos.*

Este problema es interesante ya que por ello nosotros no llegamos a a una solución *única*. Tal situación resulta a veces durante la resolución de los problemas con progresiones.

Designemos el primer término de la progresión por a, y la razón, por q; entonces, según la condición, podemos representar la igualdad

$$\frac{a}{1-q} = \frac{2a(1-q^k)}{q-1},$$

donde k es el número propuesto por condición del problema. De esto obtenemos que

$$1 = 2(1-q^k),\ \ q^k = \frac{1}{2}.$$

Si k es impar, esta ecuación tiene la raíz única (nos limitamos a hallar progresiones solamente con términos reales)

$$q = \sqrt[k]{1/2},$$

la que en este caso es precisamente la razón de la progresión; en caso de que k es par, entonces resultan dos raíces

$$q = \pm\sqrt[k]{1/2};$$

estas raíces pueden ser razones de la progresión desconocida. De tal modo, para k par la razón de la progresión no se determina unívocamente.

En lo que se refiere al primer término de la progresión, es imposible hallarlo porque nos faltan condiciones. Esto significa que *cualquier* progresión geométrica, infinitamente decreciente, con uno de los valores indicados en la razón y con el primer término arbitrario, dispone de la propiedad enunciada en el problema.

EJERCICIOS:

1. El primer término de una progresión geométrica es igual a $x-2$, el tercer término es igual a $x+6$, y la media aritmética de los términos primero y tercero se refiere al segundo como $5:3$. Determinar x.

2. Sea $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$ y $\frac{1}{c+a}$ tres términos sucesivos de una progresión aritmética. Demostrar que b^2, a^2 y c^2 son también términos sucesivos de una progresión aritmética.

3. Tres números reales distintos de cero forman una progresión aritmética y los cuadrados de estos números tomados en la misma sucesión, forman una progresión geométrica. Hallar todas las razones posibles de esta última progresión.

4. Los lados de un triángulo rectángulo forman una progresión geométrica. Hallar las tangentes de sus ángulos agudos.

5. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $x^2-3x+A=0$, y x_3 y x_4, las raíces de la ecuación $x^2-12x+B=0$. Se sabe que los números x_1, x_2, x_3, x_4 (en la sucesión dada) forman una progresión geométrica creciente. Hallar A y B.

6. A lo largo de un camino se encontraba un número impar de piedras, a 10 m una de la otra. Había que recoger estas piedras en el lugar donde se encontraba la piedra media. El hombre puede llevar una sola piedra; las trasladaba sucesivamente empezando por uno de los extremos. Al recoger todas las piedras, el hombre caminó 3 km. ¿Cuántas piedras había en el camino?

7. Tres hermanos, cuyas edades forman una progresión geométrica, reparten entre sí una suma del dinero directamente proporcional a su edad. Si lo hacen dentro de tres años, cuando el menor será dos veces más joven que el mayor, entonces el menor habrá recibido 105 rublos y el mediano 15 rublos más que ahora. ¿Cuántos años tiene cada uno de los hermanos?

8. Sean b_1, b_2, b_3, tres términos sucesivos de una progresión geométrica con la razón q. Hallar todas aquellas q para las cuales es válida la desigualdad $b_3 > 4b_2-3b_1$.

9. Las cosechadoras de cereales de que dispone una granja son capaces de recolectar la cosecha durante un día (24 horas). Pero, según el plan de trabajo, durante la primera hora de recolección funcionaba solamente una cosechadora, durante la segunda hora, dos, durante la tercera, tres, etc., hasta que no se pongan en acción todas las cosechadoras; todas las máquinas trabajaban solamente unas horas antes de finalizar la recolección. El tiempo de trabajo previsto por el plan se habría reducido en 6 horas si al principio hubiesen trabajado permanentemente todas las cosechadoras menos cinco.

¿Cuántas máquinas tenía la granja?

10. Un depósito se llenaba de gasolina durante un número entero de horas con lo que la relación de la cantidad de gasolina depositada en cada hora consecutiva a la cantidad de la misma, vertida en la hora precedente, es una magnitud constante. Antes de una hora del llenado en el depósito había 372 l. Si se extrae del depósito completo aquella cantidad de gasolina que fue depositada durante la primera hora, quedaría 186 l; si más tarde se extrae aquella cantidad de gasolina que fue depositada durante la segunda, la última y la penúltima horas a la vez, en el depósito quedaría 72 l. ¿Qué cantidad de gasolina fue echada en el depósito durante la primera hora?

11. En un recipiente con agua pura se ha llenado 6 l de una solución al 64% de alcohol, después de revolverla totalmente se ha extraído una cantidad determinada (es decir, 6 l) de la solución obtenida.

¿Qué cantidad de agua había al principio, si después de esta triple operación en el recipiente hay una solución de alcohol cuya concentración es del 37%?

12. Se sabe que los números 3, $3\log_y x$, $3\log_z y$, $7\log_x z$ forman una progresión aritmética. Demuéstrese que $x^{18}=y^{21}=z^{28}$.

13. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^4 = y^4 + z^4, \\ xyz = 8, \end{cases}$$

sabiendo que los logaritmos $\log_y x$, $\log_z y$, $\log_x z$ forman una progresión geométrica.

14. Se sabe que para la progresión aritmética $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ tiene lugar una igualdad $s_m/s_n = m^2/n^2$ (s_k es la suma de los primeros k términos de la progresión). Demostrar que $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

15. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los números que forman una progresión geométrica. Sabiendo las sumas

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{y} \quad T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n},$$

hallar el producto $P = a_1 a_2 \ldots a_n$.

16. ¿Para cuáles valores de x los números $2x^2$, x^4, 24, tomados en la sucesión indicada, forman una progresión aritmética?

17. ¿Para cuáles valores de x los números 1, x^2, $6-x^2$, tomados en la sucesión indicada, forman una progresión geométrica?

§ 8. DEMOSTRACIÓN DE LAS DESIGUALDADES

Este párrafo está dedicado al análisis de demostración de las desigualdades tanto algebraicas como numéricas. Desde luego, sería bueno señalar un método único de demostración de todas las desigualdades. Lamentablemente, no existe tal método. Sin embargo, a continuación serán expuestos algunos procedimientos con ayuda de los cuales se logra demostrar un gran número de desigualdades.

Señalemos unas cuantas desigualdades que son de uso frecuente para la solución de muchos problemas. Se puede considerar como tales desigualdades la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, su corolario de la suma de cantidades recíprocamente inversas, así como la siguiente desigualdad trigonométrica:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a \text{ sen } x + b \cos x \leqslant \sqrt{a^2+b^2}. \tag{1}$$

A continuación nos aprovecharemos de la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica para dos números por razón de que la citamos.

Para cualesquier números no negativos a y b es válida la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \tag{2}$$

con esto el signo de igualdad tiene lugar sólo en el caso en que $a = b$.

Un caso particular de la desigualdad (2) lo representa la desigualdad

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2,$$

la que es válida para $x > 0$. El signo de igualdad se logra en esta desigualdad solamente para $x = 1$. Es útil retener el enunciado de esta desigualdad:

La suma de dos números positivos recíprocamente inversos no es menor que dos, siendo igual a dos sólo en el caso cuando ambos números son iguales a la unidad.

Notemos también que para cualquier $x \neq 0$ es válida la desigualdad

$$\left|x+\frac{1}{x}\right| \geqslant 2,$$

o bien,

$$\left|\frac{1+x^2}{2x}\right| \geqslant 1. \qquad (3)$$

1. *Demostrar la desigualdad* $\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}>2.$

Fundamentándonos en las propiedades de los logaritmos $1/\log_\pi 2 = \log_2\pi > 0$, es decir que, en el primer miembro de nuestra desigualdad se halla la suma de dos números positivos recíprocamente inversos, distintos de 1 ($\log_2 \pi \neq 1$). Y esta suma es mayor que dos. Por consiguiente, la desigualdad inicial es válida.

2. *Demostrar que si* $a>0$, $b>0$, $c>0$, *entonces*

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geqslant a+b+c.$$

Utilicemos las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right) \geqslant c, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right) \geqslant a, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right) \geqslant b$$

(estas desigualdades son válidas, porque a la izquierda de cada una de éstas se encuentran las medias aritméticas y a la derecha, las medias geométricas de los números positivos). Sumando estas desigualdades, término a término, obtenemos la desigualdad que fue necesario demostrar.

3. *Demostrar que si* $a>0$, $b>0$, $c>0$, *entonces*

$$(a+b)(b+c)\ (a+c) \geqslant 8abc.$$

Al tomar las siguientes desigualdades (véase la fórmula (2)):

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geqslant 2\sqrt{bc}, \quad a+c \geqslant 2\sqrt{ac}$$

y multiplicándolas, término a término, obtenemos la incógnita.

Es posible demostrar esta desigualdad de otro modo, utilizando la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica para 8 números positivos (véase fórmula (5) pág. 114). Efectivamente, eliminando los paréntesis del primer miembro de nuestra desigualdad conseguimos representarla así:

$$\frac{a^2b+b^2c+c^2b+a^2c+b^2a+c^2a+abc+abc}{8} \geqslant abc.$$

En esta desigualdad, a la izquierda se encuentra la media aritmética de 8 números positivos y a la derecha, su media geométrica lo que es fácil comprobar; con esto queda demostrada la desigualdad inicial.

Antes de pasar a los ejemplos ulteriores hagamos una observación general. El error típico que se comete a menudo durante la demostración de las desigualdades consiste en lo siguiente. El estudiante escribe la desigualdad que ha de ser demostrada, luego hace algunas transformaciones (¡absolutamente legítimas!) y llega, al fin y al cabo, a una desigualdad evidentemente justa (por ejemplo, $1<2$ ó $(a-b)^2\geqslant 0$) después de lo cual llega a la conclusión: "por consiguiente, la desigualdad queda demostrada". En esto consiste el error lógico: ¡de esta desigualdad correcta obtenida no se deduce aún que la desigualdad inicial sea correcta! Hablando más precisamente, hemos demostrado lo siguiente: si suponemos que la desigualdad propuesta para la demostración es justa, la desigualdad obtenida por transformaciones también es justa. Pero, que esta desigualdad final es justa, lo sabemos sin estas conclusiones y en nada nos hemos enterado de la desigualdad que habría de ser demostrada.

Sería lógicamente justo razonar en sentido contrario. Es necesario tomar una desigualdad, evidentemente válida, y realizar con ésta tales transformaciones (legítimas, claro está, desde el punto de vista de las reglas del Algebra y Trigonometría) que nos conduzcan a la desigualdad que tenía que ser demostrada. Este razonamiento ya es de pleno valor: hemos partido de la desigualdad justa y por medio de unas transformaciones legítimas hemos llegado a una nueva desigualdad que por eso también es justa.

Desde luego, nos queda una pregunta fundamental: ¿de cuál desigualdad hay que partir y cómo debe transformarse para llegar a la desigualdad requerida? Para responder a esta pregunta puede realizarse la transformación de la desigualdad propuesta que nos conduce a una desigualdad evidentemente justa. Sin embargo, esta etapa de la solución del problema ha de considerarse no como la demostración sino como *la búsqueda* de la demostración, como el intento de encontrar una vía correcta. Si como resultas de esta búsqueda, es decir, de estas transformaciones, hemos logrado llegar a una desigualdad evidentemente válida, puede iniciase la demostración verdadera: hay que tomar esta desigualdad y realizar con ella todas las transformaciones que se hacían durante la búsqueda, pero en sucesión inversa, por así decirlo: "invertir" el curso de los cálculos. Si este curso de cálculos inverso va siendo legítimo todo el tiempo, entonces la desigualdad a demostrar es realmente válida.

Por lo demás, a menudo se procede de otra manera. Si en el transcurso de la búsqueda de la demostración, en el proceso de reducción de nuestra desigualdad a la evidente, hemos sustituido cada vez la desigualdad por otra, equivalente (véase § 10, Parte I), entonces la última desigualdad es igual a la inicial y por razón de su validez se deduce inmediatamente que la desigualdad inicial es válida. Por consiguiente, no se requiere ningún "curso de cálculos inverso", si en cada etapa de la transformación hemos comprobado y subrayado especialmente la equivalencia de las desigualdades respectivas.

Precisamente, aprovechemos estos razonamientos para la demostración de las siguientes desigualdades.

4. *Demostrar la desigualdad*

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3, \quad \textit{donde } a>0,\ b>0.$$

Sustituyamos esta desigualdad por una equivalente:

$$\frac{a^3+b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \geqslant 0.$$

Sacándola del paréntesis y reagrupándola puede escribirse en una forma equivalente:

$$\frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Ya que $a>0$ y $b>0$, esta desigualdad es evidente con lo que queda demostrada la validez de la desigualdad inicial equivalente a la primera.

5. *Demostrar que si* $a>0$, $b>0$, *entonces para cualesquier* x *e* y *es justa la desigualdad*

$$a\cdot 2^x + b\cdot 3^y + 1 \leqslant \sqrt{4^x+9^y+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2+1}.$$

Según la condición del problema, ambos miembros de esta desigualdad son positivos, por lo cual es equivalente a la siguiente (véase § 10, Parte I):

$$(a\cdot 2^x + b\cdot 3^y + 1)^2 \leqslant (4^x+9^y+1)(a^2+b^2+1),$$

o bien, a la siguiente:

$$a^2\cdot 4^x + b^2\cdot 9^y + 1 + 2ab2^x3^y + 2a2^x + 2b3^y \leqslant 4^xa^2 + 4^xb^2 + 4^x + \\ + 9^ya^2 + 9^yb^2 + 9^y + a^2 + b^2 + 1.$$

Permutando todos los términos de esta desigualdad al primer miembro, reduciendo en él los términos semejantes y reagrupándolos, la escribiremos en una forma equivalente:

$$(a^29^y - 2ab2^x3^y + 4^xb^2) + (4^x - 2a2^x + a^2) + (9^y - 2b\cdot 3^y + b^2) \geqslant 0.$$

En vista de que cada paréntesis es un cuadrado exacto, obtenemos entonces que la desigualdad inicial es equivalente a la siguiente desigualdad evidente:

$$(a3^y - b2^x)^2 + (2^x - a)^2 + (3^y - b)^2 \geqslant 0.$$

De tal modo, la desigualdad inicial es válida.

Notemos que esta desigualdad es también válida para cualesquier a y b (al lector se le deja la demostración de este caso).

6. *Demostrar que para cualesquier x es válida la desigualdad*

$$-1 \leqslant \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen} x}{2+\cos x} \leqslant 1.$$

Esta desigualdad es equivalente (véase § 4, Parte I) a la desigualdad $|(\sqrt{3}\operatorname{sen} x)/(2+\cos x)| \leqslant 1$. Como ambos miembros de esta desigualdad no son negativos, entonces, al elevarla al cuadrado y multiplicarla por la expresión positiva $(2+\cos x)^2$, obtenemos la desigualdad equivalente $3\operatorname{sen}^2 x \leqslant (2+\cos x)^2$. Sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x$ por $1-\cos^2 x$ y haciendo la agrupación pertinente, obtenemos que $(2\cos x+1)^2 \geqslant 0$. Esta desigualdad es válida para todas x y por tanto, que es equivalente a la desigualdad inicial, esta última es también válida; lo que era necesario demostrar.

La desigualdad inicial se puede demostrar también de otro modo, al utilizar la desigualdad (1). En realidad, ya que $2+\cos x>0$ para toda x, entonces, al multiplicarla por $2+\cos x$, obtenemos la siguiente doble desigualdad, equivalente a la inicial:

$$-2-\cos x \leqslant \sqrt{3}\operatorname{sen} x \leqslant 2+\cos x.$$

La primera de estas desigualdades se puede anotar en la forma

$$-2 \leqslant \sqrt{3}\operatorname{sen} x + 1\cdot\cos x.$$

Ahora se ve que esto es un caso particular de la desigualdad (1), es decir, es una desigualdad válida. Análogamente se demuestra la validez de la segunda desigualdad.

7. *Demostrar que para cualquier α es válida la desigualdad* $4\operatorname{sen} \times 3\alpha + 5 \geqslant 4\cos 2\alpha + 5\operatorname{sen}\alpha$.

Durante la demostración de esta desigualdad resultó uno de los errores más graves: "la demostración" se realizó por sustitución de algunos valores.

Algunos estudiantes razonaban más o menos así: "Para $\alpha=0°$ esta desigualdad es válida, porque $5>4$; para $\alpha=30°$ esta desigualdad es válida, porque $4+5>4\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{2}$, para $\alpha=45°$, $60°$, $90°$ es evidentemente válida. Por lo tanto, esta desigualdad es válida también para todas α".

En realidad, el estudiante ha demostrado la desigualdad sólo teniendo presente algunos valores particulares de α y nada ha demostrado para las demás α. Y la demostración correcta se la puede realizar, por ejemplo, así.

Como se sabe, $\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$, $\cos 2\alpha = 1-2\operatorname{sen}^2\alpha$. Por esto, la desigualdad inicial se puede anotar del modo siguiente:

$$4(3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha)+5 \geqslant 4(1-2\operatorname{sen}^2\alpha)+5\operatorname{sen}\alpha,$$

o bien,

$$16\operatorname{sen}^3\alpha - 8\operatorname{sen}^2\alpha - 7\operatorname{sen}\alpha - 1 \leqslant 0.$$

La última desigualdad tiene que ser satisfecha para cualquier α. Al designar $\operatorname{sen}\alpha$ por x, la anotaremos en la forma

$$16x^3-8x^2-7x-1\leqslant 0.$$

Nos hace falta demostrar que esta desigualdad es justa para cualquier x en el intervalo $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Apliquemos a esta desigualdad el método de agrupación ya utilizado anteriormente. La última desigualdad puede representarse así:

$$8x^2(x-1)+7x(x^2-1)+(x^3-1)\leqslant 0,$$

o bien, de esta otra forma: $(x-1)(4x+1)^2\leqslant 0$. Esta desigualdad es evidentemente válida, quedando demostrada la desigualdad inicial.

Para la demostración de unas desigualdades es preciso utilizar con habilidad las propiedades de las funciones que forman parte de una desigualdad a demostrar.

8. *Demostrar que para todas x es justa la desigualdad*

$$\cos(\cos x)>0.$$

Para todas x tenemos $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$. Designemos $\alpha=\cos x$. Entonces obtenemos que $-1\leqslant\alpha\leqslant 1$. Ya que $-\pi/2<-1$ y $1<\pi/2$, es mucho más que α satisface la condición $-\pi/2<\alpha<\pi/2$. De la propiedad de la función $y=\cos x$ se desprende que $\cos\alpha$ es positivo para todas estas α, lo que era necesario demostrar.

9. *Demostrar la desigualdad* $\cos(\operatorname{sen}x)>\operatorname{sen}x(\cos x)$.

La desigualdad a demostrar se puede representar en la forma

$$\cos(\operatorname{sen}x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cos x\right)>0,$$

o bien,

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{2}\right)>0.$$

Mostremos que los factores del primer miembro de esta desigualdad son positivos.

Ya que

$$|\operatorname{sen}x-\cos x|=|\sqrt{2}\operatorname{sen}(x-\pi/4)|\leqslant\sqrt{2}<\pi/2,$$

entonces

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{2}<\frac{\pi}{4},$$

y por eso,

$$0<\frac{\pi}{4}+\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{2}\right)>0$$

para todas x. Así mismo se demuestra que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{2}\right)>0.$$

En los siguientes ejemplos la aplicación de las propiedades de una función exponencial $y=a^x$ es decisiva: *si $a>1$, entonces al mayor valor del argumento le corresponde el mayor valor de la función y, por consiguiente, al mayor valor de la función le corresponde el mayor valor del argumento; si $a<1$, entonces al mayor valor del argumento le corresponde el menor valor de la función y, por consiguiente, al mayor valor de la función le corresponde el menor valor del argumento.*

10. *Demostrar que para los números positivos c y d y para cualquier $\alpha>0$, las desigualdades $c<d$ y $c^\alpha<d^\alpha$ son equivalentes.*

Sean c y d números positivos y $\alpha>0$. Consideremos la función $y=(c/d)^x$.

Si $c<d$, entonces $0<c/d<1$. Según la propiedad de la función exponencial en la base menor que 1, obtenemos

$$\left(\frac{c}{d}\right)^\alpha<\left(\frac{c}{d}\right)^0,$$

de donde se deduce que $c^\alpha/d^\alpha<1$, es decir, $c^\alpha<d^\alpha$.

Al contrario, si $c^\alpha<d^\alpha$, entonces $c^\alpha/d^\alpha<1$, o sea,

$$\left(\frac{c}{d}\right)^\alpha<\left(\frac{c}{d}\right)^0.$$

Esto significa que al mayor valor del argumento $(\alpha>0)$ de nuestra función le corresponde el menor valor de la función. Pero, así resulta sólo en el caso en que su base es menor que 1, es decir, cuando $c/d<1$, de donde $c<d$.

La afirmación demostrada se enuncia corrientemente del modo siguiente: la desigualdad entre los números positivos se puede elevar a cualquier potencia positiva; en particular, se puede extraer la raíz de cualquier potencia.

11. *Demostrar la desigualdad*

$$(a^\alpha+b^\alpha)^{1/\alpha}\leqslant(a^\beta+b^\beta)^{1/\beta}$$

para $a\geqslant0,\ b\geqslant0,\ \alpha>\beta>0$.

Si $a=0$ ó $b=0$, entonces la afirmación a demostrar es evidente. Ahora bien, sean $a>0$ y $b>0$. Está claro que uno de estos números no supera al otro. Por ejemplo, sea $0<a\leqslant b$. En este caso $0<a/b\leqslant$ $\leqslant1$, y ya que $\alpha>\beta$, entonces

$$0<(a/b)^\alpha\leqslant(a/b)^\beta \quad \text{y} \quad 1+(a/b)^\alpha\leqslant1+(a/b)^\beta.$$

De la última desigualdad se deduce (véase el ejemplo 10) que

$$[1+(a/b)^\alpha]^{1/\beta}\leqslant[1+(a/b)^\beta]^{1/\beta}.$$

Luego, ya que
$$1+(a/b)^{\alpha}\geqslant 1 \quad \text{y} \quad 0<1/\alpha<1/\beta,$$
obtenemos que
$$[1+(a/b)^{\alpha}]^{1/\alpha}\leqslant[1+(a/b)^{\alpha}]^{1/\beta}.$$

Ahora se puede escribir que
$$[1+(a/b)^{\alpha}]^{1/\alpha}\leqslant[1+(a/b)^{\alpha}]^{1/\beta}\leqslant[1+(a/b)^{\beta}]^{1/\beta},$$

de donde se deduce que
$$\left(\frac{a^{\alpha}+b^{\alpha}}{b^{\alpha}}\right)^{1/\alpha}\leqslant\left(\frac{a^{\beta}+b^{\beta}}{b^{\beta}}\right)^{1/\beta}.$$

Ya que $b>0$, de la última desigualdad se deriva la desigualdad que fue propuesta para la demostración.

12. *Demostrar la desigualdad* $0<\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x\leqslant 1$.

Absolutamente claro que $\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x\geqslant 0$. Sin embargo, la igualdad $\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x=0$ puede cumplirse solamente cuando simultáneamente $\operatorname{sen}^8 x=0$ y $\cos^{14} x=0$, lo que es imposible, sin duda. Por esto es justa la desigualdad rigurosa $\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x>0$.

De las propiedades de las funciones trigonométricas se desprende que $\operatorname{sen}^2 x\leqslant 1$ y $\cos^2 x\leqslant 1$ para cualesquier x-reales. Pues, ya que $8>2$ y $14>2$, se deduce de aquí que
$$\operatorname{sen}^8 x\leqslant\operatorname{sen}^2 x \quad \text{y} \quad \cos^{14} x\leqslant\cos^2 x.$$

Sumando, miembro a miembro, estas desigualdades y tomando en consideración que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, obtendremos
$$\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x\leqslant 1.$$

Es evidente que para $x=\pi/2$, por ejemplo, en esta desigualdad se logra una igualdad, es decir, es imposible sustituir una desigualdad no estricta por una estricta $\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x<1$.

Uno de los procedimientos de demostración de la desigualdad consiste en lo siguiente. Por ejemplo, es necesario demostrar que la desigualdad $A<B$, donde A y B son ciertas expresiones. Si logramos *hallar* la expresión C cuando $A<C$ y $C\leqslant B$ simultáneamente, entonces quedará demostrada la desigualdad $A<B$.

13. *Demostrar que para cualquier número entero positivo* n *es válida la desigualdad*
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Al deducir que
$$\frac{2}{(2k+1)^2}<\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2},$$

sustituimos la suma del primer miembro de la desigualdad a demostrar por una expresión *mayor*,

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)\right].$$

No obstante, esta última expresión es igual a

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4n+4}$$

y es, evidentemente, menor que 1/4. Por consiguiente, la suma

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}$$

será mucho menos de 1/4.

14. *Demostrar que para cualquier número natural* $n>1$ es válida *la desigualdad*

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right).$$

Para la demostración vamos a reducir cada sumando de la suma del primer miembro:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$

Por eso, el primer miembro de la desigualdad a demostrar puede ser reducido:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{2}-\sqrt{1})+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+$$
$$+\ldots+2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Ya que el segundo miembro de la última desigualdad es precisamente igual a $2\sqrt{n+1}-2$, entonces la desigualdad a demostrar es justa.

En el siguiente ejemplo, nos lleva a la solución una combinación acertada de los factores.

15. *Demostrar que* $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, *donde n es un número entero mayor que* 1.

Lo justo de esta desigualdad va a deducirse de la validez de la desigualdad siguiente, que es igual a la primera:

$$(n!)^2<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}.$$

Multipliquemos el número $n!=1\cdot 2\ldots k\ldots(n-1)\,n$ por el número $n!=n\,(n-1)\ldots(n-k+1)\ldots 2\cdot 1$ disponiéndolos uno debajo del otro:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2\dots & k & \dots & (n-1)\,n \\ n(n-1)\dots & & (n-k+1) & \dots & 2\ \ 1. \end{array}$$

Al multiplicar los números de cada columna, obtendremos que

$$(1\cdot n)\quad [2\,(n-1)]\dots[k\,(n-k+1)]\dots[(n-1)\cdot 2]\cdot(n\cdot 1).$$

Para obtener $(n!)^2$ es necesario multiplicar los miembros de este renglón. Aplicando a cada miembro de este renglón la desigualdad (2), obtenemos

$$\sqrt{k\,(n-k+1)} \leqslant \frac{k+n-k+1}{2} = \frac{n+1}{2}, \quad k=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

con la cual el signo de desigualdad se logra aquí sólo cuando $k = n - k + 1$, es decir, para $k = (n+1)/2$. En otras palabras, solamente para los n impares, y sólo para un miembro de nuestro renglón de esta desigualdad es posible el signo de igualdad. Por esto, para todos los paréntesis y corchetes, con excepción de uno, son válidas las desigualdades

$$[k\,(n-k+1)] < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Puesto que en el renglón hay n miembros, obtenemos que

$$(n!)^2 < \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right]^n.$$

Por el método de inducción matemática se puede demostrar una gran cantidad de desigualdades.

16. *Demostrar que para cualquier número real* $\alpha \geqslant -1$ y cualquier *número entero positivo n es válida la desigualdad*

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha. \tag{4}$$

La desigualdad para $n=1$ es, evidentemente, válida. Supongamos que es válida la desigualdad $(1+\alpha)^k \geqslant 1 + k\alpha$ y demostremos que lo es también la desigualdad $(1+\alpha)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)\alpha$. Efectivamente, $(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)^k \cdot (1+\alpha) \geqslant (1+k\alpha)(1+\alpha) = 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2 \geqslant 1 + (k+1)\alpha$. De tal modo, la desigualdad inicial es justa.

17. *Demostrar que para cualquier número entero positivo n tiene lugar la desigualdad* $|\operatorname{sen} nx| \leqslant n\,|\operatorname{sen} x|$.

La desigualdad para $n=1$ es, evidentemente, justa. Suponiendo que $|\operatorname{sen} kx| \leqslant k \cdot |\operatorname{sen} x|$, demostremos que $|\operatorname{sen}(k+1)\,x| \leqslant (k+$

$+1)\cdot|\operatorname{sen} x|$. Efectivamente, utilizando la desigualdad $|\cos kx|\leqslant\leqslant 1$, tenemos

$|\operatorname{sen}(k+1)x|=|\operatorname{sen}\ kx\cdot\cos x+\operatorname{sen} x\cdot\cos kx|\leqslant|\operatorname{sen} kx|\cdot|\cos x|+$
$+|\operatorname{sen} x|\cdot|\cos kx|\leqslant|\operatorname{sen}\ kx|+|\operatorname{sen} x|\leqslant k|\operatorname{sen} x|+|\operatorname{sen} x|=$
$=(k+1)\cdot|\operatorname{sen} x|$.

Por consiguiente, la desigualdad requerida es justa.

18. *Demostrar el teorema: si el producto* $n\geqslant 2$ *de los números positivos es igual a* 1, *su suma es mayor o igual a* n, *es decir, si* $x_1x_2\ldots x_n=1$, $x_1>0$, $x_2>0$, $\ldots$, $x_n>0$, *entonces* $x_1+x_2+\ldots+x_n\geqslant n$.

Si $n=2$, entonces hay que demostrar la afirmación: si $x_1x_2=1$, entonces $x_1+x_2\geqslant 2$. Pero, esto es evidente ya que la media aritmética $(x_1+x_2)/2$ de dos números positivos es mayor o igual a la media geométrica $\sqrt{x_1x_2}=1$, es decir $x_1+x_2\geqslant 2$. Además de esto, la igualdad $x_1+x_2=2$ resulta sólo en el caso en que $x_1=x_2=1$.

Tomemos la hipótesis de la inducción y cualesquier números positivos $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$, que satisfacen la condición $x_1 \ldots \ldots x_{k-1}\, x_kx_{k+1}=1$. Si cada uno de estos números es igual a 1, entonces la suma $x_1+\ldots+x_k+x_{k+1}=k+1$, por razón de que la desigualdad demostrada es válida.

Si resulta que esto no es así, entonces entre ellos se encontrará un número mayor que 1 y un número menor que 1. Supongamos que $x_k>1$ y $x_{k+1}<1$. Entonces tenemos la igualdad

$$x_1\ldots x_{k-1}(x_kx_{k+1})=1.$$

Esto es el producto de k números, a causa de que es aplicable la hipótesis de la inducción y, podemos afirmar que

$$x_1+\ldots+x_{k-1}+x_kx_{k+1}\geqslant k.$$

Pues, entonces

$$x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}\geqslant k-x_kx_{k+1}+x_k+x_{k+1}=$$
$$=k+1+(x_k-1)(1-x_{k+1})>k+1,$$

porque $x_k-1>0$ y $1-x_{k+1}>0$, lo que era necesario demostrar.

Notemos que hemos establecido el hecho de que el signo de igualdad de la relación a demostrar es posible sólo en el caso cuando todas $x_i=1$; si todos x_i no son iguales a 1, entonces en la relación a demostrar está el signo de desigualdad rigurosa.

De este teorema resulta *una desigualdad generalizada entre la media aritmética y la media geométrica de los números positivos para* $n\geqslant 2$:

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\ldots x_n},\quad x_1>0,\ \ldots,x_n>0. \qquad (5)$$

Efectivamente, designemos $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$ por c y x_i/c por y_i. Entonces $y_1\ldots y_n=(x_1\ldots x_n)/c^n=1$. Según lo demostrado, $y_1+\ldots+y_n\geqslant\geqslant n$, de donde $(x_1+\ldots+x_n)/n\geqslant c$; esto es lo que era necesario demostrar.

Esta desigualdad se aplica ampliamente para la demostración de otras desigualdades. Por ejemplo, si la aplicamos a los números 1, 2, ..., n, obtenemos inmediatamente la desigualdad

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\ldots n}<\frac{1+2+\ldots+n}{n},$$

o bien, $\sqrt[n]{n!}<(n+1)/2$, de donde $n!<[(n+1)/2]^n$. Esta desigualdad la hemos demostrado en el ejemplo 15 por un procedimiento especial. La nueva demostración es evidentemente más fácil.

Los ejemplos examinados muestran que el método de inducción matemática se aplica con éxito para la demostración de diferentes desigualdades. Al mismo tiempo, no hay que exagerar el poder del método de inducción matemática: hay muchos problemas para cuya resolución el método de inducción parece muy conveniente, pero los intentos de aplicarlo tropiezan con dificultades insuperables.

Por ejemplo, tratemos de demostrar una desigualdad valiéndonos del método de inducción matemática:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Para $n=1$ esta desigualdad tiene la forma $1/9<1/4$, o sea, es justa. Supongamos que la desigualdad a demostrar es válida para $n=k$:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Para $n=k+1$ el primer miembro es igual a

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+3)^2}=\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}\right]+\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

Según la tesis de la inducción, la suma entre corchetes es menor que 1/4, por lo que

$$\frac{1}{9}-\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+3)^2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

Está claro, que es absolutamente imposible deducir de la desigualdad que su primer miembro es menor que 1/4. De tal modo, la demostración según la inducción entró en un callejón sin salida. Al mismo tiempo, esta desigualdad se demuestra muy fácilmente de otro modo, como fue hecho en el ejemplo 13.

En resumen, proporcionemos dos desigualdades para cuya demostración se utilizan tanto los procedimientos mencionados como algunos otros; estas desigualdades pueden ser resueltas por procedimientos que se basan en Algebra, Trigonometría y hasta en Geometría.

19. *Demostrar que si el número* $x^2+y^2=1$, *entonces* $-\sqrt{2}\leqslant x+$ $+y\leqslant\sqrt{2}$.

Resolución algebraica. Anotemos una desigualdad evidente: $(x-y)^2 \geqslant 0$, o bien, $x^2+y^2 \geqslant 2xy$. De aquí se deduce: $2(x^2+y^2) \geqslant x^2+2xy+y^2$. Por cuanto $x^2+y^2=1$, entonces de la última desigualdad tenemos $(x+y)^2 \leqslant 2$, de donde (véase fórmula 3, § 4, Parte I) $|x+y| \leqslant \sqrt{2}$, es decir, $-\sqrt{2} \leqslant x+y \leqslant \sqrt{2}$.

Resolución trigonométrica. Si x e y satisfacen la condición $x^2+y^2=1$, entonces se puede hallar tal ángulo α que $x=\cos\alpha$, $y=\operatorname{sen}\alpha$. En este caso nos hace falta demostrar que para cualquier α

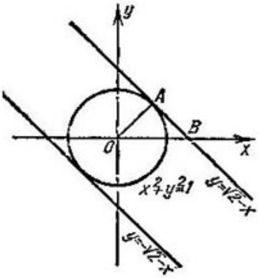


Fig. 16

$$-\sqrt{2} \leqslant \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \leqslant \sqrt{2}.$$

Ya que $\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\alpha+\pi/4)$ y $-1 \leqslant \operatorname{sen}\cdot(\alpha+\pi/4) \leqslant 1$, entonces $-\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}\operatorname{sen}(\alpha+\pi/4) \leqslant \sqrt{2}$ para cualquier α, lo que demuestra la desigualdad requerida.

Resolución geométrica. Examinemos x e y como las coordenadas de los puntos en un plano con el sistema de coordenadas dado. Entonces, a la condición $x^2+y^2=1$ le satisfacen los puntos (x, y) que se encuentran en la circunferencia de radio 1 con el centro en el origen de las coordenadas (fig. 16). Los puntos que satisfacen la desigualdad $x+y \leqslant \sqrt{2}$, se encuentran en la recta $y=\sqrt{2}-x$ y por debajo de esta recta (compárese el ejemplo 27, § 13, Parte I).

Sean B un punto de intersección de esta recta con el eje de abscisas, y OA una perpendicular bajada del origen de las coordenadas a la recta. Resulta entonces que $OB=\sqrt{2}$, $\angle ABO=45^\circ$ por razón de que $OA=1$. Por consiguiente, el punto A se encuentra sobre la circunferencia, y la recta $y=\sqrt{2}-x$ es perpendicular al radio OA en su extremo, es decir, es tangente a la circunferencia.

Análogamente, a la desigualdad $-\sqrt{2} \leqslant x+y$ le satisfacen los puntos que se encuentran en la recta $y=-\sqrt{2}-x$ y por encima de ésta; esta recta es también tangente a la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Por lo tanto, a la desigualdad doble que se demuestra, le satisfacen los puntos situados en la faja entre las rectas paralelas $y=\sqrt{2}-x$ e $y=-\sqrt{2}-x$ (incluyendo a estas rectas). Sin embargo, la circunferencia $x^2+y^2=1$ se halla por completo en esta faja, y, por consiguiente, las coordenadas de cualquier punto suyo satisfacen la desigualdad $-\sqrt{2} \leqslant x+y \leqslant \sqrt{2}$, lo que era necesario demostrar.

20. *Sea $a+b=2$, donde a y b son los números reales. Demuéstrese que $a^4+b^4 \geqslant 2$.*

Notemos que si uno de los números a y b es negativo entonces la desigualdad es casi evidente. Por ejemplo, sea $b<0$. En este caso $a>2$ y la desigualdad $a^4+b^4\geqslant 2$ es correcta, porque $b^4>0$ y $a^4>16$. Por lo tanto, consideremos en lo ulterior que $a\geqslant 0$ y $b\geqslant 0$.

Primera resolución. Ya que $a+b=2$, entonces $(a+b)^2=4$. Valiéndose de la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica $ab\leqslant(a^2+b^2)/2$, tenemos $4=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant\leqslant 2(a^2+b^2)$, es decir, $2\leqslant a^2+b^2$. Al elevar al cuadrado esta desigualdad (cosa que es justa porque en ambos miembros se hallan números positivos) obtendremos:

$$4\leqslant(a^2+b^2)^2.$$

Sobre la base de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica $a^2b^2\leqslant(a^4+b^4)/2$. Por eso tenemos $4\leqslant(a^2+b^2)^2=a^4+b^4+$ $+2a^2b^2\leqslant 2(a^4+b^4)$, de donde $2\leqslant a^4+b^4$, lo que era necesario demostrar.

Segunda resolución. Consideremos de nuevo que $a\geqslant 0$ y $b\geqslant 0$. Ya que $a+b=2$, entonces $(a+b)^4=16$, o bien,

$$(a+b)^4=(a^2+2ab+b^2)\quad(a^2+2ab+b^2)=a^4+b^4+4ab(a^2+ \\ +b^2)+6a^2b^2=16.$$

Puesto que $a^2+b^2=4-2ab$, puede expresarse la última desigualdad así:

$$a^4+b^4=16-16ab+2a^2b^2.$$

Si podemos demostrar que $16-16ab+2a^2b^2\geqslant 2$, entonces nuestra desigualdad quedará demostrada.

En las condiciones del problema tenemos $ab\leqslant 1$. Efectivamente, $\sqrt{ab}\leqslant(a+b)/2$. Ya que $a+b=2$, entonces $\sqrt{ab}\leqslant 1$, de donde $ab\leqslant 1$.

De esa manera, nos hace falta demostrar la desigualdad $16-16ab+$ $+2a^2b^2\geqslant 2$ a condición de que $ab\leqslant 1$.

Designemos $x=ab$. En este caso es necesario demostrar la desigualdad $x^2-8x+7\geqslant 0$ a condición de que $x\leqslant 1$. Las raíces del trinomio de segundo grado x^2-8x+7 son: $x_1=1$, $x_2=7$. Por lo tanto, la última desigualdad puede escribirse así: $(x-1)\ (x-7)\geqslant 0$.

Pero, para $x\leqslant 1$ esta desigualdad es evidente. Por esto hemos obtenido $16-16ab+2a^2b^2\geqslant 2$, lo que era necesario demostrar.

Tercera resolución. Sean $a=1+c$, $b=1-c$. Ya que hemos supuesto más arriba que $a\geqslant 0$ y $b\geqslant 0$, se deduce que $-1\leqslant c\leqslant 1$. Por esto podemos aprovecharnos de la desigualdad (4) (véase el ejemplo 16):

$$(1+c)^4\geqslant 1+4c,\quad (1-c)^4\geqslant 1-4c.$$

De tal modo,

$$a^4+b^4=(1+c)^4+(1-c)^4\geqslant(1+4c)+(1-4c)=2.$$

En conclusión, señalemos que tiene lugar una afirmación más general: *si* $a+b=2$, *entonces* $a^n+b^n\geqslant 2$ *para cualquier número entero positivo* n. Es fácil demostrar esto, por ejemplo, por el método expuesto anteriormente.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que para cualesquiera números reales a, b y c

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

2. Demostrar que si a, b, c son números positivos y no iguales entre sí, entonces

a) $(a+b+c)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})>9$;

b) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>9abc$.

3. Demostrar que $a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2(a+b+c)$.

4. Demostrar que para todas x del intervalo $0<x<\pi/2$ es válida la desigualdad $\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x\geqslant 2$.

5. Demostrar que si a y b son números positivos distintos de 1, entonces $|\log_a b+\log_b a|\geqslant 2$.

6. Demostrar que $(1/\log_2\pi)+(1/\log_{4.5}\pi)<2$.

7. Demostrar que para cualesquier x e y reales se satisface la desigualdad $x^2+ 2xy+3y^2+2x+6y+3\geqslant 0$.

8. Demostrar que $\operatorname{sen}^4 x-6\operatorname{sen}^2 x+5\geqslant 0$ para todas x.

9. Demostrar que el polinomio $x^8-x^5+x^2-x+1$ es positivo para todos los valores reales de x.

10. Demostrar qui si $a+b=c$, $a>0$, $b>0$, entonces $a^{2/3}+b^{2/3}>c^{2/3}$.

11. Sea n un número positivo. Demostrar la desigualdad

$$(1+1/n)^n<(1+1/2n)^{2n}.$$

12. Demostrar que qara cualquier número entero positivo n es válida la desigualdad

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+2}>1.$$

13. Demostrar que $(n!)^2>n^n$, donde $n>2$ es un número entero positivo.

14. Demostrar que $n!>2^{n-1}$, donde $n>2$ es un número entero positivo.

15. Demostrar que es válida la desigualdad $(a+b)^n<2^n\cdot(a^n+b^n)$ para cualesquier a y b positivas y cualquier número entero positivo n.

16. Demostrar que la suma de los catetos de un triángulo rectángulo no es mayor que la diagonal de un cuadrado construido sobre la base de la hipotenusa.

17. Demostrar que la suma de cubos de los catetos de un triángulo rectángulo es menor que el cubo de la hipotenusa.

18. Demostrar que el cuadrado tiene mayor área que cualquier rectángulo del mismo perimetro.

19. Demostrar que el área de un triángulo arbitrario no supera un cuarto del cuadrado de su medio perímetro.

Hallar los valores máximo y mínimo de las funciones:

20. $y=5\cos 2x-4\operatorname{sen} 2x$.

21. $y=3^{x-1}+3^{-x-1}$.

22. $y=\dfrac{x^2}{x^4+1}$.

23. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

24. Demostrar que $2^{\operatorname{sen} x}+2^{\cos x}\geqslant 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ para todas x. ¿Con cuáles valores de x se logra la igualdad?

25. Demostrar que es válida la desigualdad $\operatorname{cotg}(x/2)>1+\operatorname{cotg} x$ para todas x del intervalo $0<x<\pi/2$.

§ 9. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Los problemas de ecuaciones no se consideran, por lo común, difíciles: de esto testimonia el hecho de que la mayoría de los estudiantes (según su opinión) cumplen esta tarea. Al mismo tiempo, muchos problemas encierran en sí dificultades y los estudiantes cometen graves errores.

Tal situación parece extraña, aunque sólo a primera vista. Para muchos graduados de la escuela secundaria hay una distancia enorme entre los hábitos de cálculo práctico obtenidos y la comprensión consciente de los fundamentos teóricos lógicos, sin los cuales es imposible resolver acertadamente una ecuación (quizás por casualidad, pero contar con esto sería, desde luego, absurdo).

Esto se manifiesta durante las resoluciones: la mayoría de los estudiantes pueden simplificar una ecuación con ayuda de cálculos infalibles, pero no cada uno puede percibir cómo y por qué estos cálculos conducen a la pérdida o la adquisición de las raíces, y muchos hasta no reflexionan en esto. Otros, aunque conocen bien las tesis teóricas respectivas, empero las conocen formalmente, como una instrucción, expresan una incapacidad absoluta en una situación un poco variada.

Digamos que los escolares saben bien que al elevar ambos miembros de una ecuación irracional al cuadrado pueden aparecer raíces extrañas. ¡Pero, cuántas veces se puede ver cuando la elevación al cuadrado se aplica a una ecuación trigonométrica sin omisión siguiente de las raíces extrañas! Aunque no es difícil evitar este error sabiendo por qué la elevación al cuadrado da origen a la aparición de raíces extrañas. Veamos el problema referente a la comprobación. Entre los estudiantes existen dos opiniones del todo opuestas. Unos consideran que la comprobación es un capricho de los profesores a que debe obedecerse a la fuerza, otros piensan que la comprobación es siempre obligatoria y comprueban todo, incluso las raíces de la ecuación de segundo grado. Estas opiniones se basan en la incomprensión absoluta de la comprobación, del lugar que ésta debe ocupar durante la resolución.

En pocas palabras, cada cual tiene que poseer aquel mínimo de conocimientos teóricos que se requieren para la resolución de ecuaciones. Nos detendremos brevemente en este mínimo.

Expongamos las definiciones:

1. *Llámase recinto de valores admisibles* (RVA) *de una ecuación al conjunto de valores de una incógnita para los cuales tienen sentido (son definidos) sus primero y segundo miembros.* Todo número x del RVA de una ecuación se considera *admisible* para la ecuación dada.

2. *Llámase número a la solución o la raíz de una ecuación si sustituimos por éste la incógnita y la ecuación se transforma en una igualdad numérica correcta.*

De acuerdo con esta definición, la solución de una ecuación entra obligatoriamente en su RVA; de otra manera, durante la sustitución resultaría no una igualdad numérica correcta sino un absurdo.

3. *La resolución de una ecuación consiste en hallar todas sus raíces o demostrar que no tiene raíces.*

4. *Si todas las raíces de una ecuación son también raíces de otra ecuación, entonces la segunda ecuación se denomina corolario de la primera.*

5. *Dícese que dos ecuaciones son equivalentes si cada una de éstas es el corolario de otra.* De esta definición se deduce que las ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones.

6. *Dos ecuaciones en un conjunto de valores de la incógnita son equivalentes si tienen las mismas soluciones pertenecientes a este conjunto.*

Para ilustrar estas nociones daremos dos ejemplos.

El recinto de valores admisibles de la ecuación $x-3=\sqrt{x}$, según la definición consta de los valores de x para los cuales tiene sentido su primer miembro $x-3$ y el segundo miembro $\sqrt{x}$. Es evidente que el primer miembro está definido para cualquier x, y el segundo miembro, cuando $x\geqslant 0$. Por lo tanto, el RVA de la ecuación consta de $x\geqslant 0$.

Mientras tanto, muchos estudiantes afirman incorrectamente que el RVA consta de $x\geqslant 3$, porque "para $x<3$ el primer miembro es negativo y el segundo miembro no puede ser negativo". La afirmación entre comillas es justa y, en el curso de la resolución de la ecuación dada, se emplea: la afirmación muestra que *las raíces* de la ecuación no son menores que 3. Pero, de ninguna manera se deduce de aquí que todos *los valores admisibles* son menores que 3: ¡porque no todos los valores admisibles son raíces!

Consideremos dos ecuaciones

$$\log_6(x-2)+\log_6(x+3)=2 \quad \text{y} \quad \log_6(x-2)(x+3)=2.$$

Es cierto que toda raíz de la primera ecuación es raíz de la segunda, por lo tanto, la segunda ecuación es un corolario de la primera. La segunda ecuación se resuelve con facilidad; sus raíces son: $x_1 = 6$ y $x_2 = -7$. La raíz x_2 no satisface la primera ecuación ni siquiera entra en su RVA. De tal modo, las dos ecuaciones en cuestión *no son equivalentes*, pero si *lo son en* el RVA de *la primera ecuación* (en este RVA tienen una sola raíz $x = 6$).

Es fácil comprender por qué esto es así. El RVA de la primera ecuación consta de $x > 2$ y el RVA de la segunda ecuación es más amplio: en éste entra, además de estas x, también $x < -3$. Es natural que al pasar de la primera ecuación a la segunda ya ha aparecido la raíz extraña $x = -7$ que no pertenece al RVA de la primera ecuación.

¿Y cómo se aplican los conceptos introducidos durante la resolución de las ecuaciones? El hecho es que en la mayoría aplastante de los casos la solución resulta sólo después de una serie de transformaciones y pasos de una ecuación a otra. De tal modo, durante la resolución, cada ecuación se sustituye una por otra nueva, y la nueva ecuación puede tener, naturalmente, nuevas raíces. El problema de la resolución correcta de las ecuaciones consiste precisamente en seguir esta variación de las raíces, no perdarlas y saber omitir las extrañas.

Está claro que el mejor procedimiento es el de sustituir cada vez la ecuación siguiente por una equivalente a ésta; entonces, las raíces de la última ecuación serán raíces de la inicial. Sin embargo, esta vía ideal es irrealizable habitualmente en la práctica. Como regla, la ecuación se sustituye por su corolario, diciendo en general, que no es equivalente; en este caso, según la definición del corolario, todas las raíces de la primera ecuación son las de la segunda, es decir, *no tiene lugar una pérdida de raíces sino que pueden aparecer raíces extrañas* (aunque pueden no aparecer). Y en el caso cuando la ecuación, durante las transformaciones, se sustituye, aunque una sola vez, por el corolario que no es equivalente, es obligatoria la investigación de las raíces obtenidas, siendo ésta la comprobación. Notemos en seguida que esta investigación, como lo veremos a continuacion, no exige obligatoriamente la sustitución directa de las raíces obtenidas en la ecuación inicial.

De tal modo, si la resolución se efectuaba sin análisis de la equivalencia y fuentes de aparición de las raíces extrañas, entonces la comprobación es parte integrante de la resolución, sin la cual aquélla no puede ser considerada como válida, aunque no hayan aparecido, en realidad, las raíces extrañas. Si éstas han aparecido y permanecen no omitidas, la solución es realmente incorrecta. Por otra parte, si en cada oportunidad la ecuación se sustituye por una equivalente (como ya hemos dicho, esto sucede muy raramente), entonces no hace falta realizar la comprobación; con todo eso, de este hecho ya se habló especialmente en el curso de la resolución. De tal modo, la comprobación durante la resolución de ecuaciones juega un papel muy esencial, y de ningún modo se reduce a un control simple de los cálculos. En lo que se refiere al control de los cálculos, eso es un asunto particular de los que resuelven la ecuación; que se realice o no este control depende del procedimiento del cálculo, de la seguridad en sí mismo.

Vamos a subrayar que no se puede sustituir una ecuación por otra que no sea su corolario, porque en este caso *hay una raíz de la primera ecuación que no es de la segunda*, por lo cual, al resolver esta segunda ecuación, no hallaremos todas las raíces de la primera. Y como resultado, tendrá lugar *la pérdida de una raíz*, la que será *irreparable*. En esto consiste la diferencia esencial entre la pérdida de raíces y la adquisición de raíces extrañas.

Estas son las tesis teóricas. Pero, en la práctica hay que saber precisa y concretamente cuáles son las fuentes de adquisición y de pérdida de raíces. Estas fuentes son, por lo común, de dos tipos: las así llamadas "transformaciones idénticas" y la toma de ambos miembros de la ecuación de ciertas funciones (elevación a potencia, logaritmación, potenciación, etc.).

"Las transformaciones idénticas" parecen a primera vista inofensivas, aunque en realidad conducen frecuentemente a las ecuaciones no equivalentes, por cuanto aquéllas cambian el RVA. En efecto, al sustituir $\sqrt{(2x+1)^2}$ por $2x+1$ en la resolución de una ecuación irracional extendemos el RVA, porque $2x+1$ tiene sentido para todas las x, y $(\sqrt{2x+1})^2$ sólo para $x \geqslant -1/2$. Así se procedió en el ejemplo considerado por nosotros anteriormente: la aplicación de la fórmula del logaritmo de un producto nos condujo a la extensión del RVA y, como resultado de esto, a la aparición de una raíz estraña.

No hay nada de particular en esto, porque la mayoría de las fórmulas que nosotros aplicamos para las transformaciones son tales que sus primero y segundo miembros tienen sentido para los diferentes valores de las letras que los integran. Por ejemplo, así sucede con las fórmulas que siguen:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b},\quad (\sqrt{x})^2=x,\quad \lg_a xy=\lg_a x+\lg_a y,\quad \log_a x^n=n\log_a x,$$

$$a^{\log_a b}=b,\quad \operatorname{cotg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x},\quad \operatorname{sen} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$$

Por lo tanto, la sustitución de una parte de la fórmula por la otra origina una extensión o reducción del RVA. Está claro que, debido a la extensión del RVA, es posible adquirir raíces extrañas y, como consecuencia de la reducción, es posible perderlas; por eso es inadmisible la reducción del RVA. En lo que se refiere a las raíces extrañas, en el caso cuando éstas se han adquirido a cuenta de la extensión del RVA, no es necesario sustituirlas directamente en la ecuación inicial para la separación de las raíces de esta última, sino que es suficiente comprobar si entran o no en su RVA; si resulta que no entran, se han de omitir y si entran, hay que dejarlas.

Este hecho tiene importancia excepcional para la práctica de la resolución de ecuaciones por lo que merece destacarlo especialmente.

A. *Si en el curso de las transformaciones de una ecuación pueden surgir raíces extrañas solamente a costa de la extensión del RVA, entonces en calidad de raíces de la ecuación inicial van a ser aquéllas, y sólo aquéllas que entran en el RVA.*

La utilización de esta afirmación nos libera de la sustitución directa de las raíces obtenidas en una ecuación, y de la comprobación técnica de las igualdades numéricas correspondientes, la que resulta a veces muy difícil o bien imposible debido a una cantidad infinita de números a comprobar.

De esta manera, en lugar de *la sustitución directa* se puede utilizar *la comprobación de si entran o no en el RVA* las raíces extrañas, aunque esto sólo se hace en el caso cuando la fuente de su aparición es única: la extensión del RVA. Por consiguiente, para utilizar tal comprobación es obligatorio señalar, en el curso de la resolución, dónde y por cuenta de qué pueden aparecer las raíces extrañas.

En cuanto a la toma de las funciones de ambos miembros de las ecuaciones, consideremos solamente dos ejemplos de los más importantes: *la elevación al cuadrado* y *la potenciación*.

Con frecuencia sucede pasar (muy en particular durante la resolución de ecuaciones irracionales) de una ecuación $f(x)=g(x)$ a la ecuación $[f(x)]^2=[g(x)]^2$. ¿Y qué ocurre con las raíces durante este paso? Es evidente que la segunda ecuación es un corolario de la primera: si el número a es una raíz de la primera ecuación, es decir, $f(a)=g(a)$, entonces $[f(a)]^2=[g(a)]^2$, o sea, a es una raíz de la segunda ecuación. Pero, hablando en general, lo contrario no es correcto: a la segunda ecuación le satisfacen también las raíces de la ecuación "extraña" $f(x)=-g(x)$. De tal modo, con la elevación al cuadrado, las raíces no se pierden, pero pueden aparecer las raíces extrañas.

En la práctica es muy útil la afirmación que se deduce de lo expuesto.

B. *Si los dos miembros de una ecuación no son negativos en un conjunto de valores del argumento, entonces, al elevarlos al cuadrado, resulta una ecuación equivalente a la inicial en el mismo conjunto.*

Efectivamente, en este caso la ecuación "extraña" no tiene, evidentemente, raíces, a no ser aquellas para las cuales ambos miembros se convierten en cero, pues tales raíces no son extrañas para nuestra ecuación. Mostremos con los ejemplos concretos que siguen, cómo se emplea esta afirmación en la práctica.

Análogamente se considera la potenciación de la ecuación, es decir, el paso de la ecuación $\log_c f(x) = \log_c g(x)$ a la ecuación $f(x) = g(x)$. Sea a una raíz de la ecuación inicial, es decir, $\log_c f(a) = \log_c g(a)$. Entonces, $c^{\log_c f(a)} = c^{\log_c g(a)}$, o sea, $f(a) = g(a)$. Por consiguiente, toda raíz de una ecuación inicial es también raíz de la segunda. Por otra parte, el RVA de la segunda ecuación es más extenso que el de la primera debido a que es de esperar que surjan raíces extrañas, pero precisamente a cuenta de la extensión del RVA. Vale decir que para la solución es suficiente hallar las raíces de la segunda ecuación y comprobar si éstas entran o no en el RVA de la primera ecuación.

Tal es el "caudal" teórico de que debe disponer cada estudiante. Al mismo tiempo conviene subrayar que no siempre es rasonable la aplicación de esta teoría y durante la resolución de los problemas no hay que pasar el límite de lo necesario, aspirando siempre a una resolución más sencilla. Supongamos que durante la resolución se ha esclarecido que la comprobación ordinaria de las raíces obtenidas no presenta dificultades, entonces no hay que enterarse de las fuentes de adquisición de las raíces ni interesarse por la variación del RVA en el curso de la resolución, ni suquiera hallar el RVA; si esta comprobación presenta dificultades, nos ayudan precisamente razonamientos teóricos: en un lugar adecuado hay que analizar la transformación que podría dar origen a las raíces extrañas.

Al mismo tiempo, durante la resolución cualquiera se debe estar seguro de que las raíces no van perdiéndose. Es útil señalar esto especialmente en los casos cuando la transformación es bastante complicada.

A continuación, mostramos con ejemplos concretos algunos de los casos más típicos, así como los orígenes más insidiosos (no todos, claro está) de adquisición de raíces extrañas, entre las cuales podrían citarse fórmulas para la transformación de los radicales, identidad logarítmica fundamental y fórmulas para la logaritmación del producto y de la potencia, omisión del denominador, eliminación recíproca de los términos semejantes, sustitución de la ecuación por un conjunto de ecuaciones más simples, ciertas consideraciones "verbales". Luego examinemos las fuentes de pérdida de las raíces, y ciertos ejemplos ulteriores, los más difíciles, se estudian teniendo por objetivo señalar algunas dificultades de otra índole, no relacionadas con la pérdida y adquisición de las raíces.

1. *Resolver la ecuación* $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5$.

Al elevar ambos miembros de la ecuación al cuadrado y aplicar las fórmulas de transformación de los radicales, obtenemos la ecuación

$$2x-6+2\sqrt{(2x-6)(x+4)}+x+4=25,$$

o bien,

$$2\sqrt{2x^2+2x-24}=27-3x. \qquad (1)$$

Al elevar de nuevo al cuadrado ambos miembros de la ecuación y al librarnos de radical, llegamos a la ecuación $x^2-170x+825=0$, cuyas raíces son $x_1=5$ y $x_2=165$. La sustitución directa de estos valores en la ecuación inicial denota que x_1 es su raíz y x_2 no lo es.

En lo que se concierne a esta ecuación no hay necesidad de insistir en determinada teoría, digamos, en la que explique de dónde surgió la raíz extraña; es necesario señalar simplemente que en el curso de las transformaciones, las raíces no podían perderse, y al fin de la resolución debe realizarse la comprobación por sustitución directa. En esto consiste la resolución completa.

Notemos, pues, que la raíz extraña apareció al elevar al cuadrado la ecuación (1), apareció como la raíz de "la ecuación extraña".

El siguiente ejemplo es tan simple como el anterior, pero durante la comprobación de una "buena" raíz surgen inesperadamente ciertas dificultades de carácter de principio.

2. *Resolver la ecuación*

$$\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}.$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros y realizar las transformaciones necesarias, obtenemos

$$2\sqrt{(5x+7)\ (3x+1)}=7x+5.$$

Después de la segunda elevación al cuadrado obtenemos la ecuación cuadrática $11x^2+34x+3=0$, cuyas raíces son $x_1=-1/11$, $x_2=-3$. La comprobación directa demuestra que $x=-1/11$ es la raíz de la ecuación inicial.

Algunos estudiantes, al comprobar el valor de $x=-3$, llegan a la igualdad $\sqrt{-8}-\sqrt{-8}=0$. Considerando que esta igualdad es justa porque en su primer miembro "de lo igual se resta lo igual". De este modo, el valor de $x=-3$ les parece una raiz de la ecuación inicial. Pero, este argumento es infundado, ya que la expresión $\sqrt{-8}$ no tiene sentido: como se sabe, las ecuaciones irracionales se consideran sólo dentro del recinto de los números enteros positivos y el símbolo $\sqrt{a}$ se emplea en cuanto a los números enteros positivos a sólo para la designación de la raíz aritmética de un número a no negativo. Por lo tanto, el valor de $x=-3$ no entra en el RVA y, por consiguiente, no es una raíz de la ecuación inicial.

Otras circunstancias tienen lugar en el ejemplo siguiente, en el cual la comprobación de las raíces "malas" obtenidas es una tarea muy difícil. El método más simple de su resolución está relacionado precisamente con la aplicación de la teoría considerada, cuando en el mismo curso de la resolución se toman en cuenta las fuentes de aparición de las raíces extrañas.

3. *Resolver la ecuación* $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=4$.

Ambos miembros de la ecuación dada no son negativos en el RVA, por lo cual, una vez que ésta ha sido elevada al cuadrado, obtendremos una ecuación equivalente a la ecuación inicial en su RVA [1], lo que se deduce de la afirmación B:

$$(\sqrt{x+3})^2+2\sqrt{x+3}\sqrt{2x-1}+(\sqrt{2x-1})^2=16.$$

Utilizando las fórmulas de transformación de los radicales que extienden, evidentemente, el RVA llegaremos a la ecuación

$$2\sqrt{2x^2+5x-3}=14-3x. \tag{2}$$

Con tales transformaciones, las raíces extrañas pueden surgir solamente a cuenta de la extensión del RVA.

Luego razonamos del modo siguiente. El primer miembro de la ecuación (2) no es negativo para cualquier (admisible) valor de x, mientras que el segundo miembro es negativo para $x>14/3$. Está claro que este valor de x no puede ser una solución de la ecuación. Por eso, examinemos la ecuación (2) sólo dentro del recinto $x\leqslant 14/3$. Pues, ambos miembros de la ecuación (2) en este recinto no son negativos (claro está que para los valores de x de la ecuación (2)), y según la afirmación B, al elevarlos al cuadrado, obtendremos una ecuación equivalente a (2) en el conjunto $x\leqslant 14/3$:

$$(2\sqrt{2x^2+5x-3})^2=(14-3x)^2.$$

De aquí, al extender una vez más el RVA, llegamos a la ecuación cuadrática $x^2-104x+208=0$, cuyas raíces son: $x_{1,2}=52\pm 8\sqrt{39}$. Como se ve, estas raíces entran en el RVA de la ecuación inicial; por esto hay que sólo comprobar si éstas satisfacen o no la condición $x\leqslant 14/3$. No es difícil verificar que $x_1>14/3$ y $x_2<14/3$, de donde se deduce que x_2 es la raíz única de la ecuación (2) y, por consiguiente, de la ecuación inicial.

Subrayemos una vez más que debe recurrirse a tal resolución detallada y "teórica" sólo en el caso cuando estemos convencidos de que las raíces son "malas", o sea, que su sustitución directa en la ecuación conduce a una tarea bastante complicada: a la demostración o la refutación de las igualdades

$$\sqrt{55+8\sqrt{39}}+\sqrt{103+16\sqrt{39}}=4,$$
$$\sqrt{55-8\sqrt{39}}+\sqrt{103-16\sqrt{39}}=4.$$

[1] En realidad, estas ecuaciones son equivalentes, por cuanto sus RVA coinciden, pero esto no tiene importancia para nosotros; en lo ulterior extendemos el RVA, ya que la comprobación de que si entra o no en el RVA es inevitable.

Es claro que la primera de estas igualdades es incorrecta. En cuanto a la segunda igualdad, se puede demostrar fácilmente conociendo la fórmula de transformación de las expresiones de tipo $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. El otro método, que es la elevación al cuadrado, está relacionado con cálculos bastante difíciles. Es evidente que estos dos métodos son más complicados que el expuesto por nosotros, donde sólo se requería comprobar las raíces x_1 y x_2 en cuanto a la satisfacción de la condición $x \leqslant 14/3$. Sin embargo, en este ejemplo se puede, a pesar de todo, superar las dificultades de una comprobación directa y evitar la aplicación de la teoría.

No obstante, en las ecuaciones que contienen un parámetro, la comprobación directa es más difícil, debido a que la aplicación de la teoría expuesta es un camino de resolución único.

4. *Resolver la ecuación* $x-1=\sqrt{a-x^2}$.

El segundo miembro de la ecuación no es negativo para cualquier (admisible) x y el primer miembro no es negativo cuando $x \geqslant 1$. Por lo tanto, la ecuación dada dentro del recinto de $x \geqslant 1$ es equivalente a la ecuación $(x-1)^2=(\sqrt{a-x^2})^2$ que se reduce a la forma

$$2x^2-2x+1-a=0 \tag{3}$$

(con esto el RVA se ha extendido y, al final, han de comprobarse las raíces obtenidas en cuanto a su pertenencia al RVA). De tal modo, hay que resolver la ecuación (3) y escoger de sus raíces aquellas para las cuales $x \geqslant 1$ y $a-x^2 \geqslant 0$. El discriminante de esta ecuación es igual a $2a-1$, de que se deduce que para $a<1/2$ ésta no tiene raíces reales, es más, la ecuación inicial no tiene raíces para estos valores de a.

Seguimos considerando que $a \geqslant 1/2$; las raíces de la ecuación (3) $x_{1,2}=(1 \pm \sqrt{2a-1})/2$. La raiz x_2 no satisface, evidentemente, la condición $x \geqslant 1$ y por eso no es la raíz de la ecuación inicial. Para aclarar la situación de x_1, es necesario resolver la desigualdad $(1+\sqrt{2a-1})/2 \geqslant 1$, o bien, $\sqrt{2a-1} \geqslant 1$; evidentemente, ésta es válida para $a \geqslant 1$. Por ello, para $a<1$ la ecuación inicial no tiene raíces y para $a \geqslant 1$ se debe comprobar si es válida la desigualdad $a-x_1^2 \geqslant 0$, lo que es equivalente a la desigualdad $a \geqslant \sqrt{2a-1}$. Ambos miembros de esta desigualdad no son negativos (estamos considerando que $a \geqslant 1$) (véase el § 10), lo que nos da la posibilidad de elevarlos al cuadrado; en este caso obtendremos $a^2 \geqslant 2a-1$ ó $a^2-2a+1 \geqslant 0$, que es válido para cualquier a.

De tal modo, para $a<1$ la ecuación inicial carece de raíces, y para $a \geqslant 1$, tiene la raiz $x=(1+\sqrt{2a-1})/2$.

Notemos que la comprobación de la última condición, $a-x^2 \geqslant 0$, absolutamente obligatoria por su lógica, puede ser realizada sin cálculos cualesquiera. En efecto, x_1 y x_2 son obtenidos como las raíces de la ecuación $(x-1)^2=a-x^2$ y, por consiguiente, su segundo miembro no es negativo para $x=x_1$ y $x=x_2$.

Subrayemos una vez más que la sustitución directa durante la comprobación de las raíces se reduciría a las ecuaciones respecto de a:

$$\frac{a\pm\sqrt{2a-1}}{2}-\sqrt{\frac{a\mp\sqrt{2a-1}}{2}}=1,$$

cuyo aspecto exterior nos infiere cierta confusión. De esa manera, los problemas similares van a presentar siempre grandes dificultades, sin haber dominado conscientemente el modo de resolver las ecuaciones.

La aplicación de diferentes fórmulas logarítmicas, en particular *las del logaritmo del producto*, son las que constituyen una de las fuentes más difundidas de aparición de las raíces extrañas. En realidad, sustituyendo $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ por $\log_a f(x)\ g(x)$, extendemos el RVA de la ecuación, admitiendo tales valores de x para los cuales $f(x)<0$ y $g(x)<0$ simultáneamente. Por lo tanto, las raíces extrañas pueden aparecer, pero *sólo a consecuencia de la extensión* del RVA, así que para dejarlas de lado, sobre la base de la afirmación A, es suficiente comprobar sólo el hecho de que éstas entran o no en el RVA. Notemos, además, que la sustitución inversa del logaritmo del producto por la suma de los logaritmos, puede inferir una reducción del RVA, lo que es inadmisible.

5. *Resolver la ecuación* $\log_2(x+2)+\log_2(3x-4)=4$.

Al logaritmar el producto, obtenemos $\log_2(x+2)\ (3x-4)=4$, de donde $(x+2)\ (3x-4)=16$. Las raíces de esta ecuación son: $x_{1,2}=$ $=(-1\pm\sqrt{73})/3$. Es fácil observar que de éstas sólo x_1 entra en el RVA de la ecuación inicial, que es su raíz según la afirmación A.

La sustitución directa de la raíz "mala" x_1 exigería los cálculos "irracional-logarítmicos", no muy complicados, pero desagradables, mientras que la utilización de la afirmación A ha facilitado de inmediato la respuesta.

La aparición de raíces extrañas, como resultado de la aplicación de la identidad logarítmica fundamental, suscita habitualmente una sorpresa entre los estudiantes, aunque no hay nada extraño en ello: esto sucede a cuenta de la extensión del RVA sustituyendo la expresión $a^{\log_a b}$ por b, si a ó b contienen una incógnita.

6. *Resolver la ecuación* $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x}=4$.

Suitituyendo $\log_{\sqrt{x}} 2x$ por $\log_x(2x)^2$ (véase el § 1) obtenemos la ecuación

$$x^{\log_x(2x)^2}=4.$$

Utilizando ahora la identidad fundamental, obtenemos $(2x)^2=$ $=4$, es decir, $x_1=-1$, $x_2=1$. Sin embargo, ni x_1 ni x_2 entran en el

RVA de la ecuación inicial: $x_1<0$, y $\sqrt{x_2}=1$ no puede ser base de los logaritmos. Por consiguiente, la ecuación dada no tiene raíces.

Las raíces extrañas pueden aparecer con menos evidencia que en los ejemplos arriba examinados.

Por lo general, esto está relacionado con lo que los razonamientos y cálculos empleados durante la resolución conducen a la extensión del RVA. En el ejemplo que sigue *las raíces extrañas surgen al eliminar recíprocamente los términos semejantes*. Mientras tanto, no hay nada extraño en esto: al efectuar tal eliminación, nosotros quitamos la limitación de que los sumandos eliminados han de tener sentido, extendiendo así el RVA.

7. *Resolver la ecuación*

$$\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2.$$

Transformemos $\lg\sqrt{1-x^2}$:

$$\lg\sqrt{1-x^2}=\lg\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x}+\lg\sqrt{1+x}.$$

Es fácil observar que con esta transformación el RVA de la ecuación dada no ha variado, y la ecuación obtenida

$$\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x}+\lg\sqrt{1+x}+2$$

es equivalente a la dada. Eliminando $\lg\sqrt{1+x}$ de ambos miembros, obtenemos la ecuación

$$2\lg\sqrt{1-x}=2,$$

cuyo RVA consta de los números $x<1$, o sea, como es fácil observar, es más extenso que el de la ecuación inicial. De tal modo, es de esperar que aparezcan raíces extrañas. Resolviendo la última ecuación, obtenemos la raíz $x=-99$ que no entra en el RVA de la ecuación inicial y por eso la raíz no le pertenece. Por lo tanto, la ecuación dada no tiene raíces.

Una de las causas de los errores radica en la omisión, explícita o implícita, del denominador. Pero, *al hacer omisión del denominador sucede una extensión* del RVA: se añaden aquellos valores de x para los cuales el denominador es igual a 0.

8. *Resolver la ecuación*

$$\frac{1}{\log_6(3+x)}+\frac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1.$$

Tomando la base 2 en todos los logaritmos, obtendremos, después de las transformaciones, una ecuación equivalente a la dada

$$\frac{\log_2 6-\log_2(4-x)}{\log_2(3+x)}=1. \qquad (4)$$

De ahí, $\log_2 6 - \log_2(4-x) = \log_2(3+x)$, y, seguidamente,

$$\frac{6}{4-x} = 3 + x. \qquad (5)$$

La última ecuación se reduce a la cuadrática; sus raíces son: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

En el curso de la resolución pueden surgir raíces extrañas, sólo a cuenta de la extensión del RVA, debido a la omisión del denominador en las ecuaciones (4) y (5). Por lo tanto, es suficiente comprobar las raíces obtenidas si éstas entran o no en el RVA de la ecuación inicial. Como resultado, obtenemos que x_2 no entra en el RVA, y x_1 entra en éste, y por eso constituye la raíz de la ecuación inicial.

La despreciación del RVA explica los errores que se cometen durante la resolución de las ecuaciones en el primer miembro de las cuales se halla una fracción, y en el segundo, cero. Durante la resolución de las ecuaciones de tal tipo, a menudo se omite el denominador y el numerador se iguala a cero. Pues, para lograr una solución correcta de tal ecuación conviene igualar a cero el numerador, hallar las raíces de la ecuación obtenida y omitir aquellas que convierten el denominador en cero.

9. *Resolver la ecuación* $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$.

Escribamos la ecuación dada en la forma

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} - \frac{\operatorname{sen} 5x}{\cos 5x} = 0,$$

de donde, una vez realizadas las transformaciones elementales, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 3x \cos 5x} = 0.$$

Ahora, resolviendo la ecuación $\operatorname{sen} 2x = 0$, obtenemos que $x = k\pi/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ De esta serie de soluciones nos queda por omitir las extrañas, o sea, aquellas para las cuales el denominador $\cos 3x \cos 5x$ se convierte en cero, lo que ocurre, evidentemente, cuando los valores de k son impares y, por consiguiente, las soluciones de la ecuación inicial serán los ángulos $x = k\pi/2$, donde k es un número *par*: $k = 2n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, a saber:

$$x = n\pi, \ n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

Está claro que sería un error grave considerar como solución la serie de valores de $x = k\pi/2$.

Por tal falta de atención al RVA se explican también los errores que se cometen en el curso de las resoluciones de las ecuaciones, cuyo primer miembro está descompuesto en factores, mientras que el segundo tiene cero. Para la resolución de tal ecuación, como regla, se igualan sucesivamente todos los factores a cero, y las soluciones obtenidas se reúnen. No obstante, durante tal resolución no se toma en consideración que para algunos valores de x, los cuales convierten un factor en cero, puede resultar que otro factor no tenga sentido, y en este caso estos valores de x no serán raíces de la ecuación examinada. Por lo tanto, para resolver correctamente la ecuación es indispensable comprobar complementariamente si todos los valores de x entran en el RVA. De vez en cuando, esto puede presentar grandes dificultades.

10. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{sen} 2x \cos^2 2x \operatorname{sen}^2 6x \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} 3x = 0.$$

Para lograr la solución, igualamos, sucesivamente, todos los factores a cero, de lo que resultan cinco series de raíces:

$$x = \frac{k\pi}{2}, \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{k\pi}{6},$$

$$x = k\pi, \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{6},$$

donde k es cualquier número entero.

Pero esto todavía no sirve de solución porque $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{cotg} 3x$ quedan determinados no para todos los valores de x, debido a que muchos valores de x de estas series pueden resultar extraños. Vamos a considerar por turno todas estas series.

1) $x = \frac{k\pi}{2}$. Si k es par, $k = 2l$, entonces $x = l\pi$ y $\operatorname{cotg} 3x$ no tiene sentido; si k es impar, $k = 2l + 1$, entonces $x = l\pi + \pi/2$ y $\operatorname{tg} x$ no tiene sentido.

De tal modo, ningún ángulo x de la primera serie presenta, en realidad, la solución de la ecuación.

2) $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$. Como se puede ver $\operatorname{tg} x$ tiene sentido. Además, $3x = (6k+3)\pi/4$, de que resulta que $\operatorname{cotg} 3x$ también tiene sentido.

De esta manera, todos los ángulos x de la segunda serie son soluciones de la ecuación.

3) $x = k\pi/6$. Según el círculo trigonométrico es fácil convencerse de que el ángulo x cae en el diámetro vertical cuando $k = 6l + 3$, y, por consiguiente, $\operatorname{tg} x$ tiene sentido para $k \neq 6l + 3$. Seguidamente, $3x = k\pi/2$ y $\operatorname{cotg} 3x$ tiene sentido solamente para los valores impares de k. De este modo, nos sirven sólo los valores impares de k, no iguales a $6l + 3$, o sea, los números k de la forma $k = 6l + 1$, $k = 6l + 5$.

De esta manera, entre los ángulos de la tercera serie sirven de soluciones sólo los ángulos

$$x = l\pi + \pi/6, \quad x = l\pi + 5\pi/6,$$

donde l es cualquier número entero.

4) $x = k\pi$. En este caso $\operatorname{cotg} 3x$ no tiene sentido y esta serie no tiene soluciones.

5) $x=(2k+1)\pi/6$. Valiéndose del círculo trigonométrico es fácil convencerse de que el ángulo x cae en el diámetro vertical cuando $k=3l+1$ y, por consiguiente, tg x tendrá sentido para $k=3l$, $k=3l+2$.

De esta manera, de la quinta serie de ángulos quedan solamente

$$x=l\pi+\pi/6, \quad x=l\pi+5\pi/6,$$

donde l es cualquier número entero, o sea, son los mismos ángulos que los de la tercera serie.

La solución definitiva se puede anotar así:

$$x=(2n+1)\pi/4; \quad x=n\pi+\pi/6; \quad x=n\pi+5\pi/6,$$

donde n es cualquier número entero, o más breve,

$$x=(2n+1)\pi/4; \quad x=n\pi\pm\pi/6,$$

donde n es cualquier número entero.

La adquisición de raíces extrañas no siempre sucede tan explícitamente como esto ocurrió en los dos últimos ejemplos. A veces, la causa de esto consiste en razonamientos muy simples a primera vista.

Por ejemplo, la ecuación $\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 5x$ antes examinada, se resuelve frecuentemente del modo siguiente: "Las tangentes de dos ángulos son iguales cuando y sólo cuando la diferencia de estos ángulos es igual a un múltiple entero π. Por consiguiente, $2x=k\pi$, $x=k\pi/2$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$". Sin embargo, como ya sabemos, la solución es incorrecta.

¿Y en qué estriba el error?

La causa se explica sencillamente: no es correcta la afirmación en que se basa esta resolución, aunque está muy difundida entre los estudiantes. Efectivamente, si $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$, entonces $\alpha-\beta=k\pi$, donde k es un número entero, no obstante la afirmación contraria es incorrecta: si $\alpha-\beta=k\pi$, entonces la igualdad $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$ no puede tener sentido (por ejemplo, si $\alpha=\pi/2$, $\beta=-\pi/2$). Por lo tanto, la sustitución de la ecuación $\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 5x$ por $2x=k\pi$ no infiere pérdidas de raíces, pero hace aparecer las extrañas.

Ahora vamos a examinar algunas fuentes de *pérdida de raíces* y los procedimientos necesarios para evitar esta pérdida. Los estudiantes pierden frecuentemente raíces al sustituir la ecuación dada por una nueva de un RVA más estrecho. Tal estrechamiento se origina, como lo veremos a continuación, tanto por las fórmulas logarítmicas y trigonométricas como por algunos razonamientos "verbales", muy populares.

Según ya hemos notado, la sustitución del logaritmo del producto por la suma de los logaritmos (regla I del § 6, Logaritmos) conduce al estrechamiento del RVA, así como lo estrecha la regla III, en que se trata de la logaritmación de la potencia. Para que no ocurra estrechamiento, no se utilizan las reglas I y III, sino las reglas I* y III*, cuya aplicación puede, por lo menos, extender el RVA, o sea, provocar la aparición de las raíces extrañas. Ya hemos visto anteriormente cómo proceder con las raíces extrañas.

Precisamente así procederemos al resolver el siguiente ejemplo.

11. *Resolver la ecuación*

$$\frac{3}{2}\log_{1/4}(x+2)^2-3=\log_{1/4}(4-x)^3+\log_{1/4}(x+6)^3.$$

Por cuanto

$$\log_{1/4}(x+2)^2=2\log_{1/4}|x+2|,$$

$$\log_{1/4}(4-x)^3=3\log_{1/4}(4-x),\quad \log_{1/4}(x+6)^3=3\log_{1/4}(x+6),$$

entonces la ecuación toma la forma

$$\log_{1/4}|x+2|-1=\log_{1/4}(4-x)+\log_{1/4}(x+6).$$

De aquí se deduce que

$$\log_{1/4}4\,|x+2|=\log_{1/4}(4-x)\,(x+6),$$

por lo cual

$$4\,|x+2|=(4-x)\,(x+6)$$

(como resultado de las dos últimas transformaciones tiene lugar una extensión del RVA, y por esto es de esperar que aparezcan raíces extrañas). Esta ecuación se resuelve muy sencillamente (véase el § 4), sus raíces son: $x_1=2$, $x_2=1-\sqrt{33}$.

En el curso de la resolución, las raíces extrañas pueden aparacer solamente a expensas de la extensión del RVA; por lo tanto, basándose en la afirmación A, los valores hallados de x_1 y x_2 es suficiente comprobarlos si entran o no en el RVA. Es fácil ver que todas las expresiones que se encuentran en la ecuación dada bajo el signo del logaritmo son positivas para $x=x_1$ y para $x=x_2$, así que ambos números entran en su RVA y son sus raíces.

La reducción del RVA y, por consiguiente, *la pérdida de raíces pueden suceder al pasar a una nueva base de los logaritmos.*

12. *Resolver la ecuación*

$$\log_{0,5x}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0.$$

Vamos a exponer una resolución. Nos aprovecharemos de la regla de transición tomando x en calidad de nueva base de los logaritmos:

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 0,5x}-\frac{14\log_x x^3}{\log_x 16x}+\frac{40\log_x\sqrt{x}}{\log_x 4x}=0.$$

Sin embargo, según se ve fácilmente, la nueva ecuación no tiene sentido para $x=1$, mientras que la inicial tiene sentido no sólo para $x=1$, también tiene unidad como su raíz. Precisamente, en este paso muchos pierden la raíz $x=1$.

Por consiguiente, hay que razonar así: queremos pasar a la base x; para hacer esto hay que estar seguro de que $x>0$ y $x\neq 1$. Ya que todas las x del RVA de nuestra ecuación son positivas, entonces la primera condición $x>0$ se satisface; por otra parte, la unidad entra en el RVA y la sustitución muestra que $x=1$ es la raíz. De tal modo, una raíz de la ecuación inicial queda hallada: $x=1$. Hallemos raíces distintas de 1. Entonces, podemos pasar a la base x sin perder raíces.

La solución ulterior no presenta dificultades: utilizando las propiedades de los logaritmos y designando $\log_x 2$ por y, tendremos

$$\frac{2}{1-y}-\frac{42}{1+4y}+\frac{20}{1+2y}=0.$$

Esta ecuación se reduce a la cuadrática $2y^2+3y-2=0$, cuyas raíces $y_1=1/2$, $y_2=-2$. Entonces obtendremos $\log_x 2=1/2$, de donde $x=4$, y $\log_x 2=-2$, de donde $x=1/\sqrt{2}$. Estos valores, 4 y $1/\sqrt{2}$, son raíces de la ecuación inicial. Por consiguiente, la ecuación inicial tiene tres raíces.

Un error muy grave y bastante difundido que conduce a la pérdida de raíces es *la reducción de ambos miembros de una ecuación por un factor común*. Está claro que en este caso pueden ser perdidas raíces que convierten este factor común en cero.

En estos casos más vale trasladar todo al primer miembro, sacar el factor común fuera de paréntesis y examinar dos casos: 1) el factor común es igual a cero; 2) el factor común no es igual a cero, y entonces la expresión entre paréntesis es obligatoriamente igual a cero. Se puede también examinar al principio un caso en que el factor común es igual a cero y luego hacer reducción por éste.

13. *Hallar todas las soluciones de la ecuación*

$$x^2 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}.$$

Examinemos dos casos.

a) Sea $x\geqslant 3$. En este caso tenemos la ecuación

$$x^2 2^{x+1}+2^{x-1}=x^2 2^{x+1}+2^{x-1},$$

que se satisface, evidentemente, para cualquier x. Por eso, en el caso examinado las soluciones de la ecuación dada serán $x\geqslant 3$.

b) Sea $x<3$. En este caso la ecuación tiene la forma

$$x^2 2^{x+1}+2^{5-x}=x^2 2^{7-x}+2^{x-1},$$

de donde

$$2^{x-1}(4x^2-1)=2^{5-x}(4x^2-1).$$

Este lugar es precisamente donde muchos estudiantes, dejándose arrastrar por las expresiones exponenciales "fundamentales", desprecian las potenciales "insignificantes", reduciendo, lisa y llanamente, por éstas y obteniendo una ecuación $2^{x-1}=2^{5-x}$. Después de esto se obtiene la raíz $x=3$, aunque ésta no satisface la condición b).

Es claro que antes de la reducción por $4x^2-1$ había que examinar la expresión $4x^2-1=0$. En este caso hubieran sido halladas las raíces $x_{1,2}=\pm 1/2$ que satisfarían la condición b).

De tal modo, las soluciones de la ecuación dada son: cualquier $x\geqslant 3$, $x_1=1/2$, $x_2=-1/2$.

Durante las resoluciones, los estudiantes a menudo utilizan incorrectamente la siguiente afirmación: "Si dos potencias son iguales, sus bases son iguales y *distintas* de 0 y 1, entonces los exponentes son también iguales. Como regla general, aquí se olvida la limitación destacada con cursiva. Y como resultado, se pierden aquellas raíces para las cuales la base es igual a 0, o bien, a 1.

14. *Resolver la ecuación* $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$.

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$x^{\sqrt{x}}=x^{x/2}.$$

De esta manera, los exponentes son iguales y las bases también son iguales. Para que no se pierdan las raíces, vamos a determinar si la base puede ser igual a 0 ó a 1. Ya que la expresión 0^0 no tiene sentido, entonces el número 0 no entra en el RVA, debido a que $x=0$ no sirve de raíz de la ecuación. Al contrario $x=1$ es, evidentemente, una raíz. Ahora vamos a hallar raíces distintas de 0 y 1. Aplicando la regla señalada, obtendremos $\sqrt{x}=x/2$, de donde hallamos la segunda raíz de la ecuación $x=4$.

A veces se oye decir una afirmación errónea: "Si la potencia de un número es igual a 1, entonces el exponente es igual a cero". Esto es válido sólo a condición de que la base difiera de 1. Y si la base es igual a 1, entonces, para cualquier exponente la base será igual a 1.

15. *Resolver la ecuación* $|\cos x|^{\operatorname{sen}^2 x-\frac{3}{2}\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}}=1$.

Razonemos así: si $|\cos x|=1$, entonces la potencia será igual a 1 para cualquier exponente. Si $|\cos x|\neq 1$, el exponente ha de ser indispensablemente igual a cero. De tal modo, nuestra ecuación se descompone en dos:

$$|\cos x|=1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x-\frac{3}{2}\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}=0.$$

Resolviendo la primera ecuación, obtenemos que $x_1=k\pi$, donde k es cualquier número entero, mientras que de la segunda se deduce:

$$\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}, \text{ de donde } \quad x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,$$

$$\operatorname{sen} x=1, \text{ de donde } \quad x_3=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

La comprobación muestra que los ángulos de la segunda serie no entran en el RVA (en el primer miembro resulta 0^0, lo que no tiene sentido), y las demás raíces satisfacen la condición.

En definitiva, las soluciones de la ecuación se presentan así:

$x_1 = k\pi$, $x_2 = (-1)^k \pi/6 + k\pi$ (k es un número entero).

De tal modo, al utilizar la regla de transición de la igualdad de potencias a la igualdad de exponentes hay que analizar tres casos: la base de la potencia es igual a 0; la base de la potencia es igual a 1; los exponentes son iguales. Este método de razonamientos permite evitar la pérdida de raíces.

No obstante, con tal solución pueden aparecer raíces extrañas. En efecto, en cada uno de estos casos se debe, hablando en términos generales, resolver una ecuación; y por cuanto estas tres ecuaciones se resuelven por separado, puede ocurrir que algunas soluciones suyas no entren en el RVA de la ecuación inicial. Precisamente así ocurrió en el último ejemplo, donde una parte de las soluciones de la segunda ecuación no entraron en el RVA de la ecuación inicial, y por eso fueron omitidas.

Por consiguiente, una vez utilizadas las reglas de transición de la igualdad de potencias a la igualdad de exponentes y después de la resolución de ecuaciones respectivas, hay que comprobarlas obligatoriamente. Con esto es suficente determinar que la raíz a comprobar entra en el RVA de la ecuación inicial; en este caso esta raíz va a satisfacerla.

A menudo, la causa de la pérdida de raíces radica en la aplicación de las fórmulas trigonométricas. Como se sabe, los ambos miembros de la fórmula trigonométrica pueden tener distintos recintos de valores admisibles. Tales son, por ejemplo, las fórmulas de la llamada "sustitución universal", que expresan el seno y el coseno por la tangente de un semiángulo. En estas fórmulas, el primer miembro tiene un recinto más extenso de valores admisibles, por eso, al sustituir el primer miembro de la fórmula por el segundo, estrechamos su RVA, es decir, nos arriesgamos a perder raíces.

16. *Resolver la ecuación* $\operatorname{sen} x - 2\cos x = 2$.

Pasando a la tangente del semiángulo, obtenemos

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{2\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 2,$$

de donde

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 \quad \text{y} \quad x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2n\pi,\ n = 0, \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Sin embargo, esta fórmula no contiene todas las soluciones: como es fácil comprobar, todos los ángulos $x = (2n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, son también su solución. Estos ángulos se han perdido, precisamente, al introducir la tangente del semiángulo. La ecuación inicial tiene sentido para cualquier x, y la segunda, sólo cuando $\operatorname{tg}(x/2)$ tiene sentido, es decir, para $x \neq (2n+1)\pi$.

Las observaciones más detalladas, relacionadas con las fórmulas trigonométricas, se exponen en el § 1, Parte II.

El problema acerca de la pérdida de raíces va relacionado estrechamente con la así llamada "*resolución por selección*". Ilustremos este método con algunos ejemplos.

17. *Resolver la ecuación* $3^x + 4^x = 5^x$.

Es evidente que $x=2$ es la raíz de la ecuación.

¿Y la ecuación ya está resuelta? Claro está que no. ¿Y si no hemos notado una raíz más? Por eso detenerse en este paso durante la resolución es cometer un error grave. Luego procederemos así: dividamos ambos miembros por 5^x y representemos la ecuación en la forma

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

De ahí se desprende: si $x<2$, entonces, según la función exponencial con una base menor que 1, $(3/5)^x > (3/5)^3$, $(4/5)^x > (4/5)^2$, así que $(3/5)^x + (4/5)^x > (3/5)^2 + (4/5)^2 = 1$; por consiguiente, $x<2$ no puede ser una raíz de la ecuación. Análogamente, para $x>2$ tendremos siempre la desigualdad $(3/5)^x + (4/5)^x < 1$.

De tal modo, la raíz obtenida por selección $x=2$ es única. Y con esto la ecuación está resuelta. Hemos hallado (no importa de qué modo) la raíz y demostrado que no hay otras raíces.

De este ejemplo se ve que la "*resolución por selección es un procedimiento legal si, después de la adivinación de algunas raíces, podremos demostrar rigurosamente que otras raíces no existen*. A propósito, de este modo es muy fácil resolver el ejemplo 1, examinado anteriormente:

$$\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5.$$

Es fácil escoger la raíz $x=5$. Pero, si $x>5$, entonces $\sqrt{2x-6} > \sqrt{10-6} = 2$, $\sqrt{x+4} > 3$, es decir, para $x>5$, el primer miembro es mayor que 5. Análogamente, para $x<5$, el primer miembro es menor que 5. Consecutivamente, $x=5$ es la raíz única.

Si nos limitamos solamente a adivinar las raíces y no demostraremos que no hay otras raíces, a menudo tal "resolución" puede conducir a la pérdida de raíces. Precisamente, el siguiente ejemplo entraña este peligro.

18. *Resolver la ecuación* $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$.

Algunos estudiantes resuelven esta ecuación así, Al escribirla en la forma

$$3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}} = 3^1 \cdot 2^1,$$

eligieron la raíz x de modo que los exponentes, de bases correspondientes, resultan iguales:

$$x = 1, \quad \frac{3x}{x+2} = 1,$$

de donde resulta "una solución": $x = 1$.

Sin embargo, esta "solución" no es correcta; dicho de otro modo, con tales consideraciones se ha hallado solamente una raíz de la ecuación y nada se ha hablado de otras raíces. En efecto, si los exponentes de bases adecuadas son iguales, entonces los productos de estas potencias también son iguales; no obstante, lo contrario no sale de nada y es absolutamente incorrecto. Por ejemplo, la igualdad

$$3^1 \cdot 2^1 = 3^2 \cdot 2^{\log_2 (2/3)}$$

es válida, pero $1 \neq 2$ y $1 \neq \log_2 (2/3)$. Por lo tanto, el razonamiento, citado anteriormente, puede dar origen a la pérdida de raíces, cosa que ocurre en la ecuación considerada.

Logaritmando ambos miembros de la ecuación inicial por la base 10, obtendremos que

$$x \lg 3 + \frac{3x}{x+2} \lg 2 = \lg 6,$$

o bien,

$$x^2 \lg 3 + x(3 \lg 2 + 2 \lg 3 - \lg 6) - 2 \lg 6 = 0.$$

Ahora hay que resolver esta ecuación cuadrática. Esto se puede hacer aplicando la formula conocida; pero, para simplificar la resolución obremos con cautela: ya estamos convencidos, por medio de la selección, de que $x_1 = 1$ es la raíz de la ecuación inicial y, por consiguiente, satisface la ecuación cuadrática equivalente a la inicial. Por eso, según el teorema de Viete, la segunda raíz de la ecuación cuadrática será $x_2 = (-2 \lg 6) / \lg 3 = -2 \lg_3 6$, es decir, la ecuación inicial tiene dos raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = 2 \lg_3 6$.

De tal manera, vemos que la adivinación de la raíz puede ser de utilidad. Sin embargo, no hace falta considerarla como una solución completa.

Frecuentemente, la dificultad principal consiste no en la pérdida y la adquisición de raíces de una ecuación, sino en otras cosas, no menos complejas. Consideremos algunos ejemplos.

19. *Resolver la ecuación*

$$\log_{1/(8 \cos^2 x)} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Por la definición del logaritmo, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{8\cos^2 x}}.$$

Esta ecuación es un corolario de la inicial, pero tiene, evidentemente, un RVA más extenso: efectivamente, su RVA consta de todos los valores de x para los cuales $\cos x \neq 0$, mientras que para la ecuación inicial han de ser, además de esto, satisfechas dos condiciones más: $1/\sqrt{8\cos^2 x} \neq 1$ y $\operatorname{sen} x > 0$. No obstante, estas ecuaciones son equivalentes, dado que cualquier raíz de la segunda ecuación entra en el RVA de la inicial; en realidad, si $\operatorname{sen} x_0 = 1/\sqrt{8\cos^2 x_0}$, entonces, primero, $\operatorname{sen} x_0 > 0$ y, segundo, $1/8\cos^2 x_0 \neq 1$; de otra manera, tendríamos $\cos^2 x_0 = 1/8$ y $\operatorname{sen} x_0 = 1$, lo que es imposible.

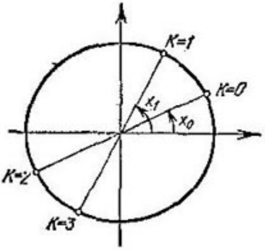


Fig. 17

Luego tenemos $\operatorname{sen} x\,|\cos x| = 1/(2\sqrt{2})$ (véase el § 4). Para resolver la ecuación es conveniente examinar dos casos siguientes.

a) $\cos x > 0$. Entonces tenemos una ecuación $\operatorname{sen} x \cos x = 1/(2\sqrt{2})$, o bien, $\operatorname{sen} 2x = 1/\sqrt{2}$. Sus soluciones se dan por la fórmula $x = (-1)^k \pi/8 + k\pi/2$, donde k es cualquier número entero. Pero, de estos valores hay que escoger sólo aquellos que satisfacen la condición $\cos x > 0$. Con este fin conviene determinar los valores de k para los cuales el valor correspondiente de x se halla en los cuadrantes I y IV, lo que es muy fácil demostrar, al representar las soluciones en el círculo trigonométrico. Para los valores de $k = 0, 1, 2, 3$, los ángulos respectivos están señalados en la fig. 17 (para otros valores de k los ángulos empiezan a repetirse a cada cuatro unidades). Nos convienen solamente los ángulos $x_0 = \pi/8$ y $x_1 = (-\pi/8) + (\pi/2) = 3\pi/8$, y las series obtenidas de éstos (para $k=4n$ y $k=1+4n$), o sea, los ángulos

$$x=\frac{\pi}{8}+2n\pi, \quad x=\frac{3\pi}{8}+2n\pi,$$

donde n es cualquier número entero.

b) $\cos x<0$. Este caso se considera de un modo análogo.

Como resultado de esto obtenemos cuatro series de soluciones:

$$x=\frac{\pi}{8}+2n\pi, \quad x=\frac{3\pi}{8}+2n\pi, \quad x=\frac{5\pi}{8}+2n\pi, \quad x=\frac{7\pi}{8}+2n\pi,$$

donde n es cualquier número entero.

Estas series pueden ser reunidas en dos:

$$x_1=(-1)^n\frac{\pi}{8}+n\pi, \quad x_2=(-1)^n\frac{3\pi}{8}+n\pi.$$

20. *Resolver la ecuación* $\operatorname{tg}(\pi\cos x)=\operatorname{cotg}(\pi\cos 2x)$.

Transformemos el segundo miembro:

$$\operatorname{cotg}(\pi\cos 2x)=\operatorname{cotg}[\pi(2\cos^2 x-1)]=\operatorname{cotg}(2\pi\cos^2 x)=$$
$$\operatorname{tg}(\pi/2-2\pi\cos^2 x).$$

De tal modo tenemos la ecuación

$$\operatorname{tg}(\pi\cos x)=\operatorname{tg}(\pi/2-2\pi\cos^2 x).$$

De aquí se deduce que

$$\pi\cos x-\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\cos^2 x\right)=k\pi,$$

donde k es cualquier número entero. Notemos seguidamente que, al pasar a esta ecuación, hemos extendido el RVA: en la ecuación inicial el RVA se determina por la condición

$$\pi\cos x\neq(\pi/2)+k\pi, \quad (\pi/2)-2\pi\cos^2 x\neq(\pi/2)+l\pi,$$

es decir, $\cos x\neq(1/2)+k$, $\cos^2 x\neq -l/2$ (k, l son números enteros), y en la nueva ecuación el RVA consta de todos los valores de x.

A continuación tenemos una ecuación $2\cos^2 x+\cos x-1/2=$ $=k$, o bien, $4\cos^2 x+2\cos x-(2k+1)=0$. De ahí

$$\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{8k+5}}{4}.$$

Ahora se debe aclarar para cuáles k las ecuaciones que siguen tienen soluciones

$$\cos x=\frac{-1-\sqrt{8k+5}}{4}$$

y

$$\cos x=\frac{-1+\sqrt{8k+5}}{4}.$$

Está claro que $k\geqslant 0$ (de otro modo, $8k+5<0$).

La primera ecuación tiene solución cuando

$$-1 \leqslant \frac{-1-\sqrt{8k+5}}{4} \leqslant 1.$$

La desigualdad de la derecha se cumple automáticamente y de la izquierda tenemos $\sqrt{8k+5} \leqslant 3$, esto es, $8k+5 \leqslant 9$, de donde se deduce que $k \leqslant 1/2 < 1$. Por consiguiente, la primera ecuación tiene solución sólo para $k=0$, y sus soluciones serán

$$x = \pm \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + 2n\pi \tag{6}$$

donde n es cualquier número entero.

Claro está que todas estas x entran en el RVA de la ecuación inicial, porque

$$\cos x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \neq \frac{1}{2} + k, \quad \cos^2 x = \frac{3+\sqrt{5}}{8} \neq -\frac{l}{2},$$

siendo sus soluciones.

La segunda ecuación tiene solución cuando

$$-1 \leqslant \frac{-1+\sqrt{8k+5}}{4} \leqslant 1,$$

o bien, $-3 \leqslant \sqrt{8k+5} \leqslant 5$, de donde $k \leqslant 5/2$. Por consiguiente, la segunda ecuación tiene solución para $k=0, 1, 2$ y sus soluciones van a ser representadas en la forma

$$x = \pm \arccos \frac{-1+\sqrt{8k+5}}{4} + 2n\pi, \tag{7}$$

$k=0, 1, 2$; n es cualquier número entero.

Todas estas x entran en el RVA de la ecuación inicial, siendo, de tal modo, sus soluciones.

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación inicial se determinan por las fórmulas (6) y (7).

EJERCICIOS:

Resolver las ecuaciones:

1. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4.$
2. $\sqrt{4x-1} - \sqrt{x-2} = 3.$
3. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+2} = 4.$
4. $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x-3} = -3.$
5. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{34+x} - \sqrt{7+x}.$
6. $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}.$
7. $\sqrt{14-x} = \sqrt{x-4} + \sqrt{x-1}.$
8. $(2x+1)^{3/2} - (13x/2) = 1.$

9. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

10. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[3]{(x-2)(x-3)}$.

11. $a\sqrt[4]{1+x}+\frac{a}{x}\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{x}$.

12. $2^{2x+2}-6^x-2\cdot 3^{2x+2}=0$.

13. $8^x-3\cdot 4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0$.

14. $4^x=2\cdot 14^x+3\cdot 49^x$.

15. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{101}{10(2-\sqrt{3})}$.

16. $\log_3(4^x+15\cdot 2^x+27)-2\log_3(4\cdot 2^x-3)=0$.

17. $(1+x/2)\log_2 3-\log_2(3^x-13)=3\log_{\sqrt{5/25}}5+4$.

18. $\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6$.

19. $\log_5\left[(2+\sqrt{5})^x-(\sqrt{5}-2)^x\right]=\frac{1}{2}-3\log_{1/5}2$.

20. $\frac{\log_8(8/x^2)}{(\log_8 x)^2}=3$.

21. $\frac{1}{2}\left(2^{\sqrt[3]{6x}}-10\cdot 2^{-\sqrt[3]{6x}}+1\right)=3\left(\log_{7\sqrt{7}}49-1\right)$.

22. $\lg^2 x^3-20\lg\sqrt{x}+1=0$.

23. $\log_x 3\cdot\log_{x/3}3+\log_{x/81}3=0$.

24. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=2/\log_4 x$.

25. $x^{x+1}=x$.

26. $x^{\log_3(x+3)^2}=16$.

27. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$.

28. $x^{(\log_3 x)^3-3\log_3 x}=3^{-3\log_2\sqrt[4]{2}}+8$.

29. $x^{\log_2^2 x^2-\log_2(2x)-2}+(x+2)^{\log_{(x+2)^2}4}=3$.

30. $x^{\frac{3}{(\log_3 x^2)^2}}=(\sqrt{x})^{-\log_3 x+\frac{1}{\log_3\sqrt{x}}}$.

31. $3^{\log_a x}+3\cdot x^{\log_a 3}=2$.

32. $\sqrt{\lg x}+\lg\sqrt{x}=-1/2$.

33. $\log_a(1-\sqrt{1+x})=\log_{a^2}(3-\sqrt{1+x})$.

34. $\log_{\sqrt{2x-1}}(2x-3)=2\log_8 4+\log_2(1/\sqrt[3]{2})$.

35. $1/2\log_3(-x-16)-\log_3(\sqrt{-x}-4)=1$.

36. $\frac{1+\log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}=1$.

37. $\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{4\log_4 x-2}=4$.

38. $\sqrt{1+\log_x\sqrt{27}}\log_3 x+1=0$.

39. $\log_{1/2}(x-1)+\log_{1/2}(x+1)-\log_{1/\sqrt{2}}(7-x)=1$.

40. $\log_{1/\sqrt{1+x}} 10 \cdot \log_{10} (x^2-3x+2) = -2 + \log_{1/\sqrt{1+x}} 10 \cdot \log_{10} (x-3)$.

41. $\log_3 (-x^2-8x-14) \cdot \log_{x^2+4+4x} 9 = 1$.

42. $2 \log_8 (2x) + \log_8 (x^2+1-2x) = 4/3$.

43. $\log_{x+1} (x^2+x-6)^2 = 4$.

44. $\log_3 (\sqrt{x} + |\sqrt{x}-1|) = \log_9 (4\sqrt{x}-3+|4\sqrt{x}-1|)$.

45. $2 \log_2 x - \log_{1/2} (13-x) = \log_2 (x-10)^2 = 2 \log_4 (8-x)$.

46. $2^{1+2\cos 5x} + 16^{\operatorname{sen}^2 (5x/2)} = 9$.

47. $3^{\operatorname{sen} 2x + 2\cos^2 x} + 3^{1-\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen}^2 x} = 28$.

48. $\frac{1}{2} + 16^{\operatorname{sen} x} = \frac{6}{16^{\cos^2 \left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$.

49. $3 (\log_2 \operatorname{sen} x)^2 + \log_2 (1-\cos 2x) = 2$.

50. $(\log_{\operatorname{sen} x} \cos x)^2 = 1$.

51. $\sqrt{\log_{\operatorname{sen} x} \cos x} = 1$.

52. $\log_{\sqrt{2}\operatorname{sen} x} (1+\cos x) = 2$.

53. $\lg \operatorname{sen} 2x - \lg \operatorname{sen} x = \lg \cos 2x - \lg \cos x + 2 \lg 2$.

54. $\log_2 \cos 2x - \log_2 \operatorname{sen} x - \log_2 \cos x = 1$.

55. $\lg \operatorname{sen} (x/2) = \lg (\cos x - \operatorname{sen} x) + \lg (\cos x + \operatorname{sen} x)$.

56. $\log_2 \operatorname{sen} x - \log_2 \cos x - \log_2 (1-\operatorname{tg} x) - \log_2 (1+\operatorname{tg} x) = 1$.

57. $(\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x} - 1 = \operatorname{cotg}^3 x$.

58. $(\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x} = (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$.

59. $\left| \cos \frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{4\cos \frac{x}{2}} \right|^{\sqrt{x^2+3x-10}} = 1$.

60. $(\cos 2x - \cos^4 x) \operatorname{cotg} 3x + \frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x}{8 \operatorname{sen} 3x} = 0$.

61. $\cos^2 x \operatorname{sen} 6x + 2 \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} 3x \cdot \cos 3x + \left(\frac{\cos^2 x}{\cos 3x} - \operatorname{sen}^2 x \right) \operatorname{sen} 6x = 0$.

62. $\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) \operatorname{sen} 2x \cos 2x \operatorname{cotg} 3x = 0$.

63. $\sqrt{\operatorname{sen} x} + \cos x = 0$.

64. $\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x = 1/2 \cos 3x + (1+\cos x)^{1/2}$.

65. $(\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x)^{1/2} + (\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)^{1/2} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} \cos x$.

66. $5^x + 12^x = 13^x$.

67. $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2^x$.

§ 10 RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES

Los errores, en su mayoría, están relacionados, con la resolución de desigualdades. En muchos casos la resolución de desigualdades que se proponen a los estudiantes no requiere ingeniosidad alguna, procedimientos artificiales, dado que los estudiantes, como regla general, perciben de inmediato qué cálculos han de hacerse para resolver la desigualdad. Sin embargo, muchos de ellos al verificar estos cálculos cometen errores graves, porque ignoran los conceptos teóricos fundamentales relacionados con la resolución de desigualdades.

Mientras tanto, la resolución de desigualdades no exige prácticamente nada, a no ser el conocimiento de reducir correctamente una desigualdad a la resolución de desigualdades más sencillas (sin perder soluciones ni adquirir soluciones extrañas) y de resolver estas últimas.

Para realizar la segunda parte de nuestra premisa es preciso conocer las propiedades elementales de las funciones que se estudian en la escuela secundaria: algebraicas, exponencial y logarítmica, y trigonométricas; para efectuar la primera parte hay que poseer conocimientos básicos relacionados con la equivalencia de las desigualdades y con las fuentes de pérdida de soluciones y adquisición de soluciones extrañas.

Las definiciones fundamentales necesarias para la resolución de las desigualdades repiten, casi palabra por palabra, las definiciones correspondientes a las ecuaciones (el § 9, Parte I). Mencionemos sólo dos diferencias en cuanto a la terminología: el término "raíz" no se utiliza para las desigualdades y siempre se dice "solución"; además de esto, para abreviar razonamientos, se dice a veces que la solución es un conjunto de valores de x, por ejemplo, el intervalo, $a<x<b$, mientras que en realidad se sobrentiende que la solución es cualquier valor de x de este conjunto.

La semejanza entre las ecuaciones y desigualdades no se limita, naturalmente, por la de las definiciones fundamentales. Está claro que todo lo dicho, por ejemplo, de las transformaciones de ecuaciones, que amplían o reducen el RVA, es válido también para las desigualdades.

Sin embargo, es indispensable subrayar que la resolución de desigualdades tiene sus particularidades relacionadas con el hecho de que las mismas transformaciones, aplicadas a las ecuaciones y desigualdades, originan diferentes resultados. Por ejemplo, al multiplicar ambos miembros de una ecuación por un factor distinto de cero (que tiene sentido en el RVA), la ecuación se sustituirá por una equivalente, y en cuanto a las desigualdades, los requerimientos dados respecto al factor son insuficientes, es necesario que éste no sea negativo en el RVA. Así mismo, al elevar al cuadrado ambos miembros de una ecuación, las raíces no se pierden y la misma transformación de la desigualdad puede originar adquisición y pérdida de soluciones. Lamentablemente, a veces los estudiantes olvidan estas particularidades, debido a que cometen tales errores durante la resolución de las desigualdades, mientras que los evitan al resolver las ecuaciones.

Por extraño que sea, los estudiantes cometen muchos errores al resolver las desigualdades elementales. Esto proviene, por lo visto, de la analogía formalmente comprensible entre las ecuaciones y desigualdades. El razonamiento es, más o menos, así: "Por cuanto la solución de la ecuación $\log_{1/2} x = 1$ es $x = 1/2$, resulta que la solución de la desigualdad $\log_{1/2} x > 1$ son los valores de $x > 1/2$". Análogamente, las soluciones de desigualdades $(1/5)^x < 2$ se presentan en forma de $x < \log_{1/5} 2$, etc. Mientras tanto, las soluciones de las dos desigualdades citadas son otras: de la primera, $0 < x < 1/2$, de la segunda, $x > \log_{1/5} 2$; de tal modo que "la analogía" así comprendida, entre las ecuaciones y las desigualdades, condujo a soluciones incorrectas.

En realidad, resolviendo las desigualdades elementales es necesario utilizar conscientemente las propiedades de las funciones que intervienen en estas desigualdades.

Ahora analicemos ejemplos con la resolución de las desigualdades elementales.

Notemos, ante todo, que la resolución de las desigualdades algebraicas de primero y segundo grado se explica en muchos libros

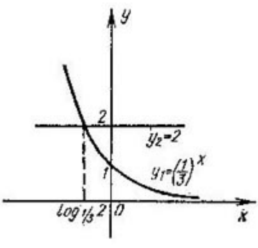


Fig. 18

de texto y, como regla, no presenta dificultades. El problema relacionado con la resolución de las desigualdades que contienen un valor absoluto, se examina en el § 4, Parte I.

Aquí nos detendremos en las desigualdades exponenciales, logarítmicas y trigonométricas elementales.

La desigualdad exponencial elemental será la desigualdad $a^x > a^b$ $(a^x < a^b)$. Al resolver tales desigualdades hay que recordar que las propiedades de una función exponencial son diferentes en las bases mayores o menores que 1.

1. *Resolver la desigualdad* $-1 \leqslant (1/3)^x < 2$.

Resolver la desigualdad doble significa hallar todos aquellos valores de x que satisfacen *simultáneamente* dos desigualdades:

$$(1/3)^x \geqslant -1 \quad \text{y} \quad (1/3)^x < 2.$$

Ya que la función exponencial es siempre positiva, entonces la primera de estas desigualdades se satisface con cualesquier valores de x.

Escribiendo la segunda desigualdad en forma de $(1/3)^x < (1/3)^{\log_{1/3} 2}$ utilizaremos la siguiente propiedad de la función exponencial: de la base menor que 1, el menor valor del argumento corresponde al mayor valor de la función y al contrario, al menor valor de la función le corresponde el mayor valor del argumento. Por lo tanto, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad $x > \log_{1/3} 2$.

Esta solución se ilustra bien mediante una gráfica (fig. 18). Precisamente, las soluciones son aquellos valores de x con los cuales la gráfica de la función $y = (1/3)^x$ se encuentra *por debajo* de la recta $y = 2$, es decir, todas las x *a la derecha* de la abscisa del punto de intersección de estas gráficas (esta abscisa es la solución de la ecuación $(1/3)^x = 2$). De tal modo, la solución de nuestra desigualdad está en el intervalo $x > \log_{1/3} 2$.

Al resolver las desigualdades que contienen la incógnita bajo el signo del logaritmo hay que tener en cuenta que las propiedades de la función logarítmica son diferentes cuando las bases son menores o mayores que 1. Sin embargo, para la resolución de estas desigualdades tiene también importancia que la función logarítmica está definida no para todos los valores de x. Al olvidar este hecho, algunos estudiantes resuelven la desigualdad $\log_2 x < 1$ del modo siguiente: "Expongamos nuestra desigualdad así: $\log_2 x < \log_2 2$. Con la base mayor que 1, el número mayor tiene el mayor logaritmo; por esto, la desigualdad se cumple para $x < 2$".

Parece que no hay nada erróneo en esta consideración aunque la solución es incorrecta, porque aparecieron soluciones extrañas. Efectivamente, cualquier número negativo es menor que dos, no obstante, con las x negativas, la desigualdad inicial no tiene sentido (ya que los números negativos no tienen logaritmos).

¿Y por qué aparecieron soluciones extrañas? Durante "la resolución" de la desigualdad pasamos de la desigualdad $\log_2 x < \log_2 2$ a la desigualdad $x < 2$. La última desigualdad tiene sentido para todos los valores de x, y la desigualdad inicial, sólo para aquellas x para los cuales tiene sentido $\log_2 x$, es decir, para $x > 0$. Por consiguiente, las soluciones extrañas resultaron por falta de consideración de que la función logarítmica está definida solamente para x positivas.

Para obtener la solución correcta, de las soluciones de la última desigualdad es necesario escoger los valores de $x > 0$, o sea, la solución de nuestra desigualdad es el intervalo $0 < x < 2$.

Este ejemplo sencillo muestra que, al aplicar tal procedimiento de solución de las desigualdades logarítmicas, hay que recordar siempre que la función logarítmica está definida sólo para las x positivas. Mientras tanto, en el curso de la resolución de estas desigualdades se puede proceder de otra manera: en lugar de utilizar el recinto de definición de la función logarítmica y la propiedad de su monotonía ha de valerse inmediatamente de las propiedades VII y VIII de los logaritmos (el § 6, Parte I).

De este modo, la aplicación de la propiedad VII al ejemplo precedente permite en seguida sustituir la desigualdad $\log_2 x < \log_2 2$ por la desigualdad equivalente $0 < x < 2$, la cual favorece la solución de este ejemplo.

Tomando en consideración la sencillez de resolución de las desigualdades logarítmicas con ayuda de las propiedades VII y VIII, vamos a resolverlas en lo ulterior, valiéndonos de estas propiedades.

2. *Resolver la desigualdad* $\log_{1/2} x > \log_{1/3} x$.

Pasando al logaritmo de la base 1/2 del primer miembro (regla V de los logaritmos del § 6, Parte I), obtenemos la desigualdad equivalente

$$\log_{1/2} x\,(1 - \log_{1/3} 1/2) > 0.$$

Por cuanto $1/2 > 1/3$, resulta que $\log_{1/3} 1/2 < \log_{1/3} 1/3$, es decir, $1 - \log_{1/3} 1/2 > 0$.

Teniendo en cuenta que $0 = \log_{1/2} 1$, obtenemos que la desigualdad inicial es equivalente a la desigualdad $\log_{1/2} x > \log_{1/2} 1$.

Aplicando a esta desigualdad la propiedad VIII de los logaritmos, obtenemos que la desigualdad inicial tiene soluciones $0 < x < 1$.

Pasemos a *las desigualdades trigonométricas*. A pesar de que la resolución de las desigualdades trigonométricas elementales está bien interpretada en los libros de texto para escuela secundaria, muchos estudiantes cometen errores imperdonables al resolver precisamente las desigualdades elementales. Señalemos los más típicos de estos errores.

a) Sabiendo que las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x = a\ (|a| \leqslant 1)$ se escriben como la fórmula $x = (-1)^k \operatorname{arc\,sen} a + k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, muchos escriben que "la solución de la desigualdad $\operatorname{sen} x < a$ son todos los valores de $x < (-1)^k \operatorname{arc\,sen} a + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$".

A veces resulta difícil persuadir a uno que tal "solución" es absurda.

b) Un gran número de errores quedan relacionadas con la utilización formal de los símbolos arc sen a, arc cos a y otros. Precisamente estos símbolos se emplean a menudo sin la investigación preliminar requerida si tienen o no el sentido. Por ejemplo, la solución de la desigualdad $\operatorname{sen} x \leqslant \log_4 5$ se anota por medio del símbolo $\operatorname{arc\,sen} (\log_4 5)$ que no tiene sentido, porque $\log_4 5 > 1$.

Mientras tanto, esta desigualdad es válida para cualesquier x; esto se puede observar de inmediato, debido, precisamente, a que $\log_4 5 > 1$.

c) Los errores surgen a veces a causa de la aplicación incorrecta del círculo trigonométrico. Por ejemplo, resolviendo la desigualdad $\operatorname{sen} x \leqslant -\sqrt{2}/2$, los estudiantes indican correctamente aquellos ángulos en el círculo que dan soluciones de esta desigualdad (fig. 18a), no obstante, caen en error exponiendo su expresión analítica en forma de

$$\frac{5\pi}{4}+2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{4}+2k\pi, \quad k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

¡Está claro que esta expresión carece de sentido porque para cualquier k el primer miembro de la desigualdad es mayor que el segundo!

Para resolver las desigualdades trigonométricas elementales será mejor utilizar las gráficas de las funciones trigonométricas. Este método garantiza prácticamente de los errores, permitiendo repre-

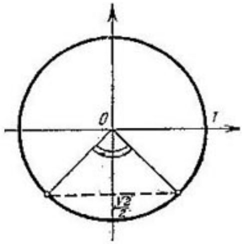


Fig. 18a

sentar con evidencia recintos dentro de los cuales se cumple la desigualdad. Para su representación analítica es conveniente utilizar el siguiente hecho: si $f(a)$ es una función periódica, entonces, para resolver la desigualdad $f(x) > a$ es suficiente hallar su solución en

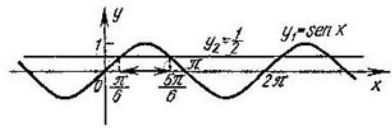


Fig. 19

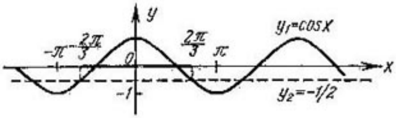


Fig. 20

cualquier segmento, cuya longitud es igual al período de la función $f(x)$; entonces la solución de nuestra desigualdad serán todas las x halladas, así como todas las x distintas de las halladas en cualquier número entero de períodos de la función $f(x)$.

3. *Resolver la desigualdad* sen $x > 1/2$.

Se construye la gráfica de funciones $y_1 = \operatorname{sen} x$ e $y_2 = 1/2$ (fig. 19). La desigualdad en cuestión se satisface para todas aquellas x donde la primera gráfica se halla por encima de la segunda. Ya que el período de la función sen x es igual a 2π es bastante resolver la desigualdad propuesta sólo en algún segmento de la longitud 2π. Es fácil ver que en calidad de tal segmento será mucho más conveniente tomar el segmento desde 0 hasta 2π, porque en éste las soluciones se escriben con mayor facilidad: $\pi/6 < x < 5\pi/6$.

De esa manera, la solución completa de esta desigualdad es la siguiente:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Así debe entenderse esta anotación: con cada k entera resulta un intervalo y el conjunto de todos estos intervalos es la solución de la desigualdad.

4. *Resolver la desigualdad* cos $x \geqslant -1/2$.

Construimos las gráficas de funciones $y_1 = \cos x$ e $y_2 = -1/2$ (fig. 20). El período de la función cos x es también igual a 2π, pero, por el dibujo se puede apreciar que ahora no es conveniente tomar el segmento desde 0 hasta 2π como el "principal": la resolución de la desigualdad se compondrá de dos "trozos". Por eso, es más conveniente hallar la solución de la desigualdad propuesta en el segmento desde $-\pi$ hasta π: en éste se halla el intervalo $-2\pi/3 \leqslant x \leqslant 2\pi/3$. Por consiguiente, la solución completa será:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

5. *Resolver la desigualdad* $|\operatorname{tg} x| < 1/7$.

El período de la función $|\operatorname{tg} x|$ es igual a π. Examinemos esta desigualdad en el segmento desde $-\pi/2$ hasta $\pi/2$. Construimos las gráficas de las funciones $y_1 = |\operatorname{tg} x|$ e $y_2 = 1/7$ (fig. 21). Está claro que la solución serán todas las x del intervalo $-x_0 < x < x_0$, donde x_0 es una abscisa del punto de intersección de las gráficas consideradas, la que se halla entre 0 y $\pi/2$, es decir, la raíz de la ecuación $\operatorname{tg} x = 1/7$ que se halla en el intervalo $0 < x < \pi/2$; pues así, $x_0 = \operatorname{arc\,tg}(1/7)$. Teniendo en cuentra el período de la función $y = |\operatorname{tg} x|$, obtenemos que la solución de nuestra desigualdad serán todas las x de los intervalos

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + k\pi < x < \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + k\pi,$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Notemos que la desigualdad inicial se puede considerarla como doble: $-1/7 < \operatorname{tg} x < 1/7$ y resolverla utilizando la gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$.

6. *Resolver la desigualdad* sen $x - \cos x > 0$.

Aplicando la fórmula del ángulo auxiliar, obtendremos una desigualdad $\sqrt{2}$ sen $[x-(\pi/4)] > 0$. Pues, se puede resolver esta desigualdad considerando la gráfica de la función $y = \text{sen}\,[x-(\pi/4)]$. Sin embargo, es mucho mejor proceder de otro modo. Designando $x-(\pi/4)$ por z, examinemos la desigualdad sen $z > 0$. Su solución, $2\pi k < z < \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, resulta inmediatamente de la gráfica de la función $y = \text{sen}\, z$. Ahora, sustituyendo z por $x-(\pi/4)$, hallamos los intervalos correspondientes de la variación de x:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Este procedimiento, la sustitución de $x-(\pi/4)$ por z, nos permitió evitar la construcción de la gráfica de la función $y = \text{sen}\,[x-(\pi/4)]$. Su comodidad es aún más perceptible al resolver las desigualdades trigonométricas elementales con un argumento complejo. Por ejemplo, este procedimiento permite evitar una construcción deficiente de la gráfica al resolver las desigualdades parecidas a: sen $(\sqrt{2}x + 7) > -1/2$. Aquí es más fácil designar $\sqrt{2}x + 7$ por z y resolver la desigualdad sen $z > -1/2$ rigiéndose por la gráfica de la función $y = \text{sen}\, z$ y pasando luego a x.

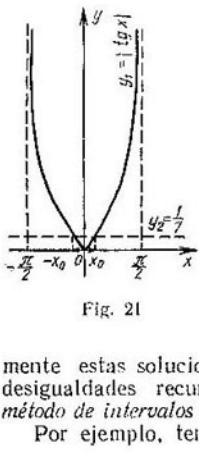


Fig. 21

A las desigualdades elementales se puede llamar también *desigualdades algebraicas de altas potencias*. Algunos estudiantes las resuelven considerando diferentes casos, o sea, pasando a la resolución de unos cuantos sistemas de desigualdades. Resolviéndolas de tal modo, muchos de los estudiantes se confunden sin saber dónde hay que tomar la parte general de soluciones y dónde se debe reunir simplemente estas soluciones. Al mismo tiempo, se puede resolver estas desigualdades recurriendo a un método único standard, llamado *método de intervalos* que vamos a exponer a continuación.

Por ejemplo, tenemos que resolver la desigualdad

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n) < 0,$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son *diferentes números reales*. Supongamos que

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Marquemos estos números en la recta numérica (fig. 22) y examinemos el polinomio

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n). \qquad (1)$$

Se ve que para todos los valores de $x > x_n$ todos los paréntesis de la expresión (1) son positivos, a saber: para $x > x_n$ tenemos $P(x) > 0$. Ya que para $x_{n-1} < x < x_n$ el último paréntesis de la expresión $P(x)$ es negativo y todos los demás paréntesis son positivos, entonces para $x_{n-1} < x < x_n$ tenemos que $P(x) < 0$. Análogamente obtenemos que $P(x) > 0$ si $x_{n-2} < x < x_{n-1}$, etc.

En esto se basa el método de intervalos. Los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ han de ordenarse en una recta numérica en sucesión creciente. Lue-

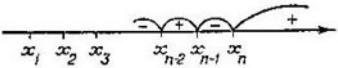


Fig. 22

go, en el intervalo, a la derecha del máximo de ellos, hay que poner el signo "más". En el siguiente intervalo, de derecha a izquierda, hay que poner el signo "menos", luego el signo "más" a que sigue el signo "menos", etc. De esa manera, los intervalos de signo "menos" serán la solución de la desigualdad $P(x) < 0$.

7. *Resolver la desigualdad*

$$x(x+1)\quad(-x+\sqrt{2})\quad(x^2-x+1)\quad(3x+1)^2\quad(x+\sqrt{17})^3\cdot(1-x)\times$$
$$\times(2x-\pi^2)(-x+\pi)\quad(x-\operatorname{sen}^2 1) < 0.$$

Es evidente que al reducir esta desigualdad a los sistemas de desigualdades nos hace falta examinar una enorme cantidad de casos.

Resolvamos esta desigualdad por el método de intervalos. Pero, se debe reducirla antes a una forma adecuada. Notemos con este fin que $x^2-x+1>0$ para cualquier x, a causa de que se puede simplificar ambos miembros de la desigualdad por este factor. Seguidamente notemos que $(3x+1)^2>0$ para $x\neq -1/3$ y por eso se puede simplificar también los dos miembros por este factor, guardando en la memoria, sin embargo, que $x=-1/3$ no es una solución de la desigualdad. Además de esto es evidente que el signo $(x+\sqrt{17})^3$ coincide con el signo $x+\sqrt{17}$; debido a lo cual se puede sustituir $(x+\sqrt{17})^3$ por $x+\sqrt{17}$, sin alterar la desigualdad. Por fin, conviene presentar cada factor en forma de $x-a$, donde a es cierto número.

Después de estas transformaciones llegaremos a la desigualdad

$$(x-0)\quad[x-(-1)]\,(x-\sqrt{2})\,[x-(-\sqrt{17})]\,(x-1)\times$$
$$\times\left(x-\frac{\pi^2}{2}\right)(x-\pi)\,(x-\operatorname{sen}^2 1) > 0,$$

la cual es equivalente a la inicial para todas $x\neq -1/3$ (ya que los tres paréntesis los hemos multiplicado por -1, entonces el signo de la desigualdad ha cambiado por el contrario).

Marquemos los números 0, -1, $-\sqrt{17}$, 1, $\pi^2/2$, π, $\sqrt{2}$ y $\operatorname{sen}^2 1$ en el eje numérico (fig. 23). En este caso la última desigualdad se cumple para x de los intervalos

$$x<-\sqrt{17},\quad -1<x<0,\quad \operatorname{sen}^2 1<x<1,\quad \sqrt{2}<x<\pi,\quad \frac{\pi^2}{2}<x,$$

y los mismos valores de x serán soluciones de la desigualdad inicial, menos $x=-1/3$, o sea,

$$x<-\sqrt{17},\ -1<x<-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}<x<0,$$
$$\operatorname{sen}^2 1<x<1,\ \sqrt{2}<x<\pi,\ \frac{\pi^2}{2}<x.$$

Notemos también que la desigualdad no estricta

$$(x-x_1)\ (x-x_2)\ldots\ (x-x_n)\leqslant 0$$

se resuelve por el método de intervalos, a diferencia de que la solución se escribe en forma de intervalos $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$ con extremos incluidos.

Se proponen frecuentemente desigualdades que se reducen a desigualdades elementales con ayuda de transformaciones algebraicas simples y de introducción de una nueva incógnita.

8. *Resolver la desigualdad*

$$9^x-10\cdot 3^x+9\leqslant 0.$$

Designando 3^x por y escribamos la desigualdad así: $y^2-10y+9\leqslant 0$. Esta desigualdad cuadrática es válida para todas las y

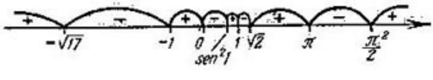


Fig. 23

del intervalo $1\leqslant y\leqslant 9$. Sustituyendo aquí y por 3^x, obtenemos que la desigualdad inicial será válida para todas las x que satisfacen la desigualdad doble $1\leqslant 3^x\leqslant 9$.

Resolviendo esta desigualdad exponencial elemental hallamos la solución: $0\leqslant x\leqslant 2$.

9. *Resolver la desigualdad*

$$\log_2^2 x+3\log_2 x\geqslant\frac{5}{2}\log_{4\sqrt{2}}16.$$

Designando $y=\log_2 x$ y teniendo en cuenta que $5/2\log_{4\sqrt{2}}16=4$, escribamos nuestra desigualdad así: $y^2+3y-4\geqslant 0$. La solución de esta desigualdad cuadrática serán todas las $y\geqslant 1$, así como todas las $y\leqslant -4$. Por consiguiente, la desigualdad inicial será válida para aquellos valores de x para los cuales $\log_2 x\geqslant 1$, así como para aquellas x para las cuales $\log_2 x \leqslant -4$. Resolviendo estas desigualdades logarítmicas elementales mediante la propiedad VIII de los logaritmos, obtenemos la solución: $x \geqslant 2$, $0 < x \leqslant 2^{-4}$.

10. *Resolver la desigualdad*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^6-2x^3+1)^{\frac{1}{2}}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}.$$

Si se desprecian los exponentes, se puede decir que esta es una desigualdad exponencial elemental $(1/2)^a < (1/2)^b$. Al resolver esta desigualdad de una base menor que 1, obtendremos que nuestra desigualdad es equivalente a la desigualdad $(x^6 - 2x^3 + 1)^{\frac{1}{2}} > 1 - x$.

Por cuanto $(x^6 - 2x^3 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x^3-1)^2} = |x^3 - 1|$ (véase § 4, Parte I), cabe resolver la desigualdad

$$|x^3 - 1| > 1 - x.$$

En tanto que el primer miembro de esta desigualdad no es negativo, entonces para $1 - x < 0$, es decir, para $x > 1$, se satisface automáticamente.

A continuación examinemos $x \leqslant 1$. En este caso $x^3 \leqslant 1$, de donde se desprende que $|x^3 - 1| = 1 - x^3$ y tenemos la desigualdad $1 - x^3 > > 1 - x$, o bien,

$$x(x-1)\,(x+1) < 0.$$

Resolviendo esta desigualdad por el método de intervalos, obtenemos que es válida para $x < -1$ y para x del intervalo $0 < x < 1$. Todas estas x se encuentran dentro del recinto considerado $x \leqslant 1$, por eso son las soluciones de la desigualdad inicial.

De tal modo, la desigualdad inicial es válida para $x < -1$,

$$0 < x < 1, \quad x > 1.$$

11. *Resolver la desigualdad*

$$5 + 2\cos 2x \leqslant 3\,|2\operatorname{sen} x - 1|.$$

Aprovechándonos de la fórmula del coseno del ángulo doble y designando sen x por y, escribamos nuestra desigualdad en forma $7 - -4y^2 \leqslant 3\,|2y - 1|$. Para despejar el signo del valor absoluto consideremos dos casos: $y \geqslant 1/2$ e $y < 1/2$.

a) Sea $y \geqslant 1/2$; entonces nuestra desigualdad va a presentarse así: $7 - 4y^2 \leqslant 3(2y - 1)$, o bien, $2y^2 + 3y - 5 \geqslant 0$. La solución de la última desigualdad serán $y \geqslant 1$ e $y \leqslant -5/2$. Teniendo en cuenta sólo la consideración de $y \geqslant 1/2$, obtenemos que a esta condición la satisfacen solamente los valores de $y \geqslant 1$.

b) Sea $y < 1/2$. En este caso la desigualdad inicial tendrá la siguiente forma: $7 - 4y^2 \leqslant -3(2y - 1)$, o bien, $2y^2 - 3y - 2 \geqslant 0$.

La solución de última desigualdad serán los valores de $y \geqslant 2$ e $y \leqslant -1/2$. Pero, a la condición b) la satisfacen sólo los valores de $y \leqslant -1/2$.

Así pues, las soluciones de la desigualdad respecto a y son $y \leqslant -1/2$ e $y \geqslant 1$.

Sustituyendo y por sen x en estas desigualdades resulta que las soluciones de la desigualdad inicial serán todas las x que satisfacen la desigualdad trigonométrica elemental sen $x \leqslant -1/2$, y todas las x que satisfacen la desigualdad sen $x \geqslant 1$.

La solución de la primera desigualdad serán todas las x de los intervalos

$$-\frac{5\pi}{6}+2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6}+2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

La segunda desigualdad va a cumplirse sólo para aquellas x para las cuales sen $x=1$, o sea, para

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En definitiva, obtenemos de tal modo, que la solución de la desigualdad inicial serán las $x=\pi/2+2k\pi$ y todas las x de los intervalos

$$-\frac{5\pi}{6}+2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6}+2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

12. *Resolver la desigualdad*

$$\log_5 \operatorname{sen} x > \log_{125}(3 \operatorname{sen} x - 2).$$

Al notar que $\log_5$ sen $x = \log_{125}$ sen$^3 x$ representemos nuestra desigualdad así:

$$\log_{125} \operatorname{sen}^3 x > \log_{125}(3 \operatorname{sen} x - 2).$$

Aplicando ahora la propiedad VIII de los logaritmos (véase § 6, Parte I), obtenemos que nuestra desigualdad es equivalente a la desigualdad sen$^3 x > 3$ sen $x - 2 > 0$.

Designando $y = \operatorname{sen} x$, llegamos al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} y^3 - 3y + 2 > 0, \\ 3y - 2 > 0. \end{cases}$$

Por medio de una agrupación, el primer miembro de la primera desigualdad puede ser representado como

$$y^3 - 3y + 2 = y(y^2-1) - 2(y-1) = (y-1)(y^2+y-2) = \\ = (y-1)^2 (y+2).$$

De aquí se deduce que esta desigualdad es válida para todos los valores de $y > -2$, excepto $y = 1$.

La segunda desigualdad de este sistema es válida para $y > 2/3$. Por eso, la solución del sistema serán todos los valores de $y > 2/3$, excepto $y = 1$.

Volviendo a examinar x, obtenemos que la desigualdad inicial será equivalente a la siguiente desigualdad doble: $2/3 < \operatorname{sen} x < 1$.

Las soluciones de esta desigualdad trigonométrica elemental se dan por los intervalos:

$$\begin{gathered}\operatorname{arc\,sen} 2/3 + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi, \\ \pi/2 + 2k\pi < x < \pi - \operatorname{arc\,sen} 2/3 + 2k\pi, \\ k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots\end{gathered}$$

13. *Resolver la desigualdad*

$$\cos[\pi(x^2 - 10x)] - \sqrt{3}\operatorname{sen}[\pi(x^2 - 10x)] > 1.$$

Designando $y = \pi(x^2 - 10x)$ escribamos nuestra desigualdad así:

$$\frac{1}{2}\cos y - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} y > \frac{1}{2}.$$

Aplicando la fórmula del ángulo auxiliar obtenemos que $\cos[y + (\pi/3)] > 1/2$. La solución de esta desigualdad elemental se encuentra en los intervalos:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < y + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

Al volver a examinar x, obtenemos que para cada k entera se ha de resolver el sistema de desigualdades de segundo grado

$$\begin{cases} x^2 - 10x - 2k < 0, \\ x^2 - 10x - 2k + 2/3 > 0. \end{cases}$$

La primera desigualdad tiene soluciones sólo cuando el discriminante del trinomio de segundo grado $x^2 - 10x - 2k$ sea positivo, es decir, cuando $25 + 2k > 0$ ó $k \geqslant -12$ (donde k es un número entero). Por esta razón, consideremos la segunda desigualdad solamente para $k \geqslant -12$.

Notemos que para estas k el discriminante de la segunda desigualdad es también positivo. Con cualquier $k \geqslant -12$ fijo la solución de la primera desigualdad cuadrática es el intervalo $5 - \sqrt{25 + 2k} < x < 5 + \sqrt{5 + 2k}$, y la solución de la segunda la forman dos intervalos infinitos: $x > 5 + \sqrt{25 + 2k - 2/3}$ y $x < 5 - \sqrt{25 + 2k - 2/3}$. Las partes generales de las soluciones de estas dos desigualdades serán la solución del sistema y, por coniguiente, de la desigualdad inicial. Es bien claro que $\sqrt{25 + 2k - 2/3} < \sqrt{25 + 2k}$ son válidas para cualquier $k \geqslant -12$.

Tomando en consideración esta observación obtenemos con facilidad la solución:

$$5-\sqrt{25+2k}<x<5-\sqrt{25+2k-2/3},$$
$$5+\sqrt{25+2k-2/3}<x<5+\sqrt{25+2k},$$

donde k es un número entero y $k\geqslant -12$.

Junto con las desigualdades que son combinaciones de las elementales, existen también desigualdades para cuya resolución se deben utilzar diferentes transformaciones de éstas, valiéndose de conceptos adecuados.

Al principio mostremos algunos ejemplos sencillos de cómo se aplica el concepto del RVA.

14. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{x}>-1$.

Por cuanto la expresión del primer miembro no es negativa, la desigualdad es válida para todas las x para las cuales tiene sentido, o sea, se encuentra en el RVA. Pues, el RVA de esta desigualdad es un conjunto de $x\geqslant 0$; precisamente, esta es la solución de la desigualdad.

15. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{\lg x}>0$.

Por esta vez la expresión del primer miembro tampoco es negativa, por eso la desigualdad es válida para todas las x del RVA, excepto las que convierten el primer miembro en cero. El RVA se determina por la condición de que $\lg x\geqslant 0$, es decir, representa en sí un conjunto de $x\geqslant 1$. Pero, para $x=1$ el primer miembro se convierte en cero, a causa de que este valor de la incógnita no puede ser la solución de la desigualdad: la solución de la desigualdad inicial es el intervalo $x>1$.

16. *Resolver la desigualdad* $\log_{2-x}(x-3)\geqslant -5$.

El RVA de esta desigualdad se determina por las condiciones cuando $x-3>0$, $2-x>0$, $2-x\neq 1$. Pero las desigualdades $x-3>0$ y $2-x>0$ no tienen soluciones comunes. Por lo tanto, el RVA de nuestra desigualdad no contiene ningún número, y por eso la desigualdad no tiene soluciones.

17. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}\geqslant\sqrt{5-x}$.

El RVA se determina por las desigualdades $x+2\geqslant 0$, $x-5\geqslant 0$, $5-x\geqslant 0$. Pero este sistema de desigualdades tiene una solución única, $x=5$. Por eso, el RVA de la desigualdad inicial está compuesto de un solo valor: $x=5$. Por lo tanto, para resolver esta desigualdad no se requieren ningunas transformaciones: es suficiente comprobar si ésta cumple o no para $x=5$. La verificación directa demuestra que $x=5$ es la solución.

18. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{2+x-x^2}>x-4$.

El RVA de esta desigualdad es el intervalo $-1\leqslant x\leqslant 2$. De tal modo, el primer miembro de la desigualdad inicial toma valores reales, y no negativos, para $-1 \leqslant x \leqslant 2$; para los demás valores de x aquella no tiene sentido. Sin embargo, es evidente que el segundo miembro de la desigualdad es *negativo* para todas las $x < 4$ y, en particular, para todas las x del intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 2$, es decir, la desigualdad propuesta tiene lugar. Por consiguiente, el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 2$ es la solución de la desigualdad.

19. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{\operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x} < -1$.

El primer miembro de esta desigualdad no es negativo para cualquier x admisible y, por esta razón la desigualdad no puede ser cumplida para ninguno de los valores de x, es decir, no tiene soluciones.

En los ejemplos citados se ve que es imposible recomendar un método general para conceptuar bien del RVA en cada caso concreto. Efectivamente, en los dos primeros ejemplos, sin su cálculo, no podríamos hallar soluciones; en el tercero, cuarto y quinto casos, la búsqueda preliminar del RVA permitió hallar de inmediato la solución. Al contrario, en el sexto ejemplo sería muy difícil hallar el RVA, cosa desprovista de sentido, que es muy esencial, por cuanto entre las x admisibles no hay ningunas soluciones.

Por lo tanto, durante la resolución de los ejemplos más complicados a veces es útil calcular el RVA y a veces no tiene sentido hacerlo de inmediato, porque en lo ulterior resulta que en el ejemplo en cuestión esto será innecesario. Se puede dar un consejo útil: si el cálculo del RVA no es complicado, es mejor hacerlo (porque esto no impedirá el intento) y si lo es, mejor diferir el cálculo del RVA hasta el momento cuando se necesite el RVA.

A veces se proponen desigualdades que al resolverlas deben hacerse *transformaciones* que pueden conducir a la pérdida o adquisición de soluciones. Por eso, al resolver las desigualdades, así como las ecuaciones, el concepto de *equivalencia* juega el papel principal. En el § 9, Parte I, ya se ha examinado el concepto de equivalencia de las ecuaciones y se ha demostrado por qué es necesario observar atentamente la equivalencia de las ecuaciones iniciales y obtenidas de nuevo. Esto es también válido para las desigualdades; además, estas referencias son más esenciales para las desigualdades que para las ecuaciones.

En realidad, en lo que se refiere a las ecuaciones es suficiente señalar que con cierta transformación puede aparecer una raíz extraña, después de lo cual hay que comprobar las raíces. Comprobar las soluciones de las desigualdades por medio de una sustitución resulta imposible porque existe un conjunto infinito de soluciones. Por lo tanto, al resolver las desigualdades se debe observar meticulosamente la equivalencia de las desigualdades derivadas e iniciales.

Notemos que las transformaciones que conducían a la no equivalencia de ecuaciones (véase el § 9, Parte I) conducen, naturalmente, a las desigualdades no equivalentes.

Con esto algunas transformaciones sólo ensanchan o estrechan el RVA de desigualdades. Para tales transformaciones podemos señalar una receta general: no pueden hacerse transformaciones que estrechen el RVA porque puede ocurrir una pérdida de soluciones; y cuando se hagan transformaciones que ensanchen el RVA hay que hacer primeramente estas transformaciones, eligiendo, luego, de las soluciones de la desigualdad definitiva aquellos valores que forman parte del RVA de la desigualdad inicial; precisamente éstos serán soluciones.

Las transformaciones más difundidas que hacen variar el RVA son "las transformaciones idénticas", mencionadas en el § 9, Parte I. Además de esto, al resolver las desigualdades es necesario recurrir frecuentemente a otras transformaciones: despejar el denominador y tomar algunas funciones de ambos miembros de las desigualdades, a saber, elevación a potencia, logaritmación, potenciación, etc. A continuación nos detendremos en estas transformaciones.

Empecemos por tal transformación "inofensiva" como es *la eliminación del denominador*. Cuando se trata de una ecuación, al despejar el denominador, como es sabido, es imposible perder sus soluciones, pero se puede adquirir las extrañas sólo a expensas del ensanchamiento del RVA de la ecuación, es decir, a expensas de la adición al RVA de la ecuación inicial de aquellos valores de la incógnita que convierten el denominador en cero.

Muchos piensan que así mismo ocurre con las desigualdades y por eso "resuelven" la desigualdad, por ejemplo, $1/x < 1$, así: "al eliminar el denominador llegamos a la desigualdad $1 < x$; todas estas x dan las soluciones de la desigualdad inicial, ya que ninguna de éstas convierte en cero el denominador de la desigualdad inicial".

Sin embargo, se ve que la desigualdad inicial es válida también para todas las x negativas. Y todas estas soluciones se perdieron porque la eliminación del denominador de una desigualdad no tiene analogía a la eliminación del denominador de una ecuación.

En realidad, la eliminación del denominador de una ecuación (o una desigualdad) consiste en multiplicar ambos miembros de éstas por una expresión que es el mismo denominador. En este caso las ecuaciones quedan equivalentes, siempre y cuando sean multiplicadas por una expresión no igual a cero, mientras que la propiedad análoga respecto de las desigualdades se enuncia de una manera más complicada: al multiplicar ambos miembros de la disigualdad por una expresión positiva, no cambia el signo de la desigualdad, y al multiplicarlar por una expresión negativa, el signo de la desigualdad se cambia por el inverso.

De tal modo, siempre que queremos multiplicar ambos miembros de la desigualdad por una expresión dependiente de x y que toma valores tanto positivos como negativos, conviene considerar dos casos respectivos. No obstante, muchos estudiantes olvidan esta regla.

20. *Resolver la desigualdad*

$$(x-2)/(x+2) \geqslant (2x-3)/(4x-1).$$

El RVA de esta desigualdad son todos los valores de x excepto $x=-2$ y $x=1/4$. Vamos a aceptar que a continuación las x pertenecen sólo al RVA. Al resolver esta desigualdad, algunos estudiantes escriben, al despejarse del denominador, que se la puede sustituir por la siguiente:

$$(x-2)(4x-1) \geqslant (2x-3)(x+2). \tag{2}$$

Está claro que esta afirmación es incorrecta ya que tal transformación es, en realidad, una multiplicación de ambos miembros de la desigualdad inicial por la expresión $(x+2)(4x-1)$, que puede ser negativa. La desigualdad inicial puede ser sustituida por la desigualdad (2) sólo cuando la expresión $(x+2)(4x-1)$ sea positiva, debido a esto hay que considerar el caso cuando ésta sea negativa. De esa manera, la solución de la desigualdad inicial se reduce a la solución de los sistemas de desigualdades.

No obstante, es mucho más fácil proceder del modo siguiente. Permutamos todos los miembros de la desigualdad inicial al primer miembro y lo reducimos a un común denominador:

$$\frac{2(x^2-5x+4)}{(x+2)(4x-1)} \geqslant 0.$$

Las raíces del trinomio x^2-5x+4, es decir, $x_1=1$ y $x_2=4$, son las soluciones de nuestra desigualdad.

Al seguir considerando que $x \neq 4$ y $x \neq 1$, resolvamos la desigualdad

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-1/4)} > 0. \tag{3}$$

En este lugar la desigualdad se reduce frecuentemente a dos sistemas de desigualdades: el denominador y el numerador, ambos son mayores que cero, o bien, menores que cero. No obstante, esta desigualdad se resuelve más fácilmente por el método de intervalos.

Multipliquemos ambos miembros de la última desigualdad por la expresión $(x+2)^2\ (x-1/4)^2$ *positiva* para los valores de x considerados. Entonces, nuestra desigualdad para todas estas x será equivalente a la siguiente:

$$(x+2)\ (x-1/4)\ (x-1)\ (x-4) > 0. \tag{4}$$

Esta desigualdad tiene una forma para la cual conviene el método de intervalos. La figura 24 muestra que todos los valores de x de

Examinemos ahora *la elevación a potencia*. A continuación vamos a emplear frecuentemente la siguiente afirmación.

Teorema. *Si* $f(x) \geqslant 0$ y $\varphi(x) \geqslant 0$ *en un conjunto de valores de* x, *entonces las desigualdades* $f(x) > \varphi(x)$ *y* $[f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$ son equivalentes en el mismo conjunto.

Demostración. Sea x_0 una solución arbitraria de la primera desigualdad del conjunto de valores de x propuesto a considerar. Si $\varphi(x_0) > 0$, entonces de la validez de la desigualdad $f(x_0) > \varphi(x_0)$, a base del teorema de la elevación a potencia de las desigualdades numéricas, se deduce la validez de la desigualdad $[f(x_0)]^2 > [\varphi(x_0)]^2$. Si $\varphi(x_0) = 0$, es evidente que de la validez de la desigualdad $f(x_0) > 0$ se deduce que $[f(x_0)]^2 > 0$. Con esto queda demostrado que cualquier solución de la desigualdad $f(x) > \varphi(x)$ es la solución de la desigualdad $[f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$.

Análogamente se demuestra también lo contrario: cualquier solución de la desigualdad $[f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$ es la solución de la desigualdad $f(x) > \varphi(x)$.

Así queda demostrado el teorema.

Notemos que en el enunciado del teorema las desigualdades estrictas $f(x) > \varphi(x)$ y $[f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$ pueden ser sustituidas por las no estrictas: $f(x) \geqslant \varphi(x)$ y $[f(x)]^2 \geqslant [\varphi(x)]^2$. La demostración de ello se efectúa igualmente que la del teorema.

Al elevar a potencia una ecuación, como se indica en el § 9, Parte I, se puede adquirir solamente soluciones extrañas que se obtienen tanto a expensas de la ampliación del RVA, como cuando no se toman en consideración los signos de ambos miembros de la ecuación. Análogamente, durante la resolución de las desigualdades pueden también obtenerse soluciones extrañas que resultan tanto a cuenta de la ampliación del RVA, como cuando se desprecian los signos de ambos miembros de la desigualdad. Señalemos a continuación con ejemplos, cómo se puede adquirir soluciones en uno y en otro caso.

Sin embargo, a diferencia de las ecuaciones, al elevar a potencia las desigualdades se puede *perder* sus soluciones. Los estudiantes recuerdan habitualmente que no se puede perder soluciones al elevar a potencia una ecuación, considerando por analogía que la elevación a potencia de una desigualdad tampoco puede llevar a la pérdida de sus soluciones. Mostremos a continuación con ejemplos, cómo pueden perderse soluciones al elevar a potencia una desigualdad.

Empecemos por un ejemplo cuando, al elevar a potencia una desigualdad, pueden obtenerse soluciones extrañas a expensas de la ampliación del RVA.

23. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{(x-3)(2-x)} > \sqrt{4x^2+12+11}$.

Algunos estudiantes dan tal solución: "Por cuanto el primer y el segundo miembros de esta desigualdad no son negativos (porque a la derecha y a la izquierda se encuentran raíces aritméticas), se puede entonces elevar al cuadrado la desigualdad y obtener la desigualdad equivalente $5x^2+7x+17>0$. El trinomio de segundo grado que se halla en el primer miembro de esta desigualdad no tiene raíces reales, por eso esta desigualdad es válida para todas las x reales. Se deduce de la equivalencia de las desigualdades que la desigualdad inicial también es válida para todas las x". Este razonamiento parece correcto, no obstante tiene un defecto esencial. Será correcto sólo cuando entre en el RVA de la desigualdad inicial.

La solución correcta debe ser así: en el RVA ambos miembros de la desigualdad inicial no son negativos y por eso en su RVA es equivalente a la desigualdad $5x^2+7x+17>0$, de donde se deduce que es válida para todas las x del RVA. Ahora es fácil hallar el RVA de la desigualdad inicial obteniendo de tal modo la solución $2\leqslant x\leqslant 3$.

En el siguiente ejemplo las soluciones extrañas resultan no por la ampliación del RVA, sino por la elevación a potencia de ambos miembros de la disigualdad, sin investigar sus signos.

24. *Resolver la desigualdad* $x+1>\sqrt{x+3}$.

He aquí un ejemplo del razonamiento cuando resultan soluciones extrañas: "El RVA de nuestra desigualdad es: $x\geqslant -3$. Para cualquier x del RVA el segundo miembro es un número no negativo la raíz aritmética) y por eso en el primero se halla un número positivo. Por lo tanto, después de haber elevado al cuadrado la desigualdad, obtenemos la desigualdad equivalente $x^2+x-2>0$, cuyas soluciones son $x>1$ y también $x<-2$. Tomando en consideración el RVA de la desigualdad inicial obtenemos la respuesta: la solución de la desigualdad inicial serán todas las $x>1$ así como todas las x del intervalo $-3\leqslant x<-2$".

En realidad, todas las x del intervalo $-3\leqslant x<-2$ no son soluciones de la desigualdad inicial. Es que para x del RVA el segundo miembro de la desigualdad no es negativo, pero el primero para ciertos valores de x del RVA es negativo y para otros valores, no es negativo. Resulta que para las x del RVA que hacen negativo el primer miembro, la desigualdad no se cumple, lo que significa que entre éstas no hay soluciones para nuestra desigualdad. Por eso, las soluciones de la desigualdad inicial es necesario hallarlas entre aquellas x del RVA para los cuales el miembro primero de la desigualdad no es negativo, es decir, entre las $x\geqslant -1$.

Precisamente para estas x ambos miembros de la desigualdad no son negativos: se puede elevarla al cuadrado y obtener la desigualdad $x^2+x-2>0$, la que es equivalente a la inicial en el conjunto $x\geqslant -1$. Ahora, hace falta elegir de las soluciones de la desigualdad $x^2+x-2>0$ aquellas que satisfagan la condición $x\geqslant -1$. Estas serán precisamente las soluciones de la desigual dad inicial. Estas serán las $x>1$.

El error en la consideración antes citada resulta de la sustitución de conceptos que ocurre imperceptiblemente para los estudiantes. En efecto, para cualquier x que sea *la solución* de la desigualdad inicial, a la derecha se encuentra un número no negativo (raíz aritmética), y a la izquierda, un número positivo. Sin embargo, es evidente que no todas las x del RVA serán soluciones de la desigualdad inicial, a causa de que no para todas las x del RVA, el primer miembro será positivo. El estudiante cambió las palabras "para cualquier x que sea la solución" por las palabras "para cualquier x del RVA", que fue lo que provocó el error.

25. *Resolver la desigualdad*

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0.$$

Las dificultades de este ejemplo empiezan por el cálculo del RVA. El RVA de esta desigualdad se determina según las condiciones: $2-x\geqslant 0$, $1-x\geqslant 0$, $4\geqslant\sqrt{1-x}$. Las dos primeras desigualdades son válidas para $x\leqslant 1$. Pero, para estas x ambos miembros de la tercera desigualdad no son negativos y pueden elevarse al cuadrado obteniendo una desigualdad equivalente $x\geqslant -15$. De tal modo, el RVA de la desigualdad inicial es: $-15\leqslant x\leqslant 1$. Escribamos nuestra desigualdad así: $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}>\sqrt{2-x}$. Dentro del RVA, ambos miembros de esta desigualdad no son negativos, por eso, al elevarlos al cuadrado, obtendremos dentro del RVA una desigualdad equivalente $2+x>\sqrt{1-x}$. Para $x<-2$ que entren en el RVA, el primer miembro de esta desigualdad es negativo y el segundo no negativo; por lo tanto, entre estas x no hay soluciones para la desigualdad inicial. Nos queda por examinar las x del intervalo $-2\leqslant \leqslant x\leqslant 1$. Para estas x ambos miembros de la desigualdad $2+x> >\sqrt{1-x}$ no son negativos, debido a que, al elevarla al cuadrado, obtendremos una desigualdad cuadrática $x^2+5x+3>0$, que es equivalente a la inicial en el conjunto $-2\leqslant x\leqslant 1$. Esta última desigualdad es válida para $x>(-5+\sqrt{13})/2$ y para $x<(-5- -\sqrt{13})/2$. Ahora, para obtener el resultado, de todas estas soluciones hay que elegir aquellas que se hallan en el intervalo $-2\leqslant x\leqslant 1$. Serán todas las x del intervalo $(-5+\sqrt{13})/2<x\leqslant 1$; precisamente éstas serán la solución de este problema.

Notemos que si no tomásemos en consideración el RVA, obtendríamos soluciones extrañas, por ejemplo, todas las $x>1$, y si no tomásemos en consideración que la desigualdad $2+x>\sqrt{1-x}$ tiene soluciones sólo para $-2\leqslant x\leqslant 1$, obtendríamos también soluciones extrañas, por ejemplo, todas las $x<(-5-\sqrt{13})/2$.

Ahora citemos ejemplos de cuándo pueden perderse soluciones al elevar una desigualdad a potencia.

26. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{x+2}>x$.

Si esta desigualdad se eleva al cuadrado, entonces, teniendo en cuenta el RVA, perderemos soluciones. En efecto, el RVA de esta desigualdad es $x\geqslant-2$. Después de elevar ésta al cuadrado obtendremos la desigualdad $x+2>x^2$, cuya solución serán todas las x del intervalo $-1<x<2$. Todas estas x entran en el RVA, debido a que algunos estudiantes escriben que precisamente ellas dan la solución a este ejemplo. En realidad, razonando así resultan perdidas las soluciones: $-2\leqslant x\leqslant-1$, pues es fácil convencerse de que para cualquier número de este intervalo el primer miembro de la desigualdad no es negativo y el segundo sí lo es. Para no perder soluciones se han de observar siempre los signos de ambos miembros. La resolución correcta de esta desigualdad es así.

El RVA de esta desigualdad consta de todas las $x\geqslant-2$. El primer miembro de la desigualdad propuesta no es negativo en el RVA, y el segundo puede ser tanto positivo como negativo. Es obvio que para las x del RVA, para las cuales el segundo miembro es negativo, la desigualdad inicial será válida. Por eso, todas las x del intervalo $0>x\geqslant-2$ son las soluciones de la desigualdad inicial.

Examinemos ahora los valores restantes de x, o sea, los valores de $x\geqslant0$. Para todas estas x los dos miembros de la desigualdad inicial no son negativos por lo cual se puede elevar al cuadrado la desigualdad y obtener la desigualdad equivalente $x+2>x^2$ para todas las $x\geqslant0$.

La solución de la última desigualdad serán todas las x del intervalo $-1<x<2$. La solución de la desigualdad inicial en este caso serán todas las x del intervalo $0\leqslant x<2$.

Reuniendo estos dos casos obtenemos que la solución de la desigualdad inicial serán todos los valores de x del intervalo $-2\leqslant x<2$.

En el siguiente ejemplo pueden perderse soluciones si ignoramos los signos de ambos miembros de la desigualdad intermedia.

27. *Resolver la desigualdad*

$$\sqrt{x^2+3x+2}<1+\sqrt{x^2-x+1}.$$

El RVA de esta desigualdad consta de dos intervalos : $x\leqslant-2$ y $x\geqslant-1$. En el RVA, ambos miembros de nuestra desigualdad no son negativos; por eso, después de elevarlos al cuadrado, obtenemos la desigualdad equivalente $2x<\sqrt{x^2-x+1}$ dentro del RVA.

a) Para $x\leqslant-2$ y $-1\leqslant x<0$ esta desigualdad es válida, ya que para cada una de estas x el primer miembro es negativo, y el segundo, positivo. Por lo tanto, todas estas x son las soluciones de la desigualdad inicial.

b) Para $x\geqslant0$ ambos miembros de la desigualdad $2x<\sqrt{x^2-x+1}$ no son negativos, a causa de que, al elevarlos al cuadrado, obtenemos la desigualdad equivalente $3x^2+x-1<0$ para estas x.

La solución de esta desigualdad serán las x del intervalo $(-1-$ $-\sqrt{13})/6<x<(-1+\sqrt{13})/6$.

Tomando en consideración b), obtenemos que en el segundo caso la solución de la desigualdad inicial serán todas las x del intervalo $0\leqslant x<(-1+\sqrt{13})/6$.

Reuniendo ambos casos, obtenemos la solución: $x\leqslant -2$ y también $-1\leqslant x<(1+\sqrt{13})/6$.

Hacemos la observación de que los estudiantes que no han considerado los casos a) y b) sino que han elevado, de inmediato, al cuadrado la desigualdad $2x<\sqrt{x^2-x+1}$, perdían, naturalmente, una parte de soluciones. Por lo visto, la causa consiste en lo siguiente: por cuanto, al principio de la resolución de la desigualdad, los signos de ambos miembros ya fueron investigados, y, al elevarlos por segunda vez al cuadrado, se pierde "la atención".

28. *Resolver la desigualdad*

$$\sqrt{3+2\,\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}^2 x}\geqslant\frac{1+3\,\mathrm{tg}\,x}{2}.$$

Designando $\mathrm{tg}\,x$ por y escribamos esta desigualdad así:

$$2\sqrt{3+2y-y^2}\geqslant 1+3y. \qquad (5)$$

El RVA de la desigualdad (5) es el intervalo $-1\leqslant y\leqslant 3$. Para las y del RVA, para las cuales $1+3y<0$, nuestra desigualdad es evidentemente válida, es decir, todas las y del intervalo $-1\leqslant y<$ $<-1/3$ son soluciones de la desigualdad (5).

Estamos por examinar el caso b): $-1/3\leqslant y\leqslant 3$. En este caso ambos miembros de la desigualdad (5) no son negativos; por eso, al elevarlos al cuadrado, obtendremos la desigualdad equivalente $13y^2-2y-11\leqslant 0$.

La solución de la última desigualdad serán todas las y del intervalo $-11/13\leqslant y\leqslant 1$. Teniendo en cuenta la condición b), resulta que en el caso considerado la solución de la desigualdad (5) serán todas las y del intervalo $-1/3\leqslant y\leqslant 1$.

Reuniendo los dos casos, obtenemos que la solución de la desigualdad (5) serán todas las y del intervalo $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Al tomar de nuevo x, obtenemos que la solución de la desigualdad inicial serán todas las x que satisfacen la desigualdad $-1\leqslant \mathrm{tg}\,x\leqslant$ $\leqslant 1$. Resolviendo esta desigualdad trigonométrica elemental, obtenemos la solución:

$$-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \text{donde}\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Habitualmente se recurre a *la potenciación* de las desigualdades cuando éstas contienen una incógnita bajo el signo del logaritmo. Ya hemos examinado la resolución de desigualdades logarítmicas elementales y nos hemos convencido de que éstas se resuelven con facilidad aplicando las propiedades VII y VIII de los logaritmos (§ 6, Parte I). Por esto, con ayuda de estas propiedades ha de resolverse las desigualdades logarítmicas más complejas, lo que permitirá evitar muchos errores.

Una observación más: a pesar de que la resolución de desigualdades logarítmicas siempre se acompaña de la potenciación (sea teniendo en cuenta el campo de determinación de la función logarítmica, sea las propiedades VII y VIII), este término de "la potenciación", no es de uso común, sino que se escribe simplemente: "sobre la base de las propiedades de los logaritmos (o de las funciones logarítmicas) tenemos..."

Resolvamos algunos ejemplos de "potenciación" de desigualdades.

29. *Resolver la desigualdad*

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1.$$

Es natural que se tiene que "potenciar" esta desigualdad. Ya que la base del logaritmo contiene x y que las propiedades de la función logarítmica son distintas en la base, mayor o menor que 1, resulta que no podemos potenciar inmediatamente, y por eso debemos examinar dos casos.

a) Sea $\frac{25-x^2}{16} > 1$, es decir, $x^2 < 9$. En este caso la desigualdad dada es equivalente a la siguiente:

$$\frac{24-2x-x^2}{14} > \frac{25-x^2}{16}.$$

La última desigualdad se puede expresar así: $x^2+16x-17<0$. Las soluciones de esta desigualdad serán todas las x del intervalo $-17<x<1$. Pero, la condición de este caso, o sea, la condición $-3<x<3$ es satisfecha sólo por las x del intervalo $-3<x<1$. Todas estas x son soluciones de la desigualdad inicial en el caso considerado.

b) Ahora, sea $0<(25-x^2)/16<1$. En este caso la desigualdad inicial es equivalente a la doble:

$$0 < \frac{24-2x-x^2}{14} < \frac{25-x^2}{16}.$$

De tal modo, en el caso considerado hay que resolver el sistema de desigualdades dobles siguiente:

$$\begin{cases} 0 < \frac{25-x^2}{16} < 1, \\ 0 < \frac{24-2x-x^2}{14} < \frac{25-x^2}{16}. \end{cases}$$

La primera de estas desigualdades se reduce fácilmente a la forma $9<x^2<25$ y su solución consta de dos intervalos: $-5<x<-3$ y $3<x<5$. La segunda desigualdad doble es equivalente al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} x^2+2x-24<0, \\ x^2+16x-17>0. \end{cases}$$

La primera desigualdad de este sistema tiene la solución $-6<x<4$, la solución de la segunda consta de dos intervalos infinitos $x>1$ y $x<-17$, de donde proviene que la solución del último sistema es el intervalo $1<x<4$.

Ahora, de estos valores de x conviene elegir tales que satisfagan la primera desigualdad doble; serán las x del intervalo $3<x<4$.

Si reunimos los dos casos, obtenemos que la solución de la desigualdad inicial se halla en dos intervalos:
$-3<x<1$ y $3<x<4$.

30. *Resolver la desigualdad*

$$\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}} \sqrt{1+2\cos 2x} < 1.$$

Si designamos $\cos x$ por y y aplicamos la fórmula del coseno de ángulo doble, escribiremos la desigualdad en forma

$$\log_{2y/\sqrt{3}} \sqrt{4y^2-1} < 1. \tag{6}$$

El RVA de esta desigualdad se determina por las condiciones $y^2>1/4$, $y>0$, $y\neq\sqrt{3}/2$, es decir, $y>1/2$ e $y\neq\sqrt{3}/2$.

Por cuanto, al ser diferentes los valores de y, la base del logaritmo puede ser menor que 1 ó mayor que 1, tenemos que examinar dos casos.

a) Sea $1/2<y<\sqrt{3}/2$. Aquí la base del logaritmo es menor que 1, de donde se obtiene la desigualdad equivalente $\sqrt{4y^2-1}>2y/\sqrt{3}$, o bien, $4y^2-1>4y^2/3$, porque ambos miembros son positivos. Esta desigualdad se cumple para $y^2>3/8$, es decir, $y>\sqrt{6}/4$. Tomando en consideración la condición del caso considerado, obtenemos la solución de la desigualdad (6) que es el intervalo $\sqrt{6}/4<y<\sqrt{3/2}$.

b) Sea $y>\sqrt{3}/2$. En este caso obtenemos la desigualdad equivalente $\sqrt{4y^2-1}<2y/\sqrt{3}$, de donde, después de elevarla al cuadrado, se deduce que $y^2<3/8$. Pero, en la condición de nuestro caso $y^2>3/4$, lo que dice que no obtenemos nuevas soluciones de la desigualdad (6).

De esa manera nos queda por resolver la desigualdad trigonométrica elemental $\sqrt{6}/4<\cos x<\sqrt{3}/2$. A ésta le satisfacen todas las x de los intervalos

$$-\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}+2k\pi<x<-\frac{\pi}{6}+2k\pi,$$

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}+2k\pi,$$

donde k es cualquier número entero (fig. 27).

En lo que se refiere a *la logaritmación* de las desigualdades, es fácil comprender en cuáles casos esta acción conduce a la desigualdad equivalente. No obstante, hay que recordar que una logaritmación mal pensada de las desigualdades puede reducir el RVA y llevar a las pérdidas de soluciones. Por lo tanto, antes de emprender la logarit-

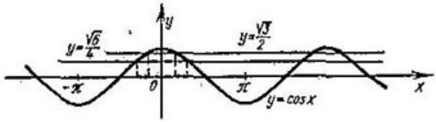


Fig. 27

mación se debe comprobar siempre que sean positivos ambos miembros de la desigualdad; sólo en este caso (teniendo en cuenta, naturalmente la base del logaritmo) podremos obtener la desigualdad equivalente.

Antes (véase el problema 1) ya hemos resuelto una desigualdad elemental $(1/3)^x<2$, aplicando las propiedades de la función exponencial. Ahora vamos a resolver esta desigualdad por medio de la logaritmación. Por cuanto los dos miembros de la desigualdad $(1/3)^x<2$ son positivos, nos aprovecharemos de la propiedad VIII de los logaritmos (§ 6, Parte I) logaritmando la misma en la base 1/3; obtendremos entonces $\log_{1/3}(1/3)^x>\log_{1/3}2$ (¡presten atención al cambio de signo de la desigualdad!), de donde $x>\log_{1/3}2$.

De tal modo, la solución de la desigualdad es un conjunto $x>\log_{1/3}2$.

Notemos que se podría resolver por logaritmación todas las desigualdades exponenciales elementales, examinadas por arriba.

Ahora resolveremos unos ejemplos por logaritmación.

31. *Resolver la desigualdad*

$$x^4\cdot 7^{\log_{7^{1/3}}5}\leqslant 5^{-\log_{1/x}5}.$$

El RVA de esta desigualdad son todas las $x>0$, excepto $x=1$.

Por cuanto $7^{\log_{7^{1/3}}5}=5^3$ y $\log_{1/x}5=-\log_x 5$, nuestra desigualdad se puede escribir así:

$$x^4\cdot 5^3\leqslant 5^{\log_x 5}.$$

En el RVA, ambos miembros de esta desigualdad son positivos, debido a que se puede logaritmarla en la base 5 (mayor que 1) y obtener una desigualdad $4\log_5 x+3\leqslant\log_x 5$ equivalente en el RVA. Designando $\log_5 x$ por y, permutando todo al primer miembro, escribamos esta desigualdad así: $4y+3-1/y\leqslant 0$; o bien, al reducirla a un común denominador, la expresemos así: $(y+1)(y-1/4)/y\leqslant 0$.

Si aplicamos ahora el método de intervalos, obtenemos que la solución de esta desigualdad serán $y\leqslant -1$ e y del intervalo $0<y\leqslant 1/4$.

Al volver a x, obtenemos que la desigualdad inicial será válida para los valores de x, para los cuales $\log_5 x\leqslant -1$, así como para aquellas x, para las cuales $0<\log_5 x\leqslant 1/4$. Al resolver ahora estas desigualdades logarítmicas elementales, obtenemos la solución: $0<x\leqslant\leqslant 1/5$, $1<x\leqslant\sqrt[4]{5}$.

32. *Resolver la desigualdad*

$$(x^2+x+1)^x<1.$$

El trinomio de segundo grado x^2+x+1 es positivo para cualesquier x reales, de lo cual se deduce que el RVA de esta desigualdad consta de todas las x reales.

Ya que ambos miembros de la desigualdad inicial son positivos para todas las x, entonces, al logaritmarla por la base 10, obtenemos que es equivalente a la siguiente: $x\lg(x^2+x+1)<0$. Esta desigualdad será válida en dos casos: cuando x satisface el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} x>0, \\ \lg(x^2+x+1)<0 \end{cases}$$

y cuando x satisface el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} x<0, \\ \lg(x^2+x+1)>0. \end{cases}$$

Resolvamos el primer sistema de desigualdades. A base de las propiedades de los logaritmos obtenemos que este es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2+x+1<1. \end{cases}$$

Por cuanto la solución de la segunda desigualdad del sistema es $-1<<x<0$ y la solución de la primera es $x>0$, resulta que este sistema es incompatible. De tal modo, la desigualdad inicial no tiene soluciones.

El segundo sistema es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} x<0, \\ x^2+x+1>1. \end{cases}$$

La solución de este serán todas las $x<-1$. De aquí obtenemos que la solución de la desigualdad inicial serán todas las $x<-1$.

Se puede proponer también otra resolución de esta desigualdad. Ya que las propiedades de la potencia dependen de su base, menor o mayor que 1, es natural examinar dos casos.

a) Supongamos que $x^3+x+1<1$, es decir, $-1<x<0$. Para todas estas x el trinomio x^2+x+1 se eleva a potencia negativa x. Ya que para estas x el trinomio $x^2+x+1<1$, entonces para las mismas $(x^2+x+1)^x>1$, lo que contradice a la condición. Pues así, estas x no pueden ser soluciones de nuestra desigualdad.

b) Supongamos que $x^2+x+1>1$. Está claro que ésta es válida para $x>0$ y para $x<-1$. Por eso aquí se deben examinar dos casos.

Sea $x>0$. Entonces $x^2+x+1>1$, y luego de elevarla x a potencia positiva, el signo de la desigualdad se conserva, o sea, para estas x obtendremos que $(x^2+x+1)^x>1$. Por lo tanto, estas x tampoco pueden ser soluciones de nuestra desigualdad.

Sea $x<-1$. Entonces $x^3+x+1>1$. Si ahora el trinomio x^2+x+1 se eleva a potencia negativa x, se obtendrá un resultado mayor que 1, es decir, para todos los valores de $x<-1$ tendremos $(x^2+x+1)^x<1$.

Así la solución de la desigualdad inicial serán todos los valores de $x<-1$.

Anteriormente hemos utilizado con frecuencia el concepto de RVA. Sin embargo, no hemos centrado nuestra atención, excepto algunos ejemplos elementales, al papel que jugaba el RVA: si éste ayudaba o no a la resolución de la desigualdad. Por lo tanto, examinemos a continuación dos desigualdades; al resolverlas prestaremos atención especial si es necesario o no calcular previamente el RVA de la desigualdad.

En el ejemplo siguiente, su resolución se facilita considerablemente si se busca de antemano el RVA.

33. *Resolver la desigualdad*

$$\log_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right)\geqslant\frac{1}{2}.$$

El RVA de esta desigualdad se determina partiendo de las condiciones $(4x-5)/|x-2|>0$, $x^2>0$, $x^2\neq 1$, de donde $x>5/4$ y $x\neq 2$. Pero, para todas estas x tenemos $x^2>1$, por eso la desigualdad, según las propiedades de los logaritmos con la base mayor que 1 dentro del RVA es equivalente a la siguiente:

$$\frac{4x-5}{|x-2|}\geqslant x.$$

Ya que $x\neq 2$, la expresión $|x-2|$ es positiva y por eso la desigualdad inicial es equivalente, en el RVA, a la desigualdad

$$4x-5\geqslant x\,|x-2|.$$

Ahora examinemos dos casos.

a) Sea $x>2$. En este caso nuestra desigualdad tendrá la forma siguiente: $4x-5\geqslant x^2-2x$, o bien, $x^2-6x+5\leqslant 0$. La solución de la última desigualdad serán todas las x del intervalo $1\leqslant x\leqslant 5$, y la de la desigualdad inicial en este caso serán todas las x del intervalo $2<x\leqslant 5$.

b) Ahora sea $5/4\leqslant x<2$. Entonces, nuestra desigualdad toma la forma de $4x-5\geqslant -x^2+2x$, o bien, $x^2+2x-5\geqslant 0$. Su solución serán todas las x de los intervalos $x\geqslant\sqrt{6}-1$ y $x\leqslant-\sqrt{6}-1$. La solución de la desigualdad inicial en este caso serán todos los valores de x del intervalo $\sqrt{6}-1\leqslant x<2$.

Si reunimos ambos casos, obtenemos que la solución de la desigualdad inicial serán todos los valores de x de los intervalos $\sqrt{6}-1\leqslant$ $\leqslant x<2$ y $2<x\leqslant 5$.

En el ejemplo siguiente el cálculo previo del RVA no es razonable, porque no facilita la resolución y representa un problema bastante difícil.

34. *Resolver la desigualdad*

$$\log_x 2x\leqslant\sqrt{\log_x(2x^3)}.$$

Sin hallar el RVA, señalemos solamente que dentro del RVA $x>0$ y $x\neq 1$.

Designamos $\log_x 2$ por y; en este caso la desigualdad tendrá la forma

$$y+1\leqslant\sqrt{y+3}. \tag{7}$$

El RVA de esta desigualdad consta de $y\geqslant -3$. Pero, para y del intervalo $-3\leqslant y<-1$ la desigualdad es evidente; por lo tanto, todas estas y son sus soluciones.

Ahora sea $y\geqslant -1$. En este caso ambos miembros de la desigualdad (7) no son negativos; esta desigualdad puede elevarse al cuadrado y obtener (para $y\geqslant -1$) una desigualdad equivalente $(y+1)^2\leqslant y+3$, cuya solución son todas las y del intervalo $-2\leqslant y\leqslant 1$. La solución de la desigualdad (7) serán, en este caso, todas las y del intervalo $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Al reunir ambos casos obtenemos que la desigualdad (7) se satisface para $-3\leqslant y\leqslant 1$.

Al tomar x, obtenemos que la desigualdad inicial tendrá soluciones para las x que satisfacen la desigualdad doble $-3\leqslant\log_x 2\leqslant 1$.

Se puede resover esta desigualdad aplicando dos procedimientos.

Primera resolución. Ya que las propiedades de los logaritmos son distintas en las bases, mayores o menores que la unidad, examinemos dos casos: $x>1$ y $0<x<1$.

a) Sea $x>1$. En este caso $\log_x 2>0$; es mucho más que $\log_x 2\geqslant$ $\geqslant -3$. Nos queda por resolver la desigualdad $\log_x 2\leqslant 1$, de donde

$2\leqslant x$. De tal modo, en este caso la solución de la desigualdad inicial serán todos los valores de $x\geqslant 2$.

b) Sea $0<x<1$. Entonces $\log_x 2<0$; es más que $\log_x 2\leqslant 1$. Nos queda por resolver la desigualdad $-3\leqslant\log_x 2$, de donde $x^{-3}\geqslant 2$, o sea, $x\leqslant 2^{-1/3}$. De esa manera, en este caso la solución de la desigualdad inicial serán todos los valores de x del intervalo $0\leqslant x\leqslant\sqrt[3]{1/2}$.

Al reunir los dos casos obtenemos que la solución de la desigualdad inicial serán $0<x\leqslant\sqrt[3]{1/2}$ y $x\geqslant 2$.

Segunda resolución. Si $\log_x 2=1/\log_2 x$ entonces, al designar $\log_2 x$ por z, llegamos a un sistema de desigualdades

$$\begin{cases}\dfrac{1-z}{z}\leqslant 0,\\ \dfrac{1+3z}{z}\geqslant 0.\end{cases}$$

Al resolver cada una de estas desigualdades por el método de intervalos, obtenemos que este sistema será válido para $z\geqslant 1$, así como para $z\leqslant -1/3$.

Para obtener la solución queda por resolver las desigualdades logarítmicas elementales $\log_2 x\geqslant 1$ y $\log_2 x\leqslant -1/3$, de donde hallamos $x\geqslant 2$ y $0<x\leqslant\sqrt{1/2}$.

En conclusión, examinemos un ejemplo que entraña a la vez ambos peligros: adquisición y pérdida de soluciones.

35. *Resolver la desigualdad*

$$\sqrt{4\operatorname{sen}^2 x-1}\,\log_{\operatorname{sen} x}\frac{x-5}{2x-1}\geqslant 0.$$

Al principio de la resolución de este ejemplo, algunos estudiantes cometen un error: omiten de inmediato el primer factor. Por lo visto, se basan en el razonamiento siguiente: si $\sqrt{4\operatorname{sen}^2 x-1}\geqslant 0$ entónces para que se cumpla la desigualdad es necesario que el segundo factor sea también no negativo. Con este razonamiento se cometen a la vez dos errores: primero, al omitir el radical se amplía el RVA; segundo, en caso de que el primer factor sea igual a cero, la desigualdad dada se verifica también cuando el segundo factor es negativo. El primer error da origen a la adquisición de soluciones extrañas y el segundo conduce a la pérdida de soluciones.

La resolución correcta ha de tomar en consideración estos dos momentos y debe realizarse de un modo siguiente. La desigualdad en cuestión se cumple en dos casos: cuando el segundo factor es mayor o igual a cero y cuando el primer factor es igual a cero. En este caso, de las soluciones de la desigualdad y de la ecuación obtenidas de esa manera, es necesario tomar sólo aquellas que entran en el RVA de la desigualdad inicial.

Este RVA se determina por el sistema de desigualdades

$$4\,\mathrm{sen}^2 x - 1 \geqslant 0,\quad 0 < \mathrm{sen}\, x < 1,\ \frac{x-5}{2x-1} > 0.$$

De las primeras dos desigualdades se deduce que $1/2 \leqslant \mathrm{sen}\, x < 1$ y la tercera se satisface para $x < 1/2$ y $x > 5$.

Empecemos por la desigualdad $\log_{\mathrm{sen}\, x} [(x-5)/(2x-1)] \geqslant 0$. Si $\mathrm{sen}\, x < 1$, entonces esta desigualdad es equivalente, dentro del RVA, a la desigualdad $(x-5)/(2x-1) \leqslant 1$, cuyas soluciones son $x \leqslant -4$

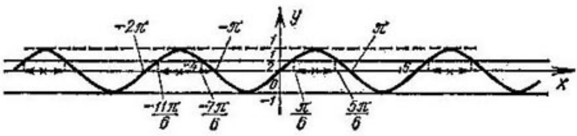


Fig. 28

y $x \geqslant 1/2$. De estos valores de x en el RVA sólo entran $x \leqslant -4$ y $x > 5$. Queda por tomar en consideración la desigualdad $1/2 \leqslant \mathrm{sen}\ x < 1$.

En la gráfica (fig. 28) se ve que la solución de esta doble desigualdad son intervalos

$$\frac{\pi}{6} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\quad n = 0;\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

de las cuales son excluidos los puntos $x = \pi/2 + 2n\pi$. Si sólo necesitamos $x \leqslant -4$ y $x > 5$, entonces (y esto lo determinamos de nuevo mediante la gráfica) los valores $n = 0$ y $n = -1$ no nos satisfacen; con todo, del intervalo correspondiente a $n = -1$ queda una parte:

$$-(11\pi)/6 \leqslant x \leqslant -4,\quad \text{excepto}\quad x = -3\pi/2.$$

Ahora examinemos la ecuación $4\,\mathrm{sen}^2 x - 1 = 0$, de la cual, teniendo en cuenta que dentro del RVA $\mathrm{sen}\, x > 0$, obtenemos $\mathrm{sen}\, x = 1/2$. Sin embargo, hemos resuelto recientemente la desigualdad a que satisfacen evidentemente las soluciones de la ecuación $\mathrm{sen}\, x = 1/2$. Por tanto, todas las soluciones de la ecuación ya están obtenidas y no habría que incluirlas si — y esto es un escollo en el ejemplo en cuestión — las soluciones de la doble desigualdad $1/2 \leqslant \mathrm{sen}\, x < 1$ no se hubieran omitido parcialmente debido a las condiciones $x \leqslant -4$ y $x > 5$. En este caso quedan excluidos los valores $-7\pi/6$ $\pi/6$ y $5\pi/6$, de los cuales los dos últimos no entran el el RVA de la desigualdad inicial, y el primero, es decir, $x = -7\pi/6$, debe unirse a los intervalos obtenidos anteriormente.

Como resultado, obtenemos la solución:

$$\frac{\pi}{6}+2n\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2n\pi,\quad x\neq\pi/2+2n\pi,$$

donde n es cualquier número entero, menos 0 y 1, $-11\pi/6\leqslant x\leqslant-4$, así como también $x=-7\pi/6$.

EJERCICIOS:

Resolver las desigualdades

1. $\log_x\frac{x+3}{x-1}>1$.
2. $\log_{0,1}(x^2+1)<\log_{0,1}(2x-5)$.
3. $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^x-\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^{-x}<3$.
4. $\frac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x}>1,\ 0<a<1$.
5. $\frac{x^2+2}{x^2-1}<-2$.
6. $\cos^2 x(\operatorname{tg}x+1)>1$.
7. $(1,25)^{1-(\log_2 x)^2}<(0,64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$.
8. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{1/2}\frac{x^5}{4}\right)^2-20\log_2 x+148<0$.
9. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\log_{1/5}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)}<1$.
10. $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{1/2}(2^{x+1}-2)>-2$.
11. $1-\sqrt{1-8(\log_{1/4}x)^2}<3\log_{1/4}x$.
12. $4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}<2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6$.
13. $\log_{x^2}(2+x)<1$.
14. $4\log_{16}\cos 2x+2\log_4\operatorname{sen}x+\log_2\cos x+3<0\quad(0<x<\pi/4)$.
15. $|x|^{x^2-x-2}<1$.
16. $\log_{1/3}\sqrt{x+1}<\log_{1/3}\sqrt{4-x^2}+1$.
17. $\left[\frac{3(\operatorname{sen}x+\cos x)-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\operatorname{sen}x-\cos x}\right]^{1/2}>1$.
18. $x+4<-\frac{2}{x+1}$.
19. $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$.
20. $\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}\geqslant 1$.
21. $\frac{5}{4}\operatorname{sen}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x>\cos 2x$.

22. $\cos^2 x < 1/2$.

23. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{\operatorname{sen} x - 2\cos x}{\operatorname{sen} x + 2\cos x} \quad (0 < x < \pi)$.

24. $4^x < 2^{x+1} + 3$.

25. $\sqrt{1-x} \leqslant \sqrt[4]{5+x}$.

26. $\frac{1}{\log_2 x} \leqslant \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}}$.

27. $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1$.

28. $(\log_{|x+6|} 2)\cdot\log_2(x^2-x-2) \geqslant 1$.

29. $\log_3 \frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 0$.

30. $3\operatorname{sen} 2x > \operatorname{sen} x + \cos x + 1$.

31. $\log_{1/2}(x+1) > \log_2(2-x)$.

32. $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > 1/2$.

33. $\sqrt{\log_a \frac{3-2x}{1-x}} < 1$.

34. $\log_{1/4}\sqrt{x^2-2x} > \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$.

35. $\log_4 \frac{2x-1}{x+1} < \cos\frac{2\pi}{3}$.

36. $\log_{x+\frac{5}{2}} \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0$.

37. $\log_a(\sqrt{25-x^2}-1) \geqslant \log_a(|x|+1)$.

38. $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geqslant 1$.

39. $\log_{\operatorname{tg} x} \sqrt{\operatorname{sen}^2 x - \frac{5}{12}} < -1$.

40. $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0$.

41. $2\cos 2x + \operatorname{sen} 2x > \operatorname{tg} x$.

42. $|3^{\operatorname{tg}\pi x} - 3^{1-\operatorname{tg}\pi x}| \geqslant 2$.

43. $(\log_{\operatorname{sen} x} 2)^2 < \log_{\operatorname{sen} x}(4\operatorname{sen}^3 x)$.

44. $\log_4(2x^2+x+1) - \log_2(2x-1) \leqslant -\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$.

45. $\log_{\frac{2x+1}{x^2-4}} 2 \leqslant \frac{1}{2}\log_{\operatorname{sen}(\pi/3)}\frac{4}{3}$.

46. $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}\,[\lg_{\operatorname{tg} x}(2+4\cos^2 x) - 2] \geqslant 0$.

47. $\log_{(3x^2+1)} 2 < 1/2$.

48. $x^{\lg^2 \operatorname{sen} x} \geqslant 1 \quad (x > 0)$.

49. $\log_{5/8}(2x^2-x-3/8) \geqslant 1$.

50. $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geqslant 0$.

51. $\log_{\operatorname{sen} x - \cos x}(\operatorname{sen} x - 5\cos x) \geqslant 1$.

52. $\operatorname{cotg}(5+3x)\cdot(\operatorname{cotg} 5 + \operatorname{cotg} 3x) \geqslant \sqrt{\operatorname{cotg} 3x} - 1$.

53. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$.

54. $x^2 - |3x+2| + x \geqslant 0$.

55. $25^x - 2^{2\log_5 6 - 1} < 10\cdot 5^{x-1}$.

56. $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$.

57. $\log_{|\operatorname{sen} x|}(x^2-8x+23) > \dfrac{3}{\log_2 |\operatorname{sen} x|}$.

58. $\log_{x/2} 8 + \log_{x/4} 8 < \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$

59. $2\operatorname{tg} 2x \leqslant 3\operatorname{tg} x$.

60. $\sqrt{5-2\operatorname{sen} x} \geqslant 6\operatorname{sen} x - 1$

§ 11. SISTEMAS DE ECUACIONES

Haremos algunas observaciones sobre los métodos de resolución de *los sistemas de ecuaciones.* Al resolver los sistemas, así como las ecuaciones "unitarias", tienen importancia esencial el concepto de equivalencia y otros conceptos próximos a éste, que se consideran detalladamente en el § 9, Parte I. Este párrafo está dedicado a los problemas relacionados con las ecuaciones "unitarias". A pesar de la semejanza lógica de los razonamientos teóricos, referentes a la equivalencia de ecuaciones y a la de sistemas, la aplicación del concepto de equivalencia para la resolución de los sistemas encierre mucho más dificultades que las resoluciones de ecuaciones y por esta razón, como regla, este concepto no se utiliza.

Las dificultades de un género especial, que surgen al resolver los sistemas, sólo están relacionadas con aquellas transformaciones del sistema que afectan a unas cuantas ecuaciones de éste (en lo que se refiere a una ecuación, pueden utilizarse totalmente los conceptos y recomendaciones del § 9, Parte I). Pero existen muchas transformaciones de tal tipo: todos saben que procedimientos más ingeniosos se aplican a veces para la resolución de los sistemas.

Por lo tanto, en el curso de la resolución de los sistemas sólo se emplea uno de dos métodos señalados en el § 9, Parte I, referentes a la resolución de ecuaciones: *la deducción de los corolarios no obligatoriamente equivalentes al sistema dado y omisión posterior de las raíces extrañas.* Con esto pasamos no a los sistemas que son los corolarios, sino a las ecuaciones independientes, cada una de las cuales es el corolario del sistema inicial, o sea, que es satisfecha por cualquier solución del sistema. Combinando estas ecuaciones, obtenemos sistemas que se derivan del sistema inicial, y logramos, por fin, cierto número de incógnitas. Finalmente, por medio de la comprobación (como regla general, mediante una sustitución directa), omitimos las soluciones extrañas.

Para seguir este camino, es necesario saber no admitir aquellas transformaciones que hagan perder soluciones; por ejemplo, la división de ambos miembros de una ecuación entre los dos miembros de otra ecuación provocará pérdidas de aquellas soluciones del sistema, en que ambos miembros de la segunda ecuación se convierten en cero. Por otra parte, la mayoría de transformaciones que se aplican con más frecuencia: adición, sustracción, multiplicación de las ecuaciones, sustitución de la incógnita de una ecuación por la de la otra, etc., no pueden conducir a la pérdida de soluciones, y por ello son admisibles. Por lo común, en cada caso concreto hay que reflexionar sobre la cuestión de si una transformación concreta, más o menos compleja, puede o no conducir a la pérdida de soluciones.

Sin duda alguna, la comprobación inmediata de las soluciones obtenidas, puede a veces presentar ciertas dificultades, y para evitarlas se pueden usar las recomendaciones dadas para la resolución de ecuaciones. Explicaremos todo lo dicho con un ejemplo.

1. *Hallar todas las soluciones complejas del sistema*

$$\left\{\begin{aligned} \frac{2x^2}{1+x^2}&=y,\\ \frac{2y^2}{1+y^2}&=x. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Puede observarse que "al dar la vuelta" a las fracciones de los primeros miembros de ambas ecuaciones y al sustituir, respectivamente, los segundos miembros por $1/y$ y $1/x$, obtendremos un sistema simple respecto de $u=1/x$ y $v=1/y$:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}&=v,\\ \frac{v^2}{2}+\frac{1}{2}&=u. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Pero, ¿es posible "dar la vuelta" a una ecuación? ¿Qué ocurre en este caso con las ecuaciones? No es difícil comprender que esta transformación no originará soluciones extrañas, pero puede inferir la pérdida de soluciones, precisamente habrá pérdidas de soluciones cuando ambos miembros de la ecuación sean iguales a cero. Por lo tanto, antes de pasar al sistema (2), conviene, para evitar pérdidas, considerar la posibilidad señalada.

El primer miembro de la primera ecuación se convierte en cero para $x=0$, y el segundo, para $y=0$. Por eso, en la ecuación puede haber perdida (y se pierde en realidad) solamente la solución para $x=0$, $y=0$. Por esta razón, después de haber hallado la solución $x=0$, $y=0$, podremos buscar las demás soluciones del sistema (2).

Al sustraer la segunda ecuación de la primera del sistema (2) obtenemos la ecuación $u^2-v^2=2(v-u)$, de donde se deduce que $u-v=0$ ó $u+v=-2$.

En el primer caso tenemos $u=1$, al poner $v=u$ en la primera ecuación del sistema (2). La sustitución directa nos convence de que el par $u_1=1$, $v_1=1$ satisface también la segunda ecuación y, por consiguiente, el sistema (2).

En el segundo caso, al poner $v=-u-2$ en la primera ecuación obtenemos que $u^2+2u+5=0$, de donde $u_{2,3}=-1\pm 2i$, y $v_{2,3}=-1\pm 2i$. La sustitución directa de los valores $u_{2,3}$ y $v_{2,3}$ en la segunda ecuación da dos igualdades

$$(-1-2i)^2+1=-2+4i,\quad (-1+2i)^2+1=-2-4i,$$

para cuya demostración se debe solamente abrir los paréntesis.

De tal modo, el sistema (2) tiene soluciones:

$$u_1=1,\ v_1=1;\ u_2=-1+2i;\ v_2=-1-2i;$$
$$u_3=-1-2i,\ v_3=-1+2i.$$

Recordándonos de que $x=1/u$ e $y=1/v$, obtenemos la solución del sistema inicial (1):

$$x_1=1,\quad y_1=1;\quad x_2=\frac{1}{-1+2i},\quad y_2=-\frac{1}{1+2i};$$
$$x_3=-\frac{1}{1+2i},\quad y_3=\frac{1}{-1+2i};$$

además de esto, no hay que olvidar la solución hallada anteriormente respecto de $x_4=0$, $y_4=0$[1].

El problema de investigar el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas presenta serias dificultades lógicas. Y como siempre, las primeras dificultades consisten en las definiciones. *¿Qué se llama el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas? ¿Qué se entiende por la solución del sistema de ecuaciones? ¿En qué caso tal sistema se denomina determinado (indeterminado, compatible, incompatible)?* He ahí las interrogaciones que a veces son insuperables para muchos estudiantes. Con frecuencia ocurre que el estudiante, al enunciar correctamente la definición general, empieza a confundirse en caso de que se le proponga contestar, por ejemplo, *si los sistemas*

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=1; \end{cases}\quad \begin{cases} 2x-y=1, \\ 2x-y=2; \end{cases}\quad \begin{cases} x=0, \\ y=1; \end{cases}\quad \begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=0, \\ 0\cdot x+0\cdot y=0 \end{cases}$$

son los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Todos estos sistemas convienen a la definición general y las dificultades consisten aquí en que éstos son "demasiado simples". Está claro que el primer sistema es indeterminado; el segundo, incompatible, el tercero tiene

[1] Los números complejos x_2, y_2, x_3 e y_3 obtenidos en el resultado se recomienda reducirlos a la forma algebraica: $x_2=(1+2i)/3$, etc.

evidentemente una sola solución $x=0$, $y=1$, y la solución del cuarto sistema es cualquier par de números x, y.

Al examinar este tema debe comprenderse ante todo: ¿con cuáles restricciones de coeficientes se realiza la investigación del sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas? Lo más importante consiste en lo siguiente: una vez realizadas las transformaciones del sistema inicial

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$$

hay que prestar atención especial al sistema obtenido

$$\left.\begin{aligned} (a_1 b_2 - a_2 b_1) x &= c_1 b_2 - c_2 b_1 \ (= \Delta_1), \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) y &= a_1 c_2 - a_2 c_1 \ (= \Delta_2), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

que es un *corolario* del sistema inicial, aunque en el caso general no es obligatoriamente equivalente a éste; de tal modo, al pasar al segundo sistema, no perdemos soluciones aunque podemos *adquirir* las extrañas.

Si $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, este sistema es determinado, es decir, tiene una sola solución: $x = \Delta_1/\Delta$, $y = \Delta_2/\Delta$. Por medio de *la sustitución* (comprobación) *directa* uno puede convencerse de que esta solución es también la del sistema inicial.

Si $\Delta = 0$, mientras que $\Delta_1 \neq 0$ ó $\Delta_2 \neq 0$, este sistema es incompatible, es decir, no tiene soluciones. Por consiguiente, el sistema inicial tampoco tiene soluciones.

En fin, si $\Delta = 0$ y $\Delta_1 = 0$, entonces también $\Delta_2 = 0$, asi que el sistema (3) tiene la forma

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0, \\ 0 \cdot y = 0, \end{cases}$$

y, por consiguiente, la solución del sistema (3) es, evidentemente, cualquier par de números x, y. Pero, esto no significa todavía que el sistema inicial se cumple con cualquier par de números, porque podríamos obtener soluciones extrañas. En realidad, así van las cosas: en el caso en que $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, es fácil demostrar que para el sistema inicial se cumple la igualdad

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2};$$

por razón de que la primera y la segunda ecuaciones del sistema inicial se deferencian solamente por el coeficiente, y por eso el sistema inicial es equivalente a una sola ecuación. Entonces es claro que éste es indeterminado, o sea, que tiene un número infinito de soluciones; al tomar los valores arbitrarios de una incógnita, con ayuda de esta ecuación se puede obtener el valor adecuado de la otra.

Sin embargo, tal investigación puede ser insuficiente para las escuelas de enseñanza superior, donde se reclaman exigencias más elevadas a las Matemáticas. Por lo tanto, ahora pasamos a exponer las definiciones requeridas e investiguemos el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, con coeficientes arbitrarios.

Definición 1. *Llámase sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas al sistema de dos ecuaciones de la forma*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, son números reales arbitrarios [1].

Definición 2. *Llámase solución del sistema al par de números reales* [2] *x_0, y_0 que satisfacen cada una de las ecuaciones del sistema dado.*

En otras palabras, la solución es un conjunto de tales dos números x_0, y_0 con que la sustitución, en el sistema inicial (2), de los números incógnitos x e y, por lòs números x_0 e y_0, respectivamente, conduce a dos igualdades numéricas correctas

$$\left\{\begin{aligned} a_1x_0+b_1y_0=c_1,\\ a_2x_0+b_2y_0=c_2. \end{aligned}\right.$$

Conviene diferenciar de tal modo dos sentidos que se dan a la expresión "*resolución del sistema*": bajo la resolución del sistema se entiende *el proceso* de búsqueda de los valores de las incógnitas, y la solución del sistema es un *conjunto* de los valores de incógnitas que convierten las ecuaciones del sistema en igualdades numéricas correctas. *Resolver un sistema de ecuaciones es hallar todas sus soluciones* [3].

Sólo por la incomprensión de los términos de "resolución y solución del sistema" se pueden explicar respuestas absurdas parecidas a la que sigue: "El sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y=13,\\ -x+\ y=1\ \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

tiene dos soluciones: $x=2$ e $y=3$". Precisamente, el conjunto de estos dos números $x=2$ e $y=3$ forma la solución única de este sistema. A estos valores de las incógnitas se les llama a veces "raíces del sistema (5)", lo que tampoco es correcto, porque el término "raíz" es aplicable sólo a *una* ecuación con una sola incógnita y no se utiliza

---

[1] Nada obstaculiza considerar también los sistemas lineales que tengan coeficientes complejos. Toda la investigación consiguiente (menos la interpretación geométrica) es válida también en este caso más general.

[2] O complejos si los coeficientes son complejos.

[3] Subrayemos que la definición 2 tiene lugar para los sistemas de ecuaciones arbitrarios; es fácil comprender que las observaciones aquí expuestas sobre las soluciones del sistema se deben tomar en consideración al resolver cualquier sistema de ecuaciones.

para el análisis de los sistemas. Finalmente, es imposible reconocer como correcta la expresión "los números 2 y 3 son la solución del sistema (5)", ya que la solución es un par de valores de las incógnitas y es esencial señalar, cuál de las incógnitas (x o bien y) es igual a 2 y cuál, a 3. La respuesta correcta del problema sobre la búsqueda de las soluciones del sistema (5) ha de tener el siguiente aspecto: "El sistema (5) tiene una solución única: $x=2$, $y=3$".

Definición 3. *El sistema de ecuaciones se llama*

— *compatible si éste tiene siquiera una sola solución;*

— *incompatible, en el caso contrario, o sea, cuando éste no tiene soluciones;*

— *determinado, si éste tiene una solución única;*

— *indeterminado, si éste tiene más de una solución.*

En otras palabras, los sistemas son compatibles e incompatibles; los sistemas compatibles se subdividen a su vez en determinados e indeterminados. Señalemos ahora unos ejemplos de cada sistema.

El sistema

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=1, \\ x+y=2 \end{cases}$$

es incompatible, porque la primera ecuación no puede convertirse en igualdad numérica correcta para cualesquiera que sean los valores de x e y.

El sistema

$$\begin{cases} 2x-y=1, \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

es incompatible: aunque existen unos pares de números (por ejemplo, $x=0$, $y=-1$, etc.) que convierten la primera ecuación en igualdad numérica correcta, y otros pares (por ejemplo, $x=1$, $y=0$, etc.) que convierten la segunda ecuación en igualdad numérica correcta; pero no hay ningún par con que ambas ecuaciones sean simultáneamente igualdades numéricas correctas.

El sistema

$$\begin{cases} x=0, \\ x=2, \end{cases} \quad \text{o bien,} \quad \begin{cases} x+0\cdot y=0, \\ x+0\cdot y=2 \end{cases}$$

es también incompatible.

El sistema

$$\begin{cases} x=0, \\ y=1, \end{cases} \quad \text{o bien,} \quad \begin{cases} x+0\cdot y=0, \\ 0\cdot x+y=1 \end{cases}$$

es compatible, o más exactamente, determinado, ya que existe solamente un par $x=0$, $y=1$ que convierte cada una de las ecuaciones en igualdad numérica correcta.

El sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=13, \\ -x+\ \ y=1 \end{cases}$$

es compatible, ya que tiene la solución $x=2$, $y=3$, o más precisamente, determinado (lo que exige argumentaciones complementarias no evidentes).

El sistema

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=1 \end{cases}$$

es compatible, ya que tiene la solución, por ejemplo, $x_1=0$, $y_1=1$, y además es indeterminado, porque $x_2=1$, $y_2=0$, por ejemplo, es su otra solución.

El sistema

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=0, \\ 0\cdot x+0\cdot y=0 \end{cases}$$

es también indeterminado, ya que cualquier par de números x, y convierte ambas ecuaciones en igualdades numéricas correctas.

Ahora pasamos a *investigar* el sistema (4). *Investigar el sistema lineal es determinar si este es incompatible, determinado o indeterminado. En los dos últimos casos es indispensable hallar su solución.* Ahora demostremos un teorema que representa en sí un contenido de investigación de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Vamos a enunciar este teorema de un modo extraordinario, en forma de esquema.

Teorema. *Sea dado un sistema* (4). *Introduzcamos las designaciones*

$$\Delta=a_1b_2-a_2b_1;\quad \Delta_1=c_1b_2-c_2b_1;\quad \Delta_2=a_1c_2-a_2c_1.$$

Entonces:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\Delta=0} \arrow[r, "\text{sí}"] \arrow[d, "\text{no}"] & \boxed{\Delta_1=\Delta_2=0} \arrow[r, "\text{sí}"] \arrow[d, "\text{no}"] & \boxed{a_1=b_1=a_2=b_2=0} \arrow[r, "\text{sí}"] \arrow[d, "\text{no}"] & {} \\
\begin{matrix}\text{determinado}\\ \text{(punto)}\end{matrix} & \text{incompatible} & \begin{matrix}\text{indeterminado}\\ \text{(recta)}\end{matrix} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\text{sí}"] & \boxed{c_1=c_2=0} \arrow[r, "\text{sí}"] \arrow[d, "\text{no}"] & \begin{matrix}\text{indeterminado}\\ \text{(plano)}\end{matrix} \\
& \text{incompatible} &
\end{tikzcd}$$

Se debe comprender este esquema del modo siguiente. Ante todo se plantea la pregunta de si se cumple la condición $\Delta=0$. Si no se cumple, la flecha respectiva indica que el sistema es determinado. Si se cumple, la flecha correspondiente ordena preguntar si se cumple la condición $\Delta_1=\Delta_2=0$. Si no se cumple, la flecha respectiva indica que el sistema es incompatible. En el caso contrario la flecha correspondiente impone hacer la pregunta siguiente, etc. El significado de las palabras „recta" y „plano" entre paréntesis será aclarado en lo ulterior.

Claro está, se puede dar un enunciado corriente de este teorema, sin embargo, en el esquema resulta más ilustrativo. He aquí el enunciado habitual:

Si $\Delta \neq 0$, *el sistema es determinado; en este caso la solución es la siguiente:* $x = \Delta_1/\Delta$, $y = \Delta_2/\Delta$. *Si* $\Delta = 0$, *y uno de los números* Δ_1, Δ_2 *se diferencia de cero, el sistema es incompatible. Si* $\Delta = 0$ *y* $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ *y uno de los números* a_1, b_1, a_2, b_2 *difiere de cero, el sistema es indeterminado. Cuando* $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ *y todos los números* a_1, b_1, a_2, b_2 son iguales a cero [1], *si bien uno de los números* c_1, c_2 *se diferencia de cero, el sistema es incompatible. En fin, si todos los coeficientes del sistema son iguales a cero, el sistema es indeterminado.* La comparación no dice nada a favor de esta enunciación.

Demostración. Examinemos el sistema (4). Si multiplicamos por b_2 la primera ecuación de este sistema y restamos del resultado la segunda ecuación, multiplicada previamente por b_1, obtendremos una ecuación

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1;$$

análogamente, si multiplicamos por a_1 la segunda ecuación y restamos del resultado la primera ecuación, multiplicada previamente por a_2, obtendremos la ecuación

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

De tal modo, obtenemos así que el sistema (3) ha de cumplirse; con ayuda de las designaciones aceptadas lo escribiremos en forma

$$\left.\begin{aligned} \Delta \cdot x &= \Delta_1, \\ \Delta \cdot y &= \Delta_2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

El sistema (6) es un *corolario* del sistema inicial (4), es decir, *cualquier solución del sistema* (4) *es la solución del sistema* (6); no afirmamos, sin embargo, que estos sistemas son equivalentes.

Supongamos que $\Delta \neq 0$. Entonces el sistema (6) tiene una sola solución: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Mediante la sustitución *(comprobación)* directa debemos convencernos además de que este par de números x, y es también la solución del sistema inicial (4). De esta manera, en el caso examinado el sistema inicial tiene una solución única. Esto demuestra la primera flecha vertical.

Damos un paso hacia la derecha, o sea, consideramos el caso $\Delta = 0$. Supongamos que la condición $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ no está cumplida, es decir,

---

[1] Es fácil ver que la condición $a_1 = b_1 = a_2 = b_2$ da origen a la igualdad $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

cuando uno de los números Δ_1, Δ_2 no es igual a cero. Entonces el sistema (6) es incompatible de lo que resulta que el sistema (4) es tampoco compatible. Esto demuestra la segunda flecha vertical.

Damos un paso más hacia la derecha, o sea, consideramos el caso $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Supongamos que la condición $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ no está cumplida, es decir, uno de los números a_1, b_1, a_2, b_2 es distinto de cero. Para mayor precisión consideraremos que $a_1 \neq 0$. Entonces, de la primera ecuación del sistema (4) tenemos $x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$. Al sustituir x en la segunda ecuación del sistema por este valor tendremos que

$$a_2 x + b_2 y = \frac{a_2 c_1 - a_2 b_1 y}{a_1} + b_2 y = \frac{a_2 c_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) y}{a_1} = \frac{a_2 c_1}{a_1} = c_2.$$

(Aquí hemos utilizado las igualdades $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta = 0$ y $a_2 c_1 = a_1 c_2$; la última se deduce de la condición $\Delta_2 = 0$). De tal modo, toda solución de la primera ecuación es la solución de la segunda y, por consiguiente, el sistema (4) se reduce a la primera ecuación. No obstante, la primera ecuación se satisface, si a la incógnita y se le da un valor arbitrario y el valor correspondiente de x se halla por la fórmula $x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$. De esa manera, en el caso considerado, el sistema (4) tiene una cantidad infinita de soluciones, y todas éstas se describen por la fórmula

$$x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}, \; y \text{ es un número arbitrario.}$$

Por lo tanto, el sistema (4) es indeterminado. Esto demuestra la tercera flecha vertical.

Damos el paso siguiente hacia la derecha, es decir, consideramos el caso en que todos los números a_1, b_1, a_2, b_2 son iguales a cero (entonces $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$). En este caso el sistema (4) tiene un aspecto muy "extraño":

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = c_1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = c_2. \end{cases}$$

Está claro que cuando $c_1 = c_2 = 0$, le satisface cualquier par de números x, y, es decir, en este caso el sistema es indeterminado, y si uno de los números c_1, c_2 es distinto de cero, el sistema es incompatible. Esto demuestran dos últimas flechas.

El teorema queda demostrado.

Consideremos *la interpretación geométrica* de los sistemas examinados. Es sabido que un conjunto de puntos de un plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación de la forma

$$ax + by = c,$$

donde a, ó b (o ambas a la vez) no son iguales a cero, es una recta. Por esta razón, la resolución del sistema (4), en el cual cada una de las ecuaciones tiene aunque una de las incógnitas, consiste en hallar un punto común de dos rectas. De la Geometría se saben todos los casos posibles de la disposición recíproca de dos rectas en un plano. Con esto tiene lugar la correlación que sigue:

En Geometría	*En Algebra:*
las rectas se intersecan	el sistema es determinado (la primera flecha vertical)
las rectas son paralelas	el sistema es incompatible (la segunda flecha vertical)
las rectas coinciden	el sistema es indeterminado (la tercera flecha vertical)

Las otras dos flechas no pueden ser interpretadas de modo análogo, ya que en los casos correspondientes el sistema no tiene sentido geométrico. No obstante, en el último caso, cuando cualquier par de números es la solución del sistema, puede decirse que el conjunto de soluciones del sistema es un plano.

Por ejemplo, *investiguemos un sistema*

$$\begin{cases} ax+\ \ y=a, \\ x+ay=1. \end{cases}$$

Calculamos, ante todo, Δ, Δ_1, Δ_2:

$$\Delta=a^2-1, \quad \Delta_1=a^2-1, \quad \Delta_2=0.$$

Ahora comprobemos la condición de entrada: $\Delta=0$. Si $\Delta=a^2-1\neq\neq 0$, es decir, si $a\neq 1$, y $a\neq -1$, entonces el sistema es determinado (la primera flecha vertical). Si $\Delta=0$ (o sea, $a=1$, o bien, $a=-1$), entonces llegamos, siguiendo la primera flecha horizontal, a la condición $\Delta_1=\Delta_2=0$. Esta condición queda satisfecha y por esto podemos seguir la segunda flecha horizontal. Por cuanto no todos los coeficientes de las incognitas son iguales a cero, entonces para $a=1$ y para $a=-1$, el sistema es indeterminado y se reduce a una sola ecuación.

De esta forma, si $a\neq 1$ y $a\neq -1$, el sistema es determinado; con esto su solución es: $x=1$, $y=0$; cuando $a=1$ y $a=-1$, el sistema es indeterminado; en estos casos sus soluciones se dan por las fórmulas:

para $a=\ \ 1 \quad y=1-x$, x es un número cualquiera,
para $a=-1 \quad y=x-1$, x es un número cualquiera.

Demos un ejemplo más: *investiguemos el sistema*

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} 2\alpha + y(1+\cos 2\alpha) = \operatorname{sen} 2\alpha, \\ x(1+\cos 2\alpha) - y \operatorname{sen} 2\alpha = 0. \end{cases}$$

Tenemos $\Delta = -\operatorname{sen}^2 2\alpha - (1+\cos 2\alpha)^2 = -2(1+\cos 2\alpha)$,

$$\Delta_1 = -\operatorname{sen}^2 2\alpha, \quad \Delta_2 = -\operatorname{sen} 2\alpha\,(1+\cos 2\alpha).$$

Si $\Delta \neq 0$, o sea, $\cos 2\alpha \neq -1$, el sistema es determinado. Si $\Delta = 0$, o sea, $\cos 2\alpha = -1$, entonces $\operatorname{sen} 2\alpha = 0$ y, por consiguiente, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Además, en este caso, son iguales a cero los seis coeficientes del sistema y, por eso, su solución será cualquier par de números x e y.

De tal modo, si $\cos 2\alpha \neq -1$, es decir, $\alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, para ningún valor de k entero el sistema en cuestión es determinado; su solución en este caso es

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

Cuando $\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, donde k es un número entero, el sistema es indeterminado y su solución será cualquier par de números x e y.

2. *¿Cuáles son los números complejos $a+bi$ que pueden ser representados en la forma $(c+di)/(c-di)$, donde c y d son números reales?*

Este problema se puede interpretar de otro modo:

¿para cuáles a y b tiene solución la ecuación $a+bi = (c+di)/(c-di)$ cuando c y d son incógnitas, o bien, para cuáles a y b la ecuación $(a+bi)\cdot(c-di) = c+di$ tiene la solución distinta de cero?

Al hacer las transformaciones necesarias, obtendremos, a base de la definición de la igualdad de los números complejos, el sistema de dos ecuaciones lineales que sigue:

$$\begin{cases} (a-1)c + bd = 0, \\ bc - (a+1)d = 0 \end{cases} \tag{7}$$

con dos incógnitas c y d y con dos parámetros a y b. Es difícil resolver este sistema mediante los métodos habituales: deben considerarse muchos casos. Para presentar, digamos, una incógnita por la otra es necesario examinar independientemente los casos en que un coeficiente sea igual o no a cero.

Entre tanto, no hay necesidad de resolver el sistema (7) porque nos interesa solamente; si tiene una solución distinta de cero. Pero es evidente que tiene la solución $c = 0$, $d = 0$, por lo que necesitamos que tenga más de una solución, es decir, que sea *indeterminado.*

Según el teorema, esto se logra cuando, y solo cuando $\Delta = -(a^2-1) - b^2 = 0$; valiéndonos del esquema, nos situamos en la tercera flecha vertical ($\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ y todos los coeficientes de las incógnitas no pueden ser iguales a cero, ya que $a-1$ y $-(a+1)$ no se convierten a la vez en cero).

De tal modo, en la forma señalada pueden representarse los números $a+bi$ que tienen $a^2+b^2=1$, o sea, los números complejos con un módulo igual a 1.

EJERCICIOS:

Resuélvanse los sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+4y}=\sqrt{2}+4, \\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{2x+2y}=2\sqrt{2}-2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}, \\ (x+y)\,2^{y-x}=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=x^{8/3}, \\ y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=x^{2/3}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2, \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2, \\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^{y^2-15y+56}=1, \\ y-x=5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2=1+6\log_4 y, \\ y^2=y\cdot 2^x+2^{2x+1}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+4y^2=96, \\ \log_{y^2} 2=\log_{xy} 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} (2^x+1)\,2^{y+1}=9, \\ \sqrt{x+y^2}=x+y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \log_9 (x^2+2)+\log_{81} (y^2+9)=2, \\ 2\log_4 (x+y)-\log_2 (x-y)=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \log_9 (x^2+1)-\log_3 (y-2)=0, \\ \log_2 (x^2-2y^2+10y-7)=2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{1+x^2+xy}{x+y}=2-y, \\ \log_{21-y} 2^{x^2}=1+y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=\dfrac{\sqrt{52-2x}}{\sqrt[4]{x-y}}, \\ \dfrac{3}{2}\log_8 (x-y)-\log_{1/\sqrt{2}} (x-y)=5. \end{cases}$

13. ¿El sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener exactamente dos soluciones?

14. Hállese para cuáles valores de k existe una solución del sistema

$$\begin{cases} x+ky=3, \\ kx+4y=6, \end{cases}$$

la que satisface a las desigualdades $x>1$, $y>0$.

15. ¿Para cuáles valores de m el sistema

$$\begin{cases} x+my=1, \\ mx-3my=2m+3 \end{cases}$$

no tiene soluciones?

16. ¿Para cuáles valores de α cualquier par de números x, y, que es la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x\operatorname{sen}2\alpha+y(1+\cos 2\alpha)=\operatorname{sen}2\alpha, \\ x(1+\cos 2\alpha)-y\operatorname{sen}2\alpha=0, \end{cases}$$

es a la vez la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha=\operatorname{sen}\alpha, \\ x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha=0? \end{cases}$$

§ 12. PROBLEMAS «DE TEXTO»

Llamamos problemas "de texto" los problemas que tradicionalmente figuran como los de composición de las ecuaciones. El hecho es que en últimos tiempos a los estudiantes se proponen con mucha frecuencia problemas para cuyas resoluciones, o sea búsquedas de los valores incógnitos requeridos, es necesario aprovecharse no sólo de las ecuaciones, sino de las desigualdades [1] y, de vez en cuando, de otras condiciones que no se escriben en forma de ecuaciones y desigualdades. Por tanto, lo principal que reúne los problemas de tal tipo es que la condición de un problema se enuncia solamente en la forma de un texto, sin fórmulas ni designaciones algebraicas de las incógnitas. Además, la costumbre de la mayoría de los estudiantes de considerar todo problema de texto como una tarea de componer ecuaciones, presta a veces un mal servicio: se ven sin preparación sicológica ante el hecho de que unas ecuaciones son insuficientes para resolver el problema.

Los problemas del tipo habitual, en los cuales todas las condiciones se escriben en forma de ecuaciones, no presentan, como regla general,

[1] Notemos que las desigualdades están presentes casi en todos los problemas de tal índole: si, por ejemplo s es una distancia, entonces $s>0$, etc. Sin embargo, no las escriben explícitamente, sino que utilizan durante la resolución de las ecuaciones y la omisión de las soluciones extrañas.

grandes dificultades, aunque ciertos elementos de estos problemas causan a veces situaciones embarazosas. En lo que se refiere a los problemas más complicados, su dificultad se explica, por lo común, por el carácter no habitual, y necesita no sólo resolver ciertos sistemas de ecuaciones o desigualdades sino saber de razonar.

En este caso resulta a menudo que los razonamientos sencillos, sin componer ecuaciones y desigualdades, aunque sea posible componerlas, hacen llegar más fácil y rápidamente a la meta. Además, a veces se puede resolver un problema por simples razonamientos y hasta más rápido que por los métodos matemáticos corrientes. Sin embargo, la resolución por razonamientos simples no siempre es rigurosa y debe completarse con cálculos matemáticos rigurosos.

Empecemos por *los problemas de mezclas*. La composición de un sistema de ecuaciones en estos problemas presenta dificultades para muchos estudiantes.

1. *Se tienen tres mezclas compuestas de tres elementos A, B y C. La primera mezcla consta sólo de los elementos A y B en proporción de peso de $3:5$, la segunda mezcla contiene solamente los elementos B y C en proporción de peso de $1:2$, en la tercera mezcla entran sólo los elementos A y C en proporción de peso de $2:3$. ¿En qué proporción se han de tomar estas mezclas para que la mezcla obtenida contenga los ingredientes A, B y C en proporción de peso de $3:5:2$?*

Algunos estudiantes comprenden incorrectamente la expresión "proporción de peso", otros se asustan a la palabra "mezclas".

En realidad, este problema no es difícil.

Ya que los elementos A y B componen la primera mezcla en proporción de $3:5$, entonces cada gramo de la primera mezcla contiene $3/8$ g del elemento A y $5/8$ g del elemento B. Análogamente, 1 g de la segunda mezcla contiene $1/3$ g del elemento B y $2/3$ g del elemento C; 1 g de la tercera mezcla contiene $2/5$ g del elemento A y $3/5$ g del elemento C.

Si tomamos x g de la primera mezcla, y g de la segunda y z g de la tercera y las mezclamos, obtendremos $(x+y+z)$ g de la nueva mezcla, con lo que ésta contendrá $\left(\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z\right)$ g del elemento A, $\left(\frac{5}{8}x+\frac{1}{3}y\right)$ g del elemento B y $\left(\frac{2}{3}y+\frac{3}{5}z\right)$ g del elemento C. Tenemos que tomar la primera, segunda y tercera mezclas en tales cantidades que la mezcla obtenida contenga los elementos A, B y C en proporción de $3:5:2$, es decir, que 1 g de la mezcla nueva comprenda $3/10$ g del elemento A, $5/10$ g del elemento B y $2/10$ g del elemento C. Pues, en $x+y+z$ g de la mezcla nueva habrá $\frac{3(x+y+z)}{10}$ g del elemento A, $\frac{5(x+y+z)}{10}$ g del elemento B y $\frac{2(x+y+z)}{10}$ g del elemento C. Si igualamos diferentes expresiones para la misma cantidad de gramos de los elementos A, B y C, obtendremos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{3}{8}x + \frac{2}{5}z = \frac{3}{10}(x+y+z), \\ \frac{5}{8}x + \frac{1}{3}y = \frac{5}{10}(x+y+z), \\ \frac{2}{3}y + \frac{3}{5}z = \frac{2}{10}(x+y+z). \end{cases} \qquad (1)$$

Notemos que aunque se hayan obtenido tres ecuaciones con tres variables, el sistema tiene solamente dos ecuaciones independientes. Esto es fácil demostrar, por ejemplo, así: sustrayendo de la igualdad $x+y+z=x+y+z$ la suma de las dos primeras ecuaciones, obtendremos la tercera ecuación. Por lo tanto, del sistema (1) hallaremos no las x, y, z, sino la proporción $x:y:z$. Eliminando x, por ejemplo, de las dos primeras ecuaciones del sistema (1), hallamos que $y=2z$. Si colocamos este valor de y en cualquier ecuación del sistema, obtendremos que $x=(20/3)z$. Por consiguiente, $x:y:z=20:6:3$, o sea, hay que tomar la mezcla en proporción de peso de $20:6:3$.

No menos dificultades presentan *los problemas de tanto por ciento.* Mientras tanto, no hay nada difícil en el concepto de "tanto por ciento": sin demoras podemos eliminar el por ciento, examinando una cantidad correspondiente de partes centésimas de un número. El siguiente problema contiene tanto "mezclas" como "tanto por ciento".

2. *El por ciento (por el peso) de alcohol en tres soluciones forma una progresión geométrica. Si se mezclan la primera, segunda y tercera soluciones en proporción de peso de $2:3:4$, se obtendrá una solución de un 32% de alcohol. Si estas se mezclan en proporción de peso de $3:2:1$, se obtendrá una solución de un 22% de alcohol. ¿Qué por ciento de alcohol contiene cada solución?*

En la primera solución hay x %, en la segunda y % y en la tercera, z % de alcohol. Esto significa que 1 g de la primera solución contiene $x/100$ g de alcohol, 1 g de la segunda solución, $y/100$ g de alcohol y 1 g de la tercera solución, $z/100$ g de alcohol. Si tomamos 2 g de la primera solución, 3 g de la segunda y 4 g de la tercera, obtendremos 9 g de una mezcla que contiene $\left(2\cdot\frac{x}{100}+3\cdot\frac{y}{100}+4\cdot\frac{z}{100}\right)$ g de alcohol. Según la condición del problema, la mezcla obtenida contiene un 32% de alcohol, es decir, en 9 g de la mezcla hay $9.\frac{32}{100}$ g de alcohol. De esta condición obtendremos una ecuación

$$\frac{2x+3y+4z}{100}=\frac{9\cdot 32}{100}.$$

Por analogía obtendremos una ecuación más:

$$\frac{3x+2y+z}{100}=\frac{6\cdot 22}{100}.$$

En fin, según la condición del problema, los números x, y, z forman una progresión geométrica por razón de que $y^2 = xz$.

Ahora nos queda resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=288, \\ 3x+2y+\ z=132, \\ \qquad\quad y^2=xz. \end{cases}$$

Al resolver las dos primeras ecuaciones con relación a y y z y al poner las expresiones obtenidas en la tercera ecuación, obtenemos la ecuación $x^2-76x+768=0$, cuyas raíces son: $x_1=64$, $x_2=12$.

Pero, el valor $x_1=64$ no satisface las condiciones del problema, porque el valor respectivo de $y=48-2x$ es negativo. Por eso, queda sólo $x=12$. En este caso se halla fácilmente: $y=24$ y $z=48$. De tal modo, la primera solución contiene el 12% de alcohol, la segunda, 24% y la tercera, 48%.

En muchos casos surgen dificultades durante las resoluciones de los sistemas obtenidos, sobre todo en los casos en que para hallar la incógnita necesaria se requiere cierta perspicacia o método artificial. Tal método facilita frecuente y esencialmente los cálculos o señala en general el único método posible para la solución del problema.

3. *Un afluente desemboca en un río. A cierta distancia de la desembocadura del afluente está situado el punto A. En el río, a la misma distancia de la desembocadura del afluente se encuentra el punto B. El tiempo necesario para que una lancha a motor navegue, de ida y vuelta, del punto A a la desembocadura del afluente, y el tiempo requerido para que ésta cubra la distancia de ida y vuelta del punto B hasta la desembocadura del afluente, se refieren como* 32 : 35. *Si la velocidad de la lancha a motor fuera en* 2 km/h *mayor, esta relación sería igual a* 15 : 16, *y si la velocidad de la lancha a motor fuera en* 2 km/h *menor, esta relación sería igual a* 7 : 8. *Hállese la velocidad de la corriente del río. (Las distancias se miden a lo largo del afluente y del río, respectivamente).*

Sea u km/h la velocidad de la corriente del río, v km/h, la velocidad de la lancha en el agua muerta y w km/h, la velocidad de la corriente del afluente. Luego, la distancia desde el punto A hasta la desembocadura del afluente es igual a s km. Entonces, para superar la vía de ida y vuelta desde el punto A hasta la desembocadura del afluente la lancha necesita $t_1=s/(v+w)+s/(v-w)=2sv/(v^2-w^2)$ (horas). Ya que la distancia desde el punto B hasta la desembocadura del afluente es también igual a s km, la lancha, en su novegación de ida y vuelta desde B hasta la desembocadura del afluente, invierte $t_2=s/(v+u)+$ $+s/(v-u)=2sv/(v^2-u^2)$ (horas). De la condición $t_1:t_2=32:35$ obtenemos la primera ecuación

$$\frac{v^2-u^2}{v^2-w^2}=\frac{32}{35}.$$

De modo análogo se componen las otras dos ecuaciones

$$\frac{(v+2)^2-u^2}{(v+2)^2-w^2}=\frac{15}{16},$$
$$\frac{(v-2)^2-u^2}{(v-2)^2-w^2}=\frac{7}{8}.$$

Después de simplificarlo, este sistema de ecuaciones puede escribirse así:

$$\begin{cases} 3v^2=35u^2-32w^2, \\ (v+2)^2=16u^2-15w^2, \\ (v-2)^2=8u^2-7w^2. \end{cases}$$

De este sistema debemos hallar u. Este sistema se resuelve con facilidad si primero se elimina u, es decir, aquella incógnita que se busca. Al eliminar u, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2(v-2)^2-(v+2)^2=w^2, \\ 35(v-2)^2-24v^2=11w^2 \end{cases}$$

Si de este sistema eliminamos w, obtenemos la ecuación $13(v-2)^2+11(v+2)^2-24v^2=0$ de donde $v=12$. Ahora se deduce que $w=2$ y que $u=4$. De tal modo hemos obtenido la solución: la velocidad de la corriente del río es de 4 km/h.

En el problema que sigue se presenta un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Parece que es fácil de resolver. Sin embargo, algunos estudiantes no cumplen esta tarea, enredándose en los cálculos de *los coeficientes de letras*. Conviene subrayar que los problemas con datos de letras (y no los de números) se encuentran con bastante frecuencia.

4. *Dos ríos desembocan en un lago. Un barco sale del puerto M situado en el primer río, navega agua abajo hasta el lago atravesándolo y donde no hay ninguna corriente, y por el segundo río, agua arriba, contra la corriente, hasta el puerto N. Seguidamente el barco regresa. La velocidad del barco, sin tomar en cuenta la corriente es igual a v, la velocidad de la corriente del primer río es v_1; la del segundo río es v_2; el tiempo de movimiento del buque desde M hasta N es igual a t, y la distancia desde M hasta N es igual a S. El tiempo de navegación de regreso desde N hasta M, por la misma ruta, es también igual a t. ¿Qué distancia recorre el buque por el lago en una dirección?*

Designamos por s_1 y s_2 las distancias desde los puertos M y N hasta el lago, y por s, la vía que pasa por el lago. Por la condición del problema tenemos: $s_1+s+s_2=S$. Es evidente que el tiempo empleado por el buque para superar la ruta de M a N, es igual a

$$\frac{s_1}{v+v_1}+\frac{s}{v}+\frac{s_2}{v-v_2}=t;$$

análogamente, calculamos el tiempo necesario para superar la ruta de regreso. De este modo obtenemos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas s_1, s_2, s:

$$\left\{\begin{aligned} s_1+s+s_2&=S,\\ \frac{s_1}{v+v_1}+\frac{s}{v}+\frac{s_2}{v-v_2}&=t,\\ \frac{s_1}{v-v_1}+\frac{s}{v}+\frac{s_2}{v+v_2}&=t; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

de estas incógnitas nos interesa la magnitud s.

Esta sistema parece bastante complejo, aunque en principio no hay nada de eso: en realidad, si recordamos que v, v_1, v_2, S, t son constantes dadas, resulta claro que el sistema (2) es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Y tal sistema siempre puede ser resuelto si eliminamos, sucesivamente, las incógnitas.

No obstante, ocurre con frecuencia que lo simple en la teoría resulta muy complejo en la práctica. El método indicado para resolver nuestro problema es muy engorroso y presenta cálculos voluminosos porque los coeficientes del sistema (2) son bastante complejos.

Por esta razón, vamos a resolver el sistema (2) valiéndonos de un método un poco artificial, pero breve. La segunda ecuación de este sistema puede presentarse en forma

$$\begin{aligned} v^2s_1-vv_2s_1+v^2s+(v_1-v_2)vs-v_1v_2s+v^2s_2+vv_1s_2&=\\ =tv(v^2+vv_1-vv_2-v_1v_2)&. \end{aligned}$$

Al sustituir la suma del primer miembro $v^2s_1+v^2s+v^2s_2$ por v^2S, hay que referirse a la primera ecuación, y al agrupar los términos obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} v^2S+v[v_1s_2-v_2s_1+(v_1-v_2)s]-v_1v_2s&=\\ =tv(v^2+vv_1-vv_2-v_1v_2)&. \end{aligned} \tag{3}$$

Así mismo puede transformarse también la tercera ecuación de nuestro sistema. Pero los cálculos pueden "economizarse" si notamos que la tercera ecuación es muy "parecida" a la segunda: si sustituimos s_1 y v_1 de aquélla por s_2 y v_2 y a la inversa, obtendremos la segunda ecuación. Por lo tanto, al sustituir s_1 y v_1 por s_2 y v_2 de la segunda ecuación (3) ya transformada, y a la inversa, obtendremos la tercera ecuación transformada

$$\begin{aligned} v^2S+v[v_2s_1-v_1s_2+(v_2-v_1)s]-v_2v_1s&=\\ =tv(v^2+vv_2-vv_1-v_2v_1)&. \end{aligned} \tag{4}$$

Sumando ahora las igualdades obtenidas (3) y (4) tendremos $2v^2S-2v_1v_2s=tv(2v^2-2v_1v_2)$, de donde se deduce que la ruta buscada, que pasa por el lago, es:

$$s=v\frac{vS-v^2t+v_1v_2t}{v_1v_2}=vt+v^2\frac{S-vt}{v_1v_2}. \tag{5}$$

El problema queda completamente resuelto. Sin embargo, algunos estudiantes, al obtener la solución del problema con los datos algebraicos (por ejemplo, la fórmula (5)), consideran necesario aclarar con cuáles relaciones entre los datos esta solución tiene "un sentido real" (se superponen requerimientos de que las velocidades, las rutas, etc., son positivas, se introducen condiciones con las cuales los denominadores son distintos de cero, etc.). Claro está que una investigación correcta no empeora la resolución del problema, pero esta investigación no es un elemento lógicamente necesario de la resolución, porque en la condición del problema se sobreentiende que todos los procesos reales descritos tenían lugar y, por consiguiente, los datos algebraicos ya satisfacen las relaciones adecuadas. Sin duda, se debe recurrir a tal investigación si lo exige la condición del problema.

En el transcurso de la resolución de los problemas relacionados con la composición de las ecuaciones, en el sistema obtenido resultan a menudo ecuaciones *homogéneas* de segundo grado con dos incógnitas [1]. Estas ecuaciones homogéneas aportan mucho a la resolución del sistema de ecuaciones. Efectivamente, de la ecuación homogénea de segundo grado con dos incógnitas se determina directamente la relación de éstas, lo que simplifica los cálculos subsiguientes. Por ahora examinemos un problema en cuya resolución se aplica este hecho.

5. *Un automóvil sale del punto A hacia el punto B. En ese mismo instante del punto B hacia el punto A sale una motocicleta, pero a menor velocidad. Pasado cierto tiempo se encuentran; en este momento, del punto B hacia el punto A sale una segunda motocicleta que se encuentra con el automóvil en un punto que dista del punto de encuentro de ésta con la primera motocicleta* 2/9 *del camino desde A hasta B. Si la velocidad del automóvil fuera de* 20 km/h *menos, la distancia entre los puntos de encuentro sería igual a* 72 km *y el primer encuentro tendría lugar a las* 3 *horas después de la partida del automóvil desde el punto A. Hállese la distancia entre A y B. (Las velocidades de las motocicletas son iguales.)*

Sea u km/h la velocidad del automóvil y la de la motocicleta, v km/h; sea s km la distancia AB; el automóvil y la primera motocicleta se encuentren después de t horas.

El sistema de ecuaciones se compone fácilmente:

$$\left\{\begin{aligned} &tu+tv=s,\\ &3(u-20)+3v=s,\\ &\frac{\frac{2}{9}s}{u}=\frac{vt-\frac{2}{9}s}{v},\\ &\frac{72}{u-20}=\frac{3v-72}{v}. \end{aligned}\right.$$

[1] Llámase ecuación homogénea de segundo grado con dos incógnitas a la ecuación de la forma $ax^2+bxy+cy^2=0$, donde a, b y c son ciertos números.

Si de este sistema eliminamos la incógnita complementaria t y lo simplificamos, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} s = 3\,(u + v - 20), \\ 9uv = 2\,(u + v)^2, \\ v\,(u - 20) = 24\,(u + v - 20). \end{cases}$$

Para hallar s hace falta buscar u y v que figuran en las dos últimas ecuaciones. Al notar que la segunda ecuación es la ecuación homogénea de segundo grado respecto a dos variables, hallaremos con facilidad la relación $u : v$.

Ya que nos interesan u y v, distintos de cero, obtendremos, al dividir la segunda ecuación entre v^2, una ecuación cuadrática respecto a la nueva variable $z = u/v$:

$$2z^2 - 5z + 2 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son $z_1 = 2$ y $z_2 = 1/2$, y por eso $u = 2v$ o bien $u = v/2$.

Pero, según la condición del problema, $u > v$. Por lo tanto, sólo nos conviene $u = 2v$.

Poniendo este valor de u en la tercera ecuación hallamos que $v = 40$ ó $v = 6$. Pero, si $v = 6$, entonces $u = 12$, mientras que la condición del problema se satisfacen sólo cuando $v = 40$, de lo que se deduce que $u = 80$ y $s = 300$. De tal modo, la distancia AB queda hallada: $s = 300$ km.

Hay unos problemas que presentan dificultades insuperables para los estudiantes cuando, una vez escritas las condiciones en forma de un sistema de ecuaciones, resulta, que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. Así ocurre, por ejemplo, con el problema siguiente.

6. *Dos compañeros, al tener una sola bicicleta, partieron en el mismo instante del punto A hacia el punto B; el primero de ellos se fue en bicicleta y el segundo, a pie. A cierta distancia de A el primero dejó la bicicleta en el camino y llegó caminando a B. El segundo, al llegar donde estaba la bicicleta, siguió en ésta. Ambos amigos llegaron juntos a B. En el camino de regreso del punto B al punto A procedieron de igual forma, pero el primer compañero recorrió en bicicleta un kilómetro más que la vez primera. Por esto, el segundo amigo llegó al punto A 21 minutos más tarde que el primero. Determínese la velocidad de marcha de cada uno de los amigos si en bicicleta van a una velocidad de* 20 km/h *y caminando, la velocidad del primero en* 3 *minutos por* km *es mayor que la del segundo.*

Introduzcamos las siguientes designaciones:

s km, la distancia entre los puntos A y B;

v km/h, velocidad de marcha del primer compañero;

w km/h, velocidad de marcha del segundo compañero;

a km, distancia recorrida en bicicleta por el primer compañero desde A hasta B (de tal modo, éste dejó la bicicleta en un punto que dista a km de A y siguió caminando hasta B).

Es evidente que para recorrer todo el camino de A a B, el primer amigo gastó $a/20+(s-a)/v$ horas y el segundo, $a/w+(s-a)/20$ horas. Las condiciones de simultaneidad de partida y simultaneidad de llegada al punto B dan la primera ecuación

$$\frac{a}{20}+\frac{s-a}{v}=\frac{a}{w}+\frac{s-a}{20}.$$

Los datos sobre la marcha de los amigos desde B hasta A permiten componer, en forma análoga, la segunda ecuación

$$\frac{a+1}{20}+\frac{s-a-1}{v}=\frac{a+1}{w}+\frac{s-a-1}{20}-\frac{7}{20}$$

(21 minutos $=7/20$ de una hora)[1].

Por cuanto el primer compañero emplea $1/v$ horas y el segundo, $1/w$ para 1 km, respectivamente, entonces de la condición del problema obtenemos de inmediato la tercera ecuación

$$\frac{1}{w}-\frac{1}{v}=\frac{1}{20}.$$

Así resultó un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Es imposible determinar todos los valores de las incógnitas s, a, v y w de este sistema; en este sentido el sistema es indeterminado. ¿ Y significa esto que no podemos resolver nuestro problema? No. Pues, lo único que necesitamos, es hallar dos magnitudes incógnitas: las velocidades v y w. En este sistema ellas pueden hallarse unívocamente. Con este fin, restamos la primera ecuación de la segunda y el resultado obtenido

$$\frac{1}{w}+\frac{1}{v}=\frac{9}{20}$$

lo analizaremos junto con la tercera ecuación. Después de un cálculo hallamos que $v=5$ km/h y $w=4$ km/h.

En el problema recién examinado hemos logrado hallar las incógnitas requeridas en este sistema a pesar de que la cantidad de ecuaciones era menor que la de las incógnitas; en el problema siguiente obtendremos un sistema de ecuaciones donde no se determina ninguna de las incógnitas. Al mismo tiempo es posible aclarar cúal de las incógnitas es mayor, lo que se exige demostrar en el problema.

7. *Un escolar gastó cierta suma de dinero para comprar una cartera, una estilográfica y un libro. Si la cartera, la estilográfica y el libro*

[1] Hemos reducido los minutos a horas porque todos los valores a examinar han de ser medidos en unidades concordadas. Por ejemplo, si el camino está medido en kilómetros y el tiempo en horas, la velocidad se mide en km/h. Sólo con tal concordancia de unidades de medición serán válidas las fórmulas de física que se utilizan para la resolución, por ejemplo, $s=vt$, etc.

costaran 5, 2 y 2,5 veces más baratos respectivamente, la compra costaría 8 rublos. Y si, en comparación con el precio original, la cartera costara 2 veces más barata, la estilográfica 4 veces y el libro 3 veces más baratos, por la misma compra el escolar pagaría 12 rublos. ¿Cuánto vale la compra y por qué cosa se pagó más: por la cartera o por la estilográfica?
Sea x el precio de la cartera; el precio de la estilográfica y y z, el precio, del libro. Hay que aclarar cuántos rublos pagó el escolar por la cartera la estilográfica y el libro en conjunto, es decir, hallar la suma $x+y+z$.

La primera ecuación se compone partiendo de la suposición de que la compra costaría 8 rublos:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2,5}=8.$$

Análogamente se compone la segunda ecuación:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=12.$$

Es claro que no podremos determinar todas las incógnitas de este sistema obtenido de dos ecuaciones con tres incógnitas, pero podemos hallar su suma, que es lo que se exige en el problema. Para esto escribamos nuestras ecuaciones así:

$$\begin{cases} 2x+5y+4z=80, \\ 6x+3y+4z=144. \end{cases} \tag{6}$$

Si se suman estas dos ecuaciones, se hallará la suma de las incógnitas: $x+y+z=28$. De esta manera se obtiene la respuesta a la primera pregunta del problema: toda la compra cuesta 28 rublos.

Ahora vamos a tratar de esclarecer qué es más costoso: la cartera o la estilográfica; en otras palabras, tenemos que esclarecer cuál de las desigualdades tiene lugar: $x>y$ o $y>x$.

Si de la segunda ecuación del sistema (6) restamos la primera, obtendremos que

$$2x-y=32. \tag{7}$$

Es evidente que $x>y/2$, porque en caso contrario tendríamos $32=2x-y<0$. Sin embargo, la desigualdad $x>y/2$ todavía no facilita la resolución del problema. Y no la facilita porque hemos usado mal la ecuación (7). A saber: hemos utilizado solamente que la diferencia $2x-y$ es positiva. Ahora trataremos de hacer uso del hecho de que ésta es igual a 32, tomando en consideración a la vez que $x+y+z=28$ y que todas las incógnitas son números positivos por su sentido real.

Escribamos la ecuación (7) así: $x+(x-y)=32$. Ya que toda la compra cuesta 28 rublos, entonces es notorio que $x<28$, y de la última ecuación se deduce que $x-y>0$, o sea, la cartera es más cara que la estilográfica.

En casi todos los problemas examinados con anterioridad participaron implícitamente las desigualdades; por ejemplo, en el problema 6 se utilizaron hasta dos desigualdades: $u > v$ y $u > 20$. La participación de las desigualdades en tales problemas no presenta en la práctica dificultades. Es mucho peor lo que ocurre con la solución de aquellos problemas en los que una parte de las condiciones debe anotarse explícitamente en forma de desigualdades. Muchos estudiantes, al escribir correctamente el sistema de ecuaciones y desigualdades, ni siquiera comienzan su resolución. Esto se explica, por lo visto, sólo por el hecho de que los estudiantes no están preparados sicológicamente para la resolución de estos sistemas. Así ocurrió, por ejemplo, durante la resolución del problema siguiente.

8. A las 9 a. m., *del punto A hacia el punto C parte un tren rápido. En ese mismo instante, del punto B, situado entre los puntos A y C, salen dos trenes de pasajeros, el primero de éstos va al punto A y el segundo, al punto C; las velocidades de los trenes son iguales. El tren rápido encuentra al primer tren de pasajeros a no más tardar de las 3 horas después de su partida, luego pasa por el punto B a no más tardar de las 14 horas del mismo día, llegando por fin al punto C simultáneamente con el tren de pasajeros, 12 horas después del encuentro con el primer tren de pasajeros. Hallar la hora de llegada del primer tren de pasajeros al punto A.*

Sea v_1 km/h, la velocidad del tren rápido, v_2 km/h, la del de pasajeros, la distancia AB es igual a s km. De la condición de que el tren rápido encuentra al primer tren de pasajeros *no más tardar* de las tres horas después de su partida, obtenemos que

$$\frac{s}{v_1+v_2} \leqslant 3.$$

De la condición de que el tren rápido pasó el punto B antes de las 5 horas después de su partida, tenemos

$$\frac{s}{v_1} \geqslant 5.$$

Ya que hasta el primer encuentro pasaron $s/(v_1+v_2)$ horas, entonces, durante el tiempo de $12+[s/(v_1+v_2)]$ horas el tren rápido alcanzará al segundo tren de pasajeros, por cuya razón resulta que

$$\left(12+\frac{s}{v_1+v_2}\right)(v_1-v_2)=s.$$

Nos hace falta hallar $x=s/v_2$. De ahí $s=xv_2$; sustituyendo esta expresión en lugar de s en las igualdades y desigualdades precedentes y designando v_1/v_2 por α, llegamos al sistema

$$\begin{cases} x \leqslant 3(\alpha+1), \\ x \geqslant 5\alpha, \\ x = 6(\alpha^2-1). \end{cases}$$

Muchos estudiantes no dominan este problema.

En realidad, la resolución no es tan difícil: en este sistema hay que despejar sea x ó α y pasar al sistema de dos desigualdades respecto a una incógnita. Por cuanto es más fácil, a primera vista, eliminar x, emprendemos precisamente este camino. Sustituyendo x por $6(\alpha^2 - 1)$ en dos primeras desigualdades, obtenemos el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2\alpha^2 - \alpha - 3 \leqslant 0, \\ 6\alpha^2 - 5\alpha - 6 \geqslant 0. \end{cases}$$

Las soluciones de la primera desigualdad son: $-1 \leqslant \alpha \leqslant 3/2$; las soluciones de la segunda: $\alpha \geqslant 3/2$ y $\alpha \leqslant -2/3$. De tal modo, la solución del sistema será: $\alpha = 3/2$ y, además, todas las α dentro del intervalo $-1 \leqslant \alpha \leqslant -2/3$. Como estamos interesados por las α positivas, a la condición del problema le satisface el valor único $\alpha = 3/2$. Ahora hallamos con facilidad que $x = 15/2$ y obtenemos la solución: el primer tren de pasajeros llega al punto A a las 16 horas 30 minutos.

Este problema, así como otros de este tipo, admite una solución en la que todos los datos se escriben en forma de ecuaciones. Esto se hace introduciendo incógnitas complementarias y obteniendo un sistema de ecuaciones, en las cuales el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. Sin embargo, la solución de tal sistema de ecuaciones es más difícil que la del sistema de desigualdades.

Resolvamos este problema recurriendo al segundo procedimiento. Conservemos las mismas designaciones. Que el tren rápido encuentre al primer tren de pasajeros después de $(3 - t_1)$ horas $(t_1 \geqslant 0)$, recorre el punto B después de $(5 + t_2)$ horas $(t_2 \geqslant 0)$ y alcanza al segundo tren de pasajeros después de $[(3 - t_1) + 12]$ horas. En este caso, las ecuaciones se componen fácilmente

$$\begin{cases} (v_1 + v_2)(3 - t_1) = s, \\ v_1(5 + t_2) = s, \\ (15 - t_1)(v_1 - v_2) = s, \\ xv_2 = s. \end{cases}$$

Si eliminamos s de este sistema y designamos v_1/v_2 por α obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (\alpha + 1)(3 - t_1) = x, \\ \alpha(5 + t_2) = x, \\ (\alpha - 1)(15 - t_1) = x. \end{cases} \qquad (8)$$

Este es un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas de las cuales hay que hallar sólo x. Vamos a proceder así como lo hicimos antes: eliminemos x obteniendo un sistema

$$\begin{cases} \alpha t_2 + (\alpha + 1) t_1 = 3 - 2\alpha, \\ (1 - \alpha) t_1 - \alpha t_2 = 15 - 10\alpha \end{cases} \tag{9}$$

Al notar ahora que el segundo miembro de la segunda ecuación es 5 veces mayor que el segundo miembro de la primera, miltiplicamos la primera por 5 y, al restar de ésta la segunda, obtendremos

$$6\alpha t_2 + (6\alpha + 4) t_1 = 0. \tag{10}$$

Por cuanto $\alpha > 0$, $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$, esta igualdad sólo es posible cuando $t_1 = 0$ y $t_2 = 0$. Pero, entonces de (9) se halla fácilmente que $\alpha = 3/2$, y de (8), $x = 15/2$ resultando la misma solución. Muchos estudiantes no captan la posibilidad de obtener el corolario (10) del sistema (9) y por eso no pueden deducir del sistema (9) que $t_1 = t_2 = 0$ y por eso no pueden resolver este problema.

De lo expuesto resulta evidente que el primer método de resolución es más fácil que el segundo.

9. *A las 9 a. m., de la ciudad A partió un ciclista a una velocidad constante de* 12 km/h. *Dos horas después, siguiendo al primero, partió de la misma ciudad un motociclista que iba desplazándose con un movimiento uniformemente retardado a una velocidad inicial de* 22 km/h, *de modo que su velocidad disminuía en* 2 km/h. *Un automovilista que iba al encuentro a ellos, a la ciudad A, con una velocidad constante de* 50 km/h, *encontró primeramente al motociclista y luego, al ciclista. ¿Llegará el automovilista a las* 19 *horas de este día a la ciudad A*?

Este problema puede ser resuelto también mediante la composición de ecuaciones y desigualdades. No obstante, la composición de tal sistema exigiría largos razonamientos. Por esto, es mejor resolverlo no por composición formal del sistema de ecuaciones y desigualdades, sino por un simple razonamiento. Por ejemplo, así:

De la condición del problema se infiere que al principio el motociclista alcanza al ciclista, y luego el ciclista alcanzará al motociclista. Supongamos que el ciclista demore, hasta el encuentro (no importa, el primero o el segundo), t horas, mientras que el motociclista demore $(t-2)$ horas para el mismo camino. Ya que hasta el encuentro ambos pasarán un camino igual, entonces, igualando sus caminos hasta el encuentro, obtendremos que

$$12t = 22\,(t-2) - 2\,\frac{(t-2)^2}{2}.$$

Una vez resuelta esta ecuación, obtenemos que hasta el primer encuentro el ciclista demoró 6 horas, es decir, recorrió 72 km, y hasta el segundo pasó 96 km en 8 horas. Según la condición del problema, el automovilista encontró al ciclista antes de haber pasado éste 96 km. Por eso, el automovilista ha de ir hasta el punto A menos de 96 km. Demorará menos de 96/50 horas para recorrer este camino. Ya que el ciclista demorará menos de 8 horas para encontrarse con el automovilista, entonces el encuentro tendrá lugar antes de las 17 horas. Es decir, después del encuentro con el ciclista quedan más de 2 horas para que el automovilista llegue al punto para las 19 horas. Pero, para superar este camino se necesita menos de 96/50 horas, o sea, menos de 2 horas. Por lo tanto, el automovilista llegará al punto A antes de 19 horas.

Con frecuencia se proponen problemas en los cuales se exige hallar una solución óptima relacionada, por ejemplo, con una suma de dinero que se entrega para la compra de una cantidad mayor de piezas, o de unas cuantas variantes posibles de transporte de cargas escoger aquélla que sea más barata que las demás, etc.

Las resoluciones de los problemas de esta índole pueden consistir en componer sistemas de ecuaciones y desigualdades y en resolverlos. Sin embargo, los elementos más necesarios para resolver estos problemas son los razonamientos que ayudan mucho para elegir la mejor variante.

10. *Se requiere edificar cierto número de casas de vivienda iguales de un área útil de 40* mil m². *Los gastos para la construcción de una casa de N* m² *de área habitable se componen del costo de la superestructura, proporcional a $N\sqrt{N}$, y del costo de los cimientos, proporcional a $\sqrt{N}$. La edificación de una casa* de 1600 m² *cuesta* 176,8 mil rublos *con que, en este caso el costo de la superestructura constituye un* 36% *del costo de los cimientos. Determinar qué cantidad de casas hay que construir para que la suma de gastos sea mínima y hallar esta suma.*

Supongamos que se decidió construir n casas iguales, cada una de las cuales tiene y m² de área habitable. Entonces es válida la igualdad $yn = 40\,000$. Sea z mil rublos el costo de una casa de y m² de área habitable; entonces el costo x de toda la obra se calcula por la igualdad $x = zn$.

El costo de la casa se integra por el costo v de la superestructura de la casa y por el costo w de los cimientos, es decir, $z = v + w$. Según la condición del problema, el costo de la superestructura de la casa de y m² es proporcional a $y\sqrt{y}$, o sea, $v = \alpha y\sqrt{y}$, donde α es un coeficiente. Análogamente $w = \beta\sqrt{y}$, donde β es también un coeficiente adecuado.

En particular, al construir la casa de 1600 m², teniendo en cuenta que el costo de la superestructura constituye el 36% del costo de los cimientos, obtenemos que

$$\alpha\cdot 1600\cdot\sqrt{1600} = \frac{36}{100}\cdot(\beta\cdot 1600),$$

y tomando en consideración que la edificación de la casa de 1600 m² cuesta 176,8 mil rublos, tenemos que

$$176{,}8 = \alpha\cdot 1600\sqrt{1600} + \beta\sqrt{1600}.$$

Tenemos escritos todos los datos del problema; ahora hay que determinar x, como función de n, de las ecuaciones obtenidas y luego hallar para cuál valor de n será mínima la x.

Partiendo de las dos últimas igualdades se hallan fácilmente α y β : $\alpha = 117/160\ 000$, $\beta = 13/4$. Poniendo v y w en la expresión para z, obtenemos que $z = (117/160\ 000)\ y\sqrt{y} + (13/4)\ \sqrt{y}$. Ahora, al permutar este valor de z y el valor de $y = 40\ 000/n$ de la primera igualdad a la segunda, obtenemos que

$$x = 650\left(\frac{9}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right).$$

De tal manera hemos llegado a la conclusión de que x es el costo de la construcción y la función n recién escrita es la cantidad de casas. Ahora tenemos que determinar el valor mínimo de x. Si aplicamos al segundo miembro de esta igualdad la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, obtenemos que

$$x \geqslant 2 \cdot 650\sqrt{9} = 3900,$$

donde el signo de igualdad se logra sólo cuando $8/\sqrt{n} = \sqrt{n}$, es decir, para $n = 9$. En otras palabras, el costo de la obra completa será siempre no menor que 3,9 millones de rublos y exactamente igual a este número si $n = 9$.

Por eso, al construir las casas, la suma mínima de gastos será cuando se construyan 9 casas; la construcción de estas 9 casas costará 3,9 millones de rublos.

11. *Se decidió comprar por* 100 *rublos una cantidad de juguetes para el árbol de Navidad. Estos adornos se venden por surtidos. El surtido de* 20 *juguetes cuesta* 4 *rublos, el de* 35 *juguetes,* 6 *rublos; y el surtido compuesto por* 50 *juguetes,* 9 *rublos.*

¿Cuántos y cuáles surtidos hay que comprar para que resulte la cantidad máxima de juguetes?

Sean x, y, z el número de surtidos de la primera, segunda y tercera especie, respectivamente, para que la compra de éstos asegure la máxima cantidad de juguetes (tal resolución del problema se considera, por lo común, como óptima). Entonces,

$$4x + 6y + 9z = 100.$$

Esta es la única ecuación que puede ser compuesta según la condición del problema. Sin embargo, es conocido, además de esto, que x, y y z son números enteros no negativos y que la cantidad de juguetes de esta compra es mayor que la de cualquier otra. Resulta que estas condiciones son totalmente suficientes para la determinación unívoca de todas las incógnitas.

La primera idea que puede ocurrirse, o sea, resolver la ecuación dada "atacando de frente" por selección de todos los valores posibles de incógnitas, no tiene, evidentemente, perspectivas por razón de una enorme cantidad de casos.

Sin embargo, esta selección puede reducirse considerablemente con ayuda de razonamientos "económicos". En efecto, por 12 rublos pueden comprarse 3 surtidos de la primera especie ó 2 surtidos de la segunda especie; en el primer caso adquirimos 60 juguetes, y en el segundo, 70. Por lo tanto, es evidente que el número de surtidos de la primera especie, en cuanto a la solución óptima, no debe superar a 2. Comparando análogamente los surtidos de la segunda y tercera especies, obtenemos que en la resolución óptima no debe ser más que un solo surtido de la tercera especie. De tal modo, hemos obtenido las desigualdades $x \leqslant 2$, $z \leqslant 1$.

Ahora la selección no presenta dificultades. Con $x=0$ obtenemos, para determinar y y z, una ecuación $6y+9z=100$ que no tiene soluciones, porque su primer miembro se divide entre 3 y el segundo no se divide. Luego, para $x=1$, obtenemos una ecuación $2y+3z=32$ la que (teniendo en cuenta la desigualdad $z \leqslant 1$) tiene la solución única $y=16$, $z=0$. En fin, para $x=2$, así como para $x=0$, la ecuación tampoco tiene soluciones.

De esa forma, para adquirir la máxima cantidad de juguetes hay que comprar 1 surtido de 20 juguetes y 16 surtidos de 35 juguetes.

En esta resolución se podrían evitar las selecciones si se emplearan detalladamente los razonamientos de divisibilidad. En efecto, de la ecuación dada se deriva que, al dividir el número x entre 3, proporciona un resto de 1, y el número z es par. Por lo tanto, de las desigualdades $x \leqslant 2$ y $z \leqslant 1$ se deduce que $x=1$, $z=0$ y de esta ecuación obtenemos que $y=16$.

En conclusión, notemos que las consideraciones expuestas anteriormente, significaban que la condición de resolución óptima puede ser escrita en forma de un sistema de ecuaciones y desigualdades:

$$\begin{gathered} 4x+6y+9z=100, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y,\ 0 \leqslant z \leqslant 1, \end{gathered} \tag{11}$$

con la condición complementaria de que x, y y z son números enteros. La condición de que x, y, y z son números enteros significa también que $z=2n$ y $x=1+3k$ donde n y k son también números enteros. Permutando estos valores de z y x a las desigualdades correspondientes obtenemos que $n=k=0$, es decir, $x=1$ y $z=0$. Por esto hallamos fácilmente $y=16$ de la ecuación (11).

12. *De una economía forestal a una ciudad es necesario llevar* 1590 *árboles. Para el transporte de los árboles hay camiones de una tonelada y media, de tres toneladas y de cinco. En cada uno de éstos puede transportarse por una vez,* 26, 45 *y* 75 *árboles, respectivamente. El costo de recorrido del camión de una tonelada y media es igual a* 9 *rublos, el de tres toneladas,* 15 *rublos y para el camión de cinco toneladas, 24 rublos.*

¿Cómo la economía forestal debe distribuir el transporte para que su costo total sea mínimo? No se admite un cargamento incompleto.

Sean x, y, z los números correspondientes a los camiones de una tonelada y media, de tres y de cinco toneladas respectivamente con la distribución óptima. Como no se admite el cargamento incompleto, entonces la cantidad de árboles transportados con tal repartimiento es igual a $26x+45y+75z$, de donde se obtiene la ecuación $26x+45y+75z=1590$.

Hemos llegado precisamente a una situación similar a la del problema anterior. No obstante, el intento de reducir la cantidad de selecciones, que salió bien en el caso precedente, aquí no ofrece simplificaciones perceptibles. En efecto, de esta ecuación puede deducirse que x se divide por 15 y, prácticamente, nada más. Es evidente también que el recorrido de 45 camiones de una tonelada y media costará 405 rublos y el recorrido de 26 camiones de tres toneladas que transporten la misma cantidad de árboles costará sólo 390 rublos, porque el número de camiones de una tonelada y media utilizados en la variante óptima no es mayor que 44. Por consiguiente, en cuanto a x obtenemos tres posibilidades: $x=0$, $x=15$, $x=30$. Cada uno de estos valores impone resolver la ecuación para y y z que tendrán también muchas soluciones.

De esa forma, el método indicado para la resolución parece muy largo aunque totalmente aplicable cuando lo exija un caso necesario y no haya otras ideas.

Señalemos aquí una idea atractiva que, sin embargo, no se lleva a la práctica. Valiéndose de los datos del problema es fácil calcular que por 45 rublos, en 5 camiones de una tonelada y media pueden transportarse 130 árboles y en 3 camiones de tres toneladas, 135 árboles. Por eso, al parecer, el número de camiones de una tonelada y media no debería ser mayor que 4: en otro caso, estos árboles pueden transportarse más barato. De ahí y de las consideraciones expuestas arriba se desprende que $x=0$ y las selecciones consecutivas vienen disminuyendo considerablemente.

En realidad, de este razonamiento "económico" sólo se deduce que con tal redistribución, por una suma determinada de dinero, podemos transportar un mayor número de árboles, mientras que se requiere asegurar un mínimo de costo, teniendo la cantidad dada de árboles. Con todo esto pueden evitarse selecciones en este problema si se aplican ... razonamientos corrientes, "cotidianos".

En efecto, elaborando un plan más económico cada hombre que razone, primero apreciaría cuál de los tipos de camiones disponibles es más ventajoso. Está claro que la ventaja de cada uno de éstos se determina por el costo de transportación de un árbol, que constituye para los camiones de una tonelada y media, de tres toneladas y de cinco toneladas 9/26, 1/3 y 8/25 rublos, respectivamente. Por cuanto $9/26>1/3>8/25$, resulta que más ventajoso es emplear los camiones de cinco toneladas, luego, según sea necesario, los de tres toneladas y por último, los de una tonelada y media.

Es fácil ver que el mayor número de árboles que pueden transportarse en los camiones de cinco toneladas, constituye 1575. No obstante, teniendo en cuenta que no se admite una carga incompleta de los camiones, obtenemos que los camiones de cinco toneladas pueden transportar sólo 1500 árboles, y los demás 90 árboles pueden transportarse en camiones de tres toneladas, de lo cual es natural suponer cómo resulta la distribución óptima: 20 camiones de cinco toneladas y 2 de tres toneladas.

No es difícil demostrar que este plan es realmente óptimo: si disminuimos la cantidad de camiones de cinco toneladas, entonces será necesario transportar los árboles no trasladados por éstos, utilizando los camiones de una tonelada y media o los de tres toneladas; pero, ya que el transporte de cada árbol en camiones de una tonelada y media o de tres toneladas es más caro en comparación con los camiones de cinco toneladas, el costo total del transporte va creciendo.

Pues así, la distribución óptima — 20 camiones de cinco toneladas y 2 de tres toneladas — queda hallada. ¡ Y todas las incógnitas y la ecuación única compuesta no fueron utilizadas! De tal manera, al principio hemos emprendido un camino habitual, pero en el curso de la resolución hemos encontrado un método de resolución para el cual todas las consideraciones iniciales fueron inútiles. Está claro que durante la resolución es suficiente aplicar este último método.

EJERCICIOS:

1. Tres ciclistas, al arrancar simultáneamente de un punto y en la misma dirección, van por un velódromo circular de 1 km de longitud. Un tiempo después el segundo alcanza al primero al recorrer un círculo más que éste. Pasados 4 minutos, al mismo punto llega el tercero, al recorrer una distancia igual a la superada por el primero para el momento de encuentro con el segundo. Las velocidades de los ciclistas forman en cierta sucesión una progresión aritmética con una diferencia de 5 km/h. Hallar estas velocidades.

2. Tres hermanos cuyas edades forman una progresión geométrica, reparten entre sí cierta suma de dinero directamente proporcional a sus edades. Si lo hicieran dentro de tres años, cuando el menor sea dos veces más joven que el mayor, entonces el menor obtendría en 105 y el mediano en 15 rublos más que ahora. ¿Cuántos años tiene cada uno de los hermanos?

3. Dos grupos de turistas partieron a la vez del punto A hacia el punto B. El primer grupo salió en un autobús a una velocidad de 20 km/h y llegó en éste hasta el punto C que se encuentra en el centro entre los puntos A y B, y siguió a pie. El segundo grupo al principio iba caminando pero después de una hora subió a un vehículo de paso que iba a una velocidad de 30 km/h, y llegó en éste al punto B. El primer grupo atravesó el punto C 35 minutos antes que el segundo grupo, y llegó al punto B en 1 hora 25 minutos más tarde que el segundo. ¿Qué distancia hay desde el punto A hasta el punto B, si la velocidad (caminando) del primer grupo es en 1 km/h mayor que la velocidad del segundo grupo?

4. Dos recipientes iguales están llenos de alcohol. Del primer recipiente se extrayeron a l de alcohol y se llenó la misma cantidad de litros de agua. Seguidamente, de la mezcla obtenida de alcohol y agua se extrayeron a l y se repuso la misma cantidad de litros de agua. Del segundo recipiente se vertieron $2a$l de alcohol y se llenó con la misma cantidad de litros de agua. Luego, de la mezcla obtenida de alcohol y agua se extrajeron $2a$l y se repuso la misma cantidad de litros de agua. Determinar qué parte del volumen del recipiente constituyen a l si la fuerza de la mezcla definitiva en el primer recipiente es 25/16 veces mayor que la fuerza de la mezcla definitiva en el segundo recipiente. (Llámase fuerza de la mezcla la relación del volumen del alcohol puro en la mezcla a todo el volumen de la mezcla. Se supone que el volumen de la mezcla es igual a la suma de volúmenes de sus partes componentes).

5. Dos cuerpos están en movimiento uniforme por una circunferencia en el mismo sentido. Uno de ellos alcanza al otro cada 46 s. Si estos cuerpos se mueven a las mismas velocidades en direcciones contrarias, se encuentran entonces cada 8 s. Determínense las velocidades de movimiento de los cuerpos por la circunferencia sabiendo que su radio es igual a 184 cm.

6. Las ciudades A y B están situadas a orillas de un río; la ciudad B se halla aguas abajo. A las 9 a.m., de la ciudad A hacia la ciudad B zarpó una balsa con la velocidad de la corriente del río con respecto a las orillas. Al mismo tiempo, de la ciudad B hacia la ciudad A parte un bote que se encuentra con la balsa después de 5 horas. Al llegar a la ciudad A, el bote retornó de instante y arribó a la ciudad B simultáneamente con la balsa. ¿Si el bote y la balsa tenían tiempo de llegar a la ciudad B a las 9 p. m. (del mismo día)?

7. Cada uno de tres obreros necesita un tiempo para realizar cierto trabajo; el tercer obrero lo realiza en una hora más rápido que el primero. Obrando juntos, realizarán el trabajo en una hora. Y si el primer obrero trabaja durante una hora y después va a trabajar las 4 horas el segundo obrero, los dos realizarán todo el trabajo. ¿En cuántas horas puede cumplir todo el trabajo cada uno de los obreros?

8. Hay dos soluciones de una misma sal en agua. Para obtener una mezcla que contenga 10 g de sal y 90 g de agua, se toman dos partes de la primera solución y una de la segunda. Después de una semana, de cada kilogramo de la primera y la segunda soluciones se evaporó 200 g de agua y para que resulte la misma mezcla se necesitan cuatro partes de la primera solución y una de la segunda.

¿Cuántos gramos de sal contenían en inicio 100 g de cada solución?

9. Un tren de carga que salió de A hacia B llegó a la estación C simultáneamente con un tren de pasajeros que iba desde B hacia A a una velocidad m veces mayor que la del tren de carga. Ambos trenes, después de permanecer t horas en la estación C, siguieron su camino aumentando cada uno de ellos su velocidad en un 25% en comparación con su velocidad inicial (o sea, con la velocidad que tenían antes de la llegada a C). En estas condiciones el tren de carga llegó a B en t_1 horas más tarde y el de pasajeros llegó a A en t_2 horas más tarde, en caso de que ellos se movieran sin parar y a velocidades iniciales. ¿Con cuántas horas de anterioridad salió el tren de carga de A respecto del de pasajeros que partió de B?

10. A, B y C son tres puntos unidos por caminos rectilíneos. Con el segmento del camino AB linda un campo cuadrado que tiene un lado igual a $1/2\ AB$; el segmento del camino BC es contiguo a un lote cuadrado de un lado igual a BC; al segmento de camino CA es adyacente un bosque de forma rectangular cuya longitud es igual a AC y anchura de 4 km. El área del bosque es en 20 km² mayor que la suma de las áreas de los campos cuadrados. Hallar el área del bosque.

11. Un grupo de estudiantes compuesto de 30 personas en un examen recibió calificaciones de 2, 3, 4 y 5. La suma de las calificaciones obtenidas es igual a 93; las notas de tres fueron más que las de cinco y menos que las de cuatro. Por lo demás, el número de las de cuatro se dividía por 10 y el número de las de cinco fue par. Determinar cuántas y cuáles calificaciones recibió el grupo.

12. Una motocicleta y un coche "Volga" salen simultáneamente del punto A hacia el punto B y en ese mismo instante del punto B hacia el punto A parte un coche "Moskvich" que 5 horas 50 minutos después llega al punto A. Los automóviles se encontraron 2 horas 30 minutos después de la salida, y la motocicleta y el "Moskvich", a la distancia de 140 km del punto A. Si la velocidad de la motocicleta fuera dos veces mayor, se encontraría con el "Moskvich" a 200 km del punto A. Hallar las velocidades de la motocicleta, el "Moskvich" y el "Volga".

13. El agua pura y un ácido de concentración constante empiezan a llegar simultáneamente por dos tubos a un recipiente. Una vez que el recipiente estuvo lleno, resultó una solución de ácido al 5%. Y si se dejara de hacer llegar el agua en el momento cuando el recipiente está por la mitad, resultaría una solución al 10%. Determinar cuál de los tubos proporciona el líquido más rápidamente y en cuántas veces.

14. Un coche salió del punto A hacia el punto B. Simultáneamente, al encuentro de éste, del punto B partió un ciclista. Tres minutos después del encuentro, el coche regresa al instante, sigue al ciclista y, al alcanzarlo, de nuevo vuelve al instante para llegar al punto B. Si el coche regresara al instante un minuto después del encuentro y el ciclista aumentara 15/7 veces la velocidad después del encuentro, aquél demoraría el mismo tiempo para recorrer todo el camino. Hallar la relación entre las velocidades del ciclista y del coche.

15. Desde el punto A hacia el punto B que distan uno de otro a 100 km, al mismo instante salieron un ciclista y un transeúnte. Simultáneamente, del punto B partió un automovilista al encuentro de éstos. Una hora después de la carrera el automovilista encontró al ciclista y luego, al pasar más unos $14\frac{2}{17}$ km, encontró al transeúnte y lo subió al coche; después de esto echaron a correr detrás del ciclista y lo alcanzaron. Calcular las velocidades con las cuales se movían el ciclista y el automovilista si es sabido que la velocidad del transeúnte era igual a 5 km/h. El tiempo necesario para la subida del transeúnte y el viraje del automóvil se considera igual a cero.

16. Un laboratorio necesita encargar una cantidad de matraces esféricos iguales de una capacidad total de 100 l. El valor de un matraz lo componen el costo del trabajo del obrero, proporcional al cuadrado de la superficie del matraz, y el costo del material, proporcional a su superficie. En estas condiciones, el matraz de 1 l cuesta 1 rublo 25 kopeks y el valor del trabajo constituye un 20% del costo del matraz (el espesor de las paredes del matraz se considera despreciativamente pequeño). ¿Son suficientes 100 rublos para realizar el trabajo?

17. El autobús N° 1, en el que un estudiante puede llegar de su casa al instituto, sin transbordos, demora 2 horas 1 minuto. En cualesquiera de los autobuses N° 2, N° 3, ..., N° K se puede llegar también al instituto; sin embargo, el estudiante puede hacer transbordo al autobús N° P solamente del autobús N° (P — 1). Las rutas de estos autobuses son tales que el estudiante, al llegar al instituto en uno de ellos, demorará un tiempo (sin contar los transbordos) inversamente proporcional al número de autobuses utilizados. Además de esto, en cada transbordo invertirá 4 minutos. ¿Es cierto que hay un camino que necesita en total menos de 40,1 minutos?

18. Entre el poblado A y la ciudad D se encuentran la gasolinera B y la torre de agua C que dividen la distancia AD en tres partes iguales ($AB = BC = CD$). De A hacia D salieron un coche "Volga" y un ciclista, y de D hacia A, simultáneamente con éstos, salió un camión que se cruzó con el "Volga" cerca de la torre de agua, y con el ciclista, cerca de la gasolinera. El ciclista aumentó su velocidad en 5 km/h cerca de la gasolinera. El "Volga", al llegar al punto D, regresó al instante con una velocidad de 8 km/h menos de la que tenía antes. Como resultado, en el momento cuando el camión llegó al punto A, al ciclista le quedaba por recorrer 7,5 km para llegar a C, y el "Volga", se encontraba entre B y A a 14 km de B. Hallar la distancia entre el poblado y la ciudad y las velocidades de los vehículos y el ciclista.

19. Un lote rectangular con un área de 900 m^2 hay que vallar de cerca cuyos lados adyacentes deben ser de piedra y los otros dos, de madera. Un metro de la cerca de madera cuesta 10 rublos y el de piedra, 25 rublos. Para la construcción se han asignado 2000 rublos. ¿Alcanzará esta suma?

20. El recipiente de una torre de agua se llena por varias bombas. Al principio se pusieron en acción tres bombas de igual rendimiento y después de 2,5 horas de trabajo empezaron a funcionar dos bombas más de rendimiento distinto de las tres primeras pero igual entre sí. Como resultado, una hora después de la conexión de las bombas al recipiente le faltaban 15 m^3 para llenarse; después de una hora más el recipiente estaba lleno. Una de las bombas puestas en acción más tarde podría llenar el recipiente en 40 horas. Hallar la capacidad del recipiente.

21. En las competiciones de esquís a la distancia de 10 000 metros arrancó el primer esquiador y un tiempo después salió el segundo con una velocidad en 1 m/seg mayor que la del primero. En el instante cuando el segundo alcanzó al primero éste aumentó su velocidad en 2 m/seg, mientras que la velocidad del segundo esquiador no varió. Como resultado de esto el segundo esquiador cruzó la meta 7 minutos 8 segundos después del primero. Si la distancia fuera 500 metros más larga, el segundo esquiador llegaría a la meta 7 minutos 33 segundos más tarde que el primero. Hallar qué tiempo pasó entre la salida del primero y segundo esquiadores.

22. Tres patinadores, cuyas velocidades en sucesión forman una progresión geométrica, parten simultáneamente de carrera por un círculo. Después de un tiempo el segundo patinador adelanta al primero, recorriendo 400 metros más que éste. El tercer patinador recorre una distancia igual a la recorrida por el primero hasta el momento cuando fue adelantado por el segundo, en espacio de tiempo de 2/3 de un minuto mayor que el primero. Hallar la velocidad del primer patinador.

23. Un sovjós dispone de cuatro marcas de tractores: A, B, C y D. Cuatro tractores (2 tractores de la marca B, un tractor de la marca C y un de la D) realizan la arada de un campo en dos días. Dos tractores de la marca A y un tractor de la marca C invierten tres días para el mismo trabajo, y los tres tractores de las marcas respectivas A, B y C, demoran cuatro días. ¿En qué tiempo realizarán el trabajo cuatro tractores de distintas marcas?

24. En tres campos se segaba la hierba durante tres días. En el primer día toda la hierba del primer campo se segó en 16 horas. En el segundo campo toda la hierba se segó, en el segundo día, en 11 horas. En el tercer día toda la hierba del tercer campo se segó en 5 horas: 4 horas la segaban a mano y una hora trabajaba una sola segadora. Durante el segundo y el tercer días la hierba se segó 4 veces más que en el primero.

¿Cuántas horas trabajó la segadora si por una hora ésta segaba 5 veces más hierba que la que daba la siega a mano? Se sobreentiende que la segadora no trabajaba, mientras se realizaba la siega a mano y no había pausas en el trabajo.

25. Una fábrica tiene que mandar a su cliente 1100 piezas. Para el envío las piezas se embalan en cajones. Los cajones de que se disponen son de tres tipos. En el cajón del primer tipo caben 70 piezas, en el de segundo tipo, 40 piezas, y en el de tercer tipo, 25 piezas. El costo de envío de un cajón de primer tipo es de 20 rublos, el costo de envío de un cajón de segundo tipo es de 10 rublos, el envío de un cajón de tercer tipo es de 7 rublos. ¿Cuáles cajones debe utilizar la fábrica para que el costo de envío sea el mínimo? Los cajones deben estar completos.

26. Un escolar encola de nuevo todos sus sellos en otro álbum. Si pega 20 sellos en cada hoja, entonces no le alcanzará el álbum; si pega 23 sellos, le sobrará, por lo menos, una hoja vacía. Y si al escolar se le regala igual álbum con 21 sellos, en cada hoja el escolar tendrá 500 sellos. ¿Cuántas hojas tiene el álbum?

27. Dos tubos funcionando simultáneamente durante una hora llenan de agua 3/4 de un depósito. Si al principio el primer tubo llena un 1/4 del depósito y luego el segundo, estando desconectado el primero, complete el volumen de agua hasta los 3/4 del depósito, se necesitarán para esto 2,5 horas. Si se pone en funcionamiento el primer tubo durante una hora, y el segundo, media hora, el depósito se llenará más allá de la mitad. ¿En qué tiempo cada uno de los tubos llenará el depósito?

28. Los puntos A y B se encuentran en un río de modo que la balsa que va desde A hacia B a la velocidad de la corriente del río, recorre el trayecto AB en 24 horas. La lancha a motor recorre todo el trayecto AB, en ida y regreso, en no menos de 10 horas. Si la velocidad propia de la lancha (es decir, la velocidad en agua muerta) aumentara en un 40%, entonces el trayecto (o sea, el espacio AB) sería recorrido por ésta en no más de 7 horas. Hallar el tiempo durante el cual la lancha a motor pasa el trayecto AB en caso de que su velocidad propia no aumente.

29. Desde el punto A hacia el punto B, a las 8 a. m. sale un tren rápido. En ese mismo instante, desde el punto B hacia el punto A salen dos trenes, uno de pasajeros y otro expreso; la velocidad del tren de pasajeros es dos veces menor que la del expreso.

El tren rápido encuentra al tren expreso no antes de las 10. 30 a. m., y llega al punto B a las 13.50 p. m. del mismo día. Hallar la hora de llegada del tren de pasajeros al punto A si se sabe que pasa no menos de una hora entre los encuentros del tren rápido con el expreso y del tren rápido con el de pasajeros.

30. A las 9 a. m., desde el punto A parte un ciclista que se dirige al punto B. Dos horas después de la salida del ciclista, desde A hacia B parte un automovilista que alcanza al ciclista a no más tardar las 12 del dia. Siguiendo la marcha, el automovilista llega al punto B y vuelve al instante desde B hacia A. En este camino el automovilista encuentra al ciclista y llega al punto A a las 5 p. m. de ese mismo día. Hallar el tiempo de llegada del ciclista al punto B si se sabe que entre los dos encuentros del automovilista y del ciclista transcurrieron no más de 3 horas.

§ 13. GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES

Es muy importante para el estudio del curso de las Matemáticas superiores saber representar geométricamente las dependencias funcionales dadas en fórmulas. Por lo tanto, a veces se proponen problemas de la construccion de las gráficas de las funciones.

La experiencia enseña que muchos estudiantes experimentan tales o cuales dificultades al construir las gráficas. Por eso, en la práctica hay que ejercitarse en la construcción de gráficas, recordar la imagen de las curvas fundamentales.

Como se sabe, *se denomina dependencia funcional la ley o la regla, según la cual a cada valor de x (variable independiente o argumento) de algún conjunto de números, llamado campo de definición de una función, se le pone en correspondencia con el valor de la magnitud y completamente determinado (variable dependiente o función); se llama campo de variación de una función al conjunto de valores que toma la variable dependiente y.*

Es importante subrayar que los argumentos de las dependencias funcionales, que se examinan en la escuela secundaria, *se suponen siempre como las que toman valores reales, y en calidad de valores de la variable dependiente se admiten solamente los números reales.*

Si la dependencia funcional (función) se propone como la fórmula $y=f(x)$, entonces la búsqueda de su campo de definición se reduce a la búsqueda de todos los valores reales del argumento, para los cuales la expresión $f(x)$ que determina la función tiene el sentido, es decir, toma los valores reales. Examinemos unos ejemplos.

1. *Hallar el campo de definición de la función* $y=\log_x \cos x$. El campo de definición de esta función abarca sólo aquellos valores de x para los cuales se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones: a) $x>0$, $x\neq 1$ (porque la base de los logaritmos tiene que ser positiva y no igual a 1); b) $\cos x>0$ (ya que los números negativos y el cero no tienen logaritmos).

Al resolver este sistema de desigualdades, obtenemos que el recinto de definición de la función considerada lo presenta el conjunto de números siguiente:

$$0<x<1,\ 1<x<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

donde $k=1, 2, 3, \ldots$ (represéntelo en el eje numérico).

2. *Hallar el campo de definición de la función*

$$y=\frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{\operatorname{sen} x-\cos x}}. \tag{1}$$

Esta función es indefinida para aquellos valores de x para los cuales $\operatorname{sen} x-\cos x=0$ (el denominador de la fracción debe ser distinto de cero), y además, para aquellas x, para las cuales $\operatorname{sen} x-\cos x<0$ (porque para estos valores de x, el denominador toma valores imaginarios). Por consiguiente, el recinto de definición de la función (1) consta solamente de aquellos valores de x para los cuales se cumple la desigualdad $\operatorname{sen} x-\cos x>0$; resolviendo esta desigualdad (véase el problema 6 del § 10, Parte I), hallamos que

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2}$$

Sin embargo, hay que notar que $\operatorname{cotg} x$ es indefinido para $x=n\pi$, donde n es un número entero cualquiera. Por eso, todos los valores de $x=n\pi$, $n=0, \pm 1, \ldots$, tampoco pertenecen al recinto de definición de la función considerada y deben ser excluidos del sistema de intervalos obtenido (2). De tal modo, en calidad de recinto de definición de la función (1) obtenemos definitivamente el siguiente conjunto de números reales:

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\pi+2k\pi, \quad \pi+2k\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3. *Hallar el recinto de definición de la función*

$$y=\sqrt{\cos(\cos x)}+\operatorname{arc\,sen}\frac{1+x^2}{2x}. \tag{3}$$

Examinemos por separado cada uno de los sumandos. Al recinto de definición de esta función pueden pertenecer sólo aquellos valores del argumento para los cuales el primer sumando toma los valores reales, es decir, aquellos valores de x para los cuales la expresión subradical $\cos(\cos x)$ no es negativa: $\cos(\cos x)\geqslant 0$. Es fácil convencerse (véase el problema 8 del § 8, Parte I) de que esta desigualdad es válida para todos los valores reales de x.

Vamos a referirnos al segundo sumando. Según la definición, la expresión $\operatorname{arcsen} a$ tiene sentido sólo para $|a|\leqslant 1$ (véase § 5, Parte II); es decir, al recinto de definición de la función (3) pertenecen solamente aquellos valores de x para los cuales $(1+x^2)/2x\,|\leqslant 1$. Sin embargo, se demuestra directamente (véase la fórmula (3) del § 8, Parte I) que para todos los válores reales no nulos de x es válida la desigualdad $|(1+x^2)/2x|\geqslant 1$, con la cual el signo de igualdad se obtiene sólo para $x=1$ y $x=-1$.

Por consiguiente, el recinto de definición de la función (3) consta de dos puntos: $x=-1$ y $x=1$.

De los ejemplos citados se desprende que el modo de hallar el campo de definición de las funciones obliga a "trabajar" a la vez diferentes partes de Algebra y Trigonometría. El dominio de todas estas partes hacen posible resolver fácilmente los problemas similares.

Es necesario conocer bien las definiciones y saber aclarar tales propiedades generales de las funciones como son la acotación, monotonía (sectores de crecimiento y de decrecimiento de las funciones), paridad e imparidad, periodicidad [1], saber hallar el campo de variación de la función, sus ceros, valores extremos, etc.

Vamos a subrayar que no siempre se requiere analizar las propiedades de las funciones aplicando el concepto de la derivada.

El estudiante debe tener una idea clara del sistema de coordenadas en un plano y saber dibujar las gráficas de las funciones elementales: $y=kx+b$ (la recta); $y=ax^2+bx+c$ (la parábola); $y=k/x$ (la hipérbola); $y=|x-a|$; $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$; $y=1/x^2$; $y=a^x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$, $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$; $y=\operatorname{sen} x$ (la sinusoide); $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$; $y=\operatorname{cotg} x$. Las gráficas de estas funciones deben representarse aproximadamente en cada caso concreto dándole una vista general y las particularidades características del comportamiento de la curva y no restablecerla cada vez calculando la tabla de valores y construyendo la curva por los puntos.

Es preciso saber ilustrar geométricamente las propiedades de la función en la gráfica. A veces con esto se comete un error. Contando de alguna propiedad (por ejemplo, de la imparidad del seno), un estudiante dibuja la gráfica correspondiente (la sinusoide) y dice: "Esta propiedad es propia del dibujo". Este razonamiento carece de fundamentos, porque, al utilizar propiamente las propiedades de la función, se puede con precisión, más o menos, dibujar su gráfica. Por lo tanto, todas las propiedades de las funciones han de ser demostradas rigurosamente de un modo analítico.

Con frecuencia se propone construir las gráficas de las funciones que representan en sí combinaciones de funciones elementales. En este caso se exige también expresar el comportamiento *aproximado* de la curva y en calidad de un medio auxiliar utilizar la construcción por los puntos. No se requieren investigaciones detalladas de las gráficas las que se realicen con utilización de una derivada.

Examinemos algunos problemas en los cuales la construcción de las gráficas se realiza por medio de una transferencia o una deformación determinada de las gráficas de las funciones elementales.

4. *Construir la gráfica de la función* $y=2-1/x$.

---

[1] Si se desea que el teorema de la función periódica sea válido, la definición de la función periódica se debe enunciar así: *llámase periódica a la función* $f(x)$ *si existe tal número* $T\neq 0$ *que para cualquier* x *del recinto de determinación de esta función los números* $x+T$ *y* $x-T$ *también entran en su campo de definición y para todos los valores de* x *del campo de definición* $f(x+T)=f(x)$. Esta definición de la función periódica es universalmente admitida en las Matemáticas.

El campo de definición de esta función son todos los valores reales de x, excepto $x=0$. Si se examina la función $y_1 = -1/x$ (ésta es una hipérbola cuyas ramas se encuentran en el segundo y cuarto cuadrantes, entonces es evidente que para cada valor de $x = x_0$, la magnitud de la función y resulta en 2 unidades mayor que la magnitud de la función y_1 con el mismo valor x del argumento. Por eso, es suficiente desplazar la gráfica de la función y_1, como un cuerpo sólido, dos unidades hacia arriba y a lo largo del eje de ordenadas, lo que nos prestará la gráfica incógnita de la función y (fig. 29).

Es fácil ver que el método indicado permite *construir* inmediatamente *la gráfica de la función $y = a + f(x)$, donde a es un número dado si ya está construida la gráfica de la función $y_1 = f(x)$*: es suficiente desplazar, como un cuerpo sólido, la gráfica de la función y_1 en a unidades hacia arriba si $a > 0$, y en $|a|$ unidades hacia abajo si $a < 0$.

5. *Construir la gráfica de la función* $y = \frac{3}{x+4}$.

Es evidente que x puede tomar cualesquier valores, excepto -4. Comparemos esta función con la función $y_1 = 3/x$. Está claro que la magnitud de función y que satisface algún valor de $x = x_0$, coin-

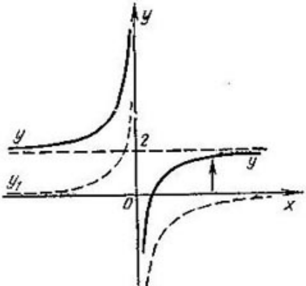


Fig. 29

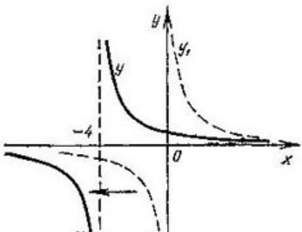


Fig. 30

cide con aquel valor de la función y_1, que corresponde al valor de su argumento que es igual a $x_0 + 4$. Por ejemplo, la función $y = 3/(x+4)$ para $x = 1$ toma el valor de $y = 3/5$, y la funcion $y_1 = 3/x$ toma el mismo valor cuando el valor de su argumento sea igual a $5 = x_0 + 4$. Por esta razón, si desplazamos la gráfica de la funcion y_1, como un cuerpo sólido, en 4 unidades a la izquierda y a lo largo del eje de abscisas, obtenemos entonces la gráfica de la función y que nos interesa (fig. 30).

No es difícil comprender que por el mismo método puede *construirse a gráfica de la función $y = f(x+b)$, donde b es un número dado,* *siempre y cuando ya esté trazada la gráfica de la función* $y_1 = f(x)$; es suficiente desplazar la gráfica de la función y_1, como un cuerpo sólido, en b unidades a la izquierda, si $b > 0$, o bien, en $|b|$ unidades a la derecha, si $b < 0$.

6. *Construir la gráfica de la función* $y = \frac{x - + 5}{3x - 2}$.

Para construir esta gráfica transformaremos primeramente la fracción y representaremos nuestra función en la forma que sigue:

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{13/9}{x - (2/3)}.$$

Si razonamos así mismo como en los problemas precedentes 4 y 5, nos convenceremos de que la gráfica de la función propuesta está representada por una hipérbola "corriente" $y = (13/9)/x$, desplazada, como un todo, en 2/3 a la derecha a lo largo del eje de abscisas y en 1/3 hacia abajo a lo largo del eje de ordenadas (¡Hágase por sí mismo el dibujo!).

Un método análogo facilita la construcción de las gráficas de cualquier función

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

(la así llamada *función fraccionaria lineal*); en efecto, una simple transformación permite escribir esta función en la forma de[1]

$$y = \frac{a}{c} + \frac{\frac{ad - bc}{c^2}}{x + \frac{d}{c}},$$

después de que conviene valerse de los razonamientos expuestos por arriba, durante la resolución de los problemas 4 y 5.

Notemos que combinando los razonamientos expresados después de las resoluciones de los problemas 4 y 5, podemos del mismo modo, sin ningunas dificultades *representar la gráfica de la función* $y = a + f(x + b)$, *donde* a *y* b *son los números dados, si la gráfica de la función* $y_1 = f(x)$ *ya queda construida.*

7. *Construir la gráfica de la función* $y = \log_4(-x)$.

A veces se oye la contesta que sigue: "No existe ninguna gráfica de esta función, ya que los números negativos no tienen logaritmos".

---

[1] En este caso se supone que $c \neq 0$ (en el caso contrario la función analizada es simplemente lineal) y que $ad - bc + 0$. Si no se cumple la última condición, la función inicial tiene el aspecto $y = k$ para todos los valores de x admisibles, donde k es constante. Por ejemplo, la función $y = (2x + 2)/(x + 1)$ está en el recinto de su determinación, es decir, para $x \neq -1$, ésta puede ser escrita en forma de $y = 2$. Por consiguiente, la gráfica de esta función es la recta $y = 2$ sin el punto $(-1, 2)$ (ni mucho menos que toda la recta $y = 2$, como lo consideran a menudo los estudiantes; compárela con el problema 11).

Esta contesta acusa una incomprension de aquel hecho elemental de que la expresión $-x$ no siempre es un número negativo.

El campo de definición de la función considerada y es un conjunto $x<0$. De inmediato se comprende que la magnitud de esta función, para $x=-x_0$, $x_0>0$, coincide con la de la función $y_1=\log_4 x$, cuando su argumento tiene el valor de x_0. Por consiguiente, para obtener la gráfica de la función y es suficiente representar en forma especular la gráfica de la función y_1 respecto al eje de ordenadas (fig. 31).

Figúrense que este metodo presenta la posibilidad de *construir la gráfica de la función $y=f(-x)$, teniendo la gráfica de la función*

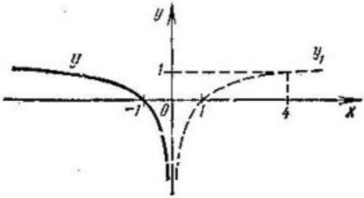


Fig. 31

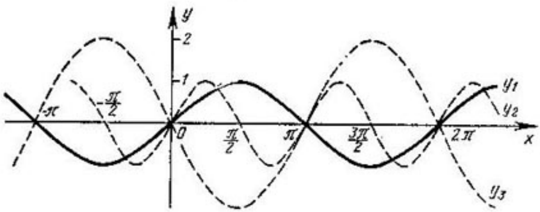


Fig. 32

$y_1=f(x)$: es suficiente representar de forma especular la gráfica de la función y_1 respecto al eje de ordenadas.

8. *Construir en un solo dibujo las gráficas de las funciones*

$$y_1=\text{sen } x,\ y_2=\text{sen } 2x,\ y_3=-2 \text{ sen } x.$$

Los estudiantes no siempre pueden trazar todas las tres curvas en un solo dibujo, reproduciendo correctamente su disposición recíproca (fig. 32); señalar rasgos característicos de cada una de estas sinusoides y explicar de qué modo éstas resultan una de la otra.

En particular es útil recordar que el mínimo período positivo de la función $y=A$ sen ωx, donde $\omega\neq 0$ y $A\neq 0$ son números dados [1], es igual a $2\pi/|\omega|$ (por ejemplo, el número $2\pi/\pi=2$ sirve de mínimo

[1] Es evidente que en el caso $\omega<0$, esta función puede presentarse como $y=$ $=-A$ sen $|\omega|x$.

período positivo para la función $y=-3$ sen πx, y el número $2\pi/|-1/3|=6\pi$, para la función $y=1/4$ sen $(-x/3)$) y su "amplitud" es igual a $|A|$ (así, la "amplitud" de la función $y=-1/2$ sen $3x$ es $1/2$).

Todo lo dicho se refiere, claro está, a las demás funciones trigonométricas.

Vale subrayar que dichos razonamientos hacen posible *construir la gráfica de la función* $y=Af(\omega x)$, *donde* $\omega\neq 0$ *y* $A\neq 0$ *son números dados, si se conoce la gráfica de la función* $y_1=f(x)$. Al principio, se debe realizar "una compresión", ω veces, de la gráfica de la función y_1 a lo largo del eje de abscisas, si $\omega>0$; y si $\omega<0$ es indispensable realizar "la compresión" de la gráfica de la función y_1 a lo largo del eje de abscisas, $|\omega|$ veces, y hacer el reflejo especular respecto del eje de ordenadas (véase la solución del problema 7). Luego, conviene "extender" A veces, a lo largo del eje de ordenadas, la curva obtenida si $A>0$; y si $A<0$, se hacen $|A|$ veces "la extensión" a lo largo del

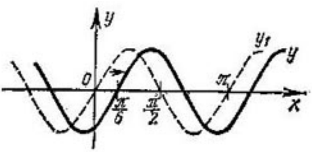


Fig. 33

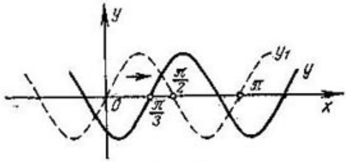


Fig. 34

eje de ordenadas y el reflejo especular respecto al eje de abscisas. En efecto, si $|\omega|<1$, "la compresión" a lo largo del eje de abscisas es realmente la extensión; asimismo "la extensión" a lo largo del eje de ordenadas $|A|$ veces, para $|A|<1$, es la compresión.

Notemos especilamente un caso de importancia particular: si está dibujada la gráfica de la función $y_1=f(x)$, la gráfica de la función $y=-f(x)$ resulta de la primera por el reflejo especular respecto al eje de abscisas.

9. *Construir la gráfica de la función* $y=$ sen $[2x-(\pi/3)]$.

Si representamos la función propuesta en la forma $y=$ sen $2[x-(\pi/6)]$ podemos observar fácilmente que para cada valor de $x=x_0$, la magnitud de la función y coincide con la de la función $y_1=$ sen $2x$ que corresponde al valor de $x_0-(\pi/6)$ de su argumento. Por lo tanto, para construir la gráfica de la función y hay que construir la de la función y_1, desplazándola luego, como un cuerpo sólido, en $\pi/6$ a la derecha y a lo largo del eje de abscisas (fig. 33).

Un error muy difundido proviene del siguiente método de construcción de la gráfica de la función y examinada: se construye la gráfica de la función y_1, luego ésta, como un cuerpo sólido, se desplaza en $\pi/3$ a la derecha, a lo largo del eje de abscisas (fig. 34). No es difícil convencerse de que esta construcción no es correcta. Efectivamente, la gráfica construida de esta manera interseca el eje de abscisas en el punto $\pi/3$ (¡Porque la gráfica de la función y_1 corta este eje en el origen de las coordenadas desplazándose después a la derecha en $\pi/3$!). Mientras tanto, la magnitud de la función y examinada es, evidentemente, diferente de cero para el valor del argumento $x=\pi/3$.

El método señalado para el ejemplo en cuestión, permite construir las gráficas de cualquier función de la forma $y=A\ \operatorname{sen}(\omega x+\varphi)$, $y=A\cos(\omega x+\varphi)$, $y=A\operatorname{tg}(\omega x+\varphi)$, etc., así como también $y=a\times\times\operatorname{sen}\omega x+b\cos\omega x$. Este método lleva un carácter general permitiendo *obtener la gráfica de la función* $y=f(\omega x+\varphi)$, *donde* $\omega\neq 0$ y φ *son*

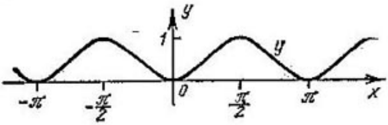


Fig. 35

números dados, si la gráfica de la función $y_1=f(x)$ *ya está dibujada*: es suficiente representar la gráfica de la función $y_2=f(\omega x)$ (ésta puede obtenerse por el método señalado para la solución del problema 8), desplazándola luego, como un cuerpo sólido, en $|\varphi/\omega|$ a la derecha, a lo largo del eje de abscisas, si $\varphi/\omega<0$, o bien en φ/ω a la izquierda, si $\varphi/\omega>0$ (véase el problema 5).

A veces es muy útil transformar primeramente la fórmula que determina la dependencia funcional en otra forma, después de que se hace posible dibujar con facilidad la gráfica. En particular, es siempre deseable representar la dependencia funcional compleja que se examina como una combinación de funciones elementales, cuya gráfica se obtiene por los métodos conocidos, (por ejemplo, así como se construyó la gráfica en el problema 6).

10. *Construir la gráfica de la función* $y=\operatorname{sen}^2 x$.

Ya que esta función puede escribirse en forma de $y=1/2-1/2\cos 2x$, la obtención de la gráfica de la función y procede según los métodos ya conocidos: es necesario desplazar en 1/2 de unidad hacia arriba la cosinusoide $y_1=-1/2\cos 2x$, que se construye por el método expuesto para la resolución del problema 8 (fig. 35).

11. *Construir la gráfica de la función*

$$y=x^{\frac{1}{\lg x}}. \tag{4}$$

La aplicación de las fórmulas conocidas para los logaritmos muestra que $x^{1/\lg x}=x^{\log_x 10}=10$. Muchos, de ahí sacan inmediatamente la conclusión de que la recta $y=10$ es la gráfica de la función (4).

Sin embargo, esta conclusión no es correcta: es necesario tener presente el campo de definición de la función que se examina y las condiciones con las cuales son válidas las transformaciones realizadas.

El campo de definición de la función (4) consta de aquellos números reales que satisfacen las condiciones: $x>0$, $x \neq 1$. En estas condiciones la transformación realizada es justa. Por lo tanto, la gráfica de la función (4) ésta representa por la semirrecta $y=10$, $x>0$, de la cual está excluido el punto (1, 10) (fig. 36; la flecha adyacente a cierto punto significa que éste no pertenece a la gráfica).

12. *Construir la gráfica de la función*

$$y=\log_{1/2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}. \tag{5}$$

Antes que nada, realicemos una transformación idéntica del segundo sumando (véase el § 4, Parte I):

$$\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}=\log_2\sqrt{(2x-1)^2}=\log_2|2x-1|=1+\log_2\left|x-\frac{1}{2}\right|.$$

Ahora está claro que el recinto de determinación de la función y es un conjunto $x>1/2$ (porque el segundo sumando de la fórmula que determina esta función tiene sentido para todos los valores de $x \neq 1/2$,

Fig. 36

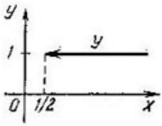


Fig. 37

y el primero sólo lo tiene para $x>1/2$). No obstante, para $x>1/2$ es válida la igualdad $\log_{1/2}(x-1/2)=-\log_2(x-1/2)$ y, por consiguiente, en su recinto de determinación (o sea, para $x>1/2$) la función (5) puede ser escrita en forma de $y=1$.

De tal modo, la gráfica de la función y está representada por un rayo $y=1$, $x>1/2$ (fig. 37; la flecha cerca del punto (1/2, 1) significa que éste no pertenece a la gráfica de la función (5)).

Los estudiantes tienen ciertas dificultades en la construcción de gráficas de aquellas dependencias funcionales cuya expresión analítica contiene un signo del valor absoluto. Con unos ejemplos demostremos cómo se construyen las gráficas de tales funciones.

13. *Construir la gráfica de la función* $y=|2-2^x|$.

Notemos que la función propuesta puede ser escrita, evidentemente, en la forma de $y=|2^x-2|$.

Examinemos la función auxiliar $y_1=2^x-2$; su gráfica se construye sin dificultades (por el método expuesto para la resolución del problema 4). ¿Y cómo se diferencia ésta de la gráfica de la función y?

Para aclarar esto recordemos la definición (véase la fórmula (2) del § 4, Parte I) se deduce que

$$y=\begin{cases} 2^x-2 \text{ para tales } x, \text{ para las cuales } 2^x-2\geqslant 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{o sea, para } x\geqslant 1; \\ -(2^x-2) \text{ para tales } x, \text{ para las cuales } 2^x-2<0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{o sea, para } x<1. \end{cases}$$

Ahora está claro que la gráfica de la función y para $x\geqslant 1$ coincide con la gráfica de la función y_1, y para $x<1$ aquella representa en sí una curva simétrica a la gráfica de la función y_1 respecto al eje de abscisas (fig. 38).

Asimismo, no se puede *obtener la gráfica de la función* $y=|f(x)|$, *si la gráfica de la función* $y_1=f(x)$ *ya queda dibujada*: es suficiente sustituir todos los segmentos de la gráfica de la función y_1, que se encuentran por debajo del eje de abscisas, por los simétricos respecto de este eje (para hallar tales segmentos hay que resolver la desigualdad $f(x)<0$).

14. *Construir la gráfica de la función* $y=||x+1|-2|$.

Aquí no hay que despejar los signos del módulo sino realizar una construcción mediante los métodos expuestos para la resolución de los problemas 6 y 13. En realidad, tomamos la gráfica de la función $y_1=|x|$ (fig. 39) y la desplazaremos, como un cuerpo sólido, en una

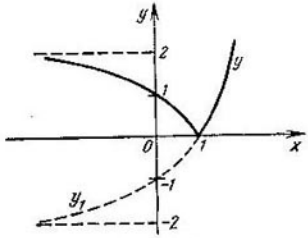


Fig. 38

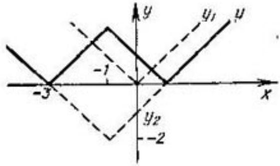


Fig. 39

unidad a la izquierda, a lo largo del eje de abscisas, y en dos unidades hacia abajo, a lo largo del eje de ordenadas. Como resultado, se obtiene la gráfica de la función $y_2=|x+1|-2$. En lo ulterior, sustituimos el segmento de esta gráfica que se encuentra por debajo del eje de abscisas y que corresponde al segmento $-3\leqslant x\leqslant 1$, por uno simétrico respecto al eje x: la línea quebrada obtenida es precisamente la gráfica de la función y.

El método general para la construcción de una función, cuya expresión analítica tiene el signo del módulo, consiste en escribir esta expresión para la dependencia funcional despejando el signo del módulo (véase el § 4, Parte I). Con esto, como regla, la dependencia funcional considerada se describe por diferentes fórmulas en distintos segmentos de la variación del argumento. Es natural que en cada uno de estos segmentos, la construcción de una gráfica hay que realizarla mediante una fórmula adecuada.

15. *Construir la gráfica de la función* $y=x^2-2|x|-3$.

Para que podamos eliminar el signo del módulo hay que examinar por separado dos casos: $x\geqslant 0$ y $x<0$ (véase el problema 1 del § 4, Parte I). Si $x\geqslant 0$, entonces $y=x^2-2x-3$. Es fácil construir esta

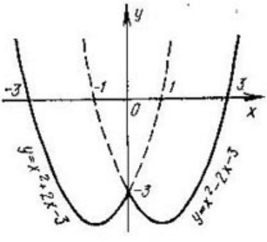


Fig. 40

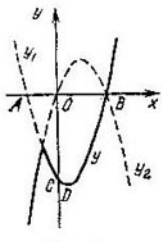


Fig. 41

parábola tomando luego sólo aquella parte suya que corresponda a los valores no negativos de x. Y cuando $x<0$, entonces $y=x^2+2x-3$. Esta parábola debe construirse también y tomar solamente aquella parte suya que corresponda a los valores negativos de x. Los dos segmentos tomados de las parábolas en conjunto forman precisamente lo que nos interesa (fig. 40).

16. *Construir la gráfica de la función*

$$y=(|x+1|+1)(x-3). \qquad (6)$$

Según la definición del valor absoluto podemos representar esta función en la forma:

$$y=\begin{cases} [(x+1)+1](x-3)=(x+2)(x-3), & \text{si } x\geqslant -1; \\ [-(x+1)+1](x-3)=-x(x-3), & \text{si } x<-1. \end{cases}$$

Ahora nos queda solamente por construir su propia curva para cada uno de los segmentos señalados ($x\geqslant -1$ y $x<-1$), valiéndonos de la fórmula correspondiente; el conjunto de estas curvas ofrecerá la gráfica de la función (6).

Consideremos al principio la función $y_1=(x+2)(x-3)$. Los estudiantes, por lo general, abren los paréntesis y realizan una eliminación, bastante larga, del cuadrado exacto. Mientras tanto, no vale la pena abrir los paréntesis para construir la gráfica de la función y_1: de inmediato es evidente que esto es una parábola, una gráfica del trinomio cuadrático; ésta interseca el eje de abscisas en los puntos $A=(-2,\ 0)$ y $B=(3,\ 0)$ (porque -2 y 3 son las raíces de este trinomio) y sus ramas están dirigidas hacia arriba (ya que el coeficiente mayor es positivo). En la fórmula para la función y_1 sustituimos la x por 0, hallamos las coordenadas del punto de intersección C de esta parábola con el eje de ordenadas: $C=(0,\ -6)$. No es difícil hallar también las coordenadas del vértice D de esta parábola. Puesto que la parábola es simétrica respecto a la recta vertical que pasa por su vértice, su eje de simetría divide en dos partes iguales el segmento AB. Por eso, es claro que la abscisa del vértice es igual a $1/2$; la ordenada se calcula directamente: $D=(1/2,\ -25/4)$.

Al construir la parábola que representa la gráfica de la función y_1, debemos separar aquel segmento suyo que corresponde a los valores de $x\geqslant -1$ del argumento (fig. 41).

En forma análoga se construye la gráfica de la función $y_2=-x(x-3)$; es necesario tomar sólo aquella parte de esta parábola

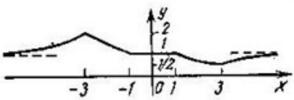


Fig. 42

que corresponde a los valores del argumento $x<-1$. En la figura 41 la gráfica de la función (6) está dibujada con una línea gruesa.

17. *Construir la gráfica de la función*

$$y=\frac{|x-3|+|x+1|}{|x+3|+|x-1|}. \tag{7}$$

En primer lugar hallemos aquellos valores de x para los cuales cada una de las expresiones que están por debajo del signo del módulo, se convierte en cero: estas son -3, -1, 1, 3.

Al examinar la función (7) en cada uno de los cinco intervalos, en los cuales estos valores dividen el eje numérico, puede obtenerse la forma de anotación siguiente:

$$y=\begin{cases} 1-\dfrac{2}{x+1}, & \text{si } x<-3,\\ -\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}, & \text{si } -3\leqslant x<-1,\\ 1, & \text{si } -1\leqslant x<1,\\ \dfrac{2}{x+1}, & \text{si } 1\leqslant x<3,\\ 1-\dfrac{2}{x+1}, & \text{si } 3\leqslant x. \end{cases}$$

La construcción posterior procede según los métodos ya conocidos (fig. 42).

Notemos que de haber crecido infinitamente la x, la gráfica de la función (7) viene aproximándose infinitamente a una recta $y=1$, quedándose por debajo de ésta; si la x va decreciendo infinitamente, la gráfica se aproxima infinitamente a la misma recta, quedándose todo el tiempo por encima de ésta.

18. *Construir la gráfica de la función*

$$y = |\operatorname{sen} x| + |\cos x|.$$

Para la construcción de la gráfica de una función periódica ocurre con frecuencia que es útil el razonamiento siguiente: todos los valores de esta función se repiten cada período. Por lo tanto, si suponemos que la función es periódica con el período T, entonces es suficiente construir

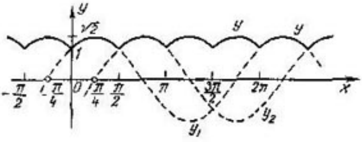


Fig. 43

la gráfica en un segmento de la longitud T, por ejemplo, para $0 \leqslant x \leqslant T$; en los segmentos $T \leqslant x \leqslant 2T$, $2T \leqslant x \leqslant 3T$, $-T \leqslant x \leqslant 0$, etc., la gráfica tiene una forma exactamente igual.

Claro está que el número 2π es el período de la función y a examinar, por esa razón puede limitarse al examen del segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Si dividimos este segmento en cuatro partes, en cada una de las cuales sen x y cos x conservan su signo, obtendremos:

$$y = \begin{cases} \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \\ -\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & \text{si} \quad \pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}, \\ -\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & \text{si} \quad \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Ahora vamos a construir las gráficas $y_1 = \sqrt{2}\operatorname{sen}[x+(\pi/4)]$ e $y_2 = \sqrt{2}\operatorname{sen}[x-(\pi/4)]$; después, en el segmento de 0 a $\pi/2$ tomamos un trozo de la curva y_1, y en el segmento de $\pi/2$ a π, un trozo de la curva y_2, mientras que en los segmentos desde π hasta $3\pi/2$ y de $3\pi/2$ a 2π tomamos las curvas simétricas a los trozos respectivos de las curvas y_1 y y_2, con relación al eje de abscisas. Posteriormente a esto, valiéndonos de la periodicidad, prolongamos la curva obtenida fuera del segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (señalada con línea gruesa en la fig. 43).

De la gráfica construida se deduce que $\pi/2$ es también el período de la función dada, así que hemos sido muy prudentes al examinar el segmento desde 0 hasta 2π. Si de inmediato nos hubiéramos dado cuenta de que $\pi/2$ era el período de esta función, lo que no es difícil demostrar,

$$|\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)|+|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)|=|\cos x|+|\operatorname{sen} x|,$$

la gráfica habría sido construida mucho más rápidamente. Este ejemplo muestra que el análisis minucioso y previo de las propiedades de la función propuesta con frecuencia simplifica la construcción de su gráfica.

19. *Construir la gráfica de la función*

$$y=\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}+\frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}. \qquad (8)$$

A primera vista, esta función puede parecer muy complicada. Sin embargo, al realizar las transformaciones de la fórmula que presenta la función a examinar, llegaremos a otra forma de anotación más simple de la función (8), que permitirá dibujar sin mucho esfuerzo la gráfica deseada.

Notemos ante todo que el recinto de determinación de la función (8) está representado por todo su eje numérico, excepto los puntos

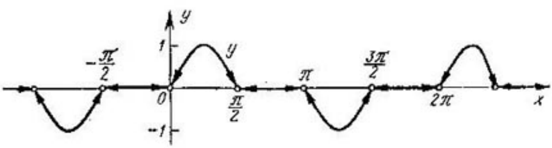


Fig. 44

$x=n\pi/2$, donde n es número entero cualquiera (en cada uno de estos puntos, ya sea $\operatorname{tg} x$ ó $\operatorname{cotg} x$, pierden su sentido).

Ya que para $x\neq n\pi/2$ son válidas las igualdades

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{|\cos x|}, \quad \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}=\frac{1}{|\operatorname{sen} x|}$$

(véase el § 1, Parte II), entonces está claro que la función (8), en su recinto de determinación, puede ser escrita en la forma:

$$y=\operatorname{sen} x\cdot|\cos x|+\cos x\cdot|\operatorname{sen} x|.$$

Esta función es periódica con el período 2π. La gráfica requerida puede ser construida como se ha hecho durante la resolución del problema 18. Ella está representada en la fig. 44. Notemos una vez más que la función (8) no está determinada en los puntos $x=n\pi/2$, $n=0$, ±1, ±2, ... ; esta indeterminación está señalada en el dibujo con flechas en los extremos de los segmentos de la curva, que son adyacentes a estos puntos.

Ahora vamos a considerar algunos ejemplos de construcción de gráficas complejas en los que es imposible limitarse a los métodos elementales examinados más arriba. Cada uno de estos ejemplos tiene sus propias particularidades que deben tomarse en consideración durante la construcción de la gráfica. En el transcurso de la resolución de ejemplos análogos a los que se citan a continuación, uno ha de basarse, como regla, en los razonamientos originales que no tienen nada de parecido con aquéllos; es necesario aprender a hallar los puntos débiles, por decirlo así, de cada problema, y al aferrarse a éstos se logra la construcción.

20. *Construir la gráfica de la función* $y=\frac{x^2+1}{x}$.

Al representar la función propuesta en la forma $y=x+(1/x)$ apliquemos un método llamado *adición de gráficas*. Justamente, la gráfica requerida va a ser construida por medio de "la adición" de dos gráficas auxiliales $y_1=x$ e $y_2=1/x$. En otras palabras, para cada valor

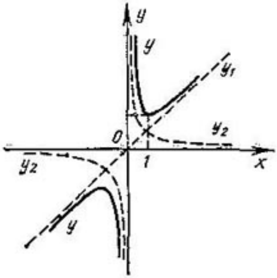


Fig. 45

admisible del argumento (o sea, para cada $x\neq 0$), la ordenada y correspondiente a éste, se construye como la suma (algebraica) de magnitudes de las ordenadas y_1 e y_2 correspondientes al mismo valor del argumento (fig. 45).

Es fácil comprender qué aspecto tendrá la gráfica de la función sobre el semieje positivo de abscisas: para cada valor de $x>0$ hay que aumentar la ordenada respectiva de la recta $y_1=x$ en una magnitud de la ordenada de la hipérbola $y_2=1/x$ que corresponde al mismo valor de x. Es evidente que cuando x es positivo y tiende a cero, la expresión $x+(1/x)$ tiende a $+\infty$ (crece infinitamente), y cuando x tiende a $+\infty$ la gráfica incógnita viene aproximándose infinitamente a la bisectriz $y_1=x$, porque "el complemento" $1/x$ va siendo cada vez más pequeño. En el caso en cuestión es fácil determinar el valor mínimo de la función y (recordemos que hasta ahora examinamos solamente los valores positivos de x): en efecto, para $x>0$ es justa la desigualdad $x+(1/x)\geqslant 2$ (véase § 8, Parte I), o sea el valor mínimo es igual a 2, que se logra cuando $x=1$ [1].

De modo análogo se construye la gráfica en la parte negativa del eje de abscisas. Además, puede aprovecharse del hecho de que la función y es impar y, por consiguiente, su gráfica es simétrica respecto al origen de las coordenadas.

21. *Construir la gráfica de la función* $y=x\,\text{sen}\,x$.

Aprovechemos el hecho de que la fórmula, que predetermina esta función, representa en sí un producto y apliquemos un método llamado *multiplicación de gráficas*. Precisamente, la gráfica necesaria va a ser

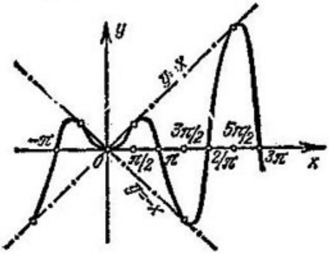


Fig. 46

construida por medio de "la multiplicación" de dos gráficas auxiliares $y_1=x$ e $y_2=\text{sen}\,x$. Es decir, para cada valor del argumento la ordenada y que corresponde a éste, se construye como un producto de magnitudes de las ordenadas y_1 e y_2 que corresponden al mismo valor del argumento (fig. 46).

Al principio vamos a construir la gráfica de la función y para los valores no negativos del argumento. Multiplicando para cada valor de x, la magnitud de la ordenada respectiva de la recta $y_1=x$ por la de la ordenada de la sinusoide $y_2=\text{sen}\,x$, se puede construir una curva suave que reproduce aproximadamente el comportamiento de la gráfica de la función y sobre el semieje no negativo de abscisas. Precisemos en algo el aspecto de esta curva recurriendo a la ayuda de unos puntos característicos. Ante todo, es claro que $y=0$ para todos los valores de x, cuando sen $x=0$; por esta causa, la gráfica de la función y cruza el semieje positivo de abscisas en los puntos $x=k\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Seguidamente, para $x>0$ es válida la desigualdad evidente $-x\leqslant x\,\text{sen}\,x\leqslant x$, que significa que para los valores positivos del argumento la gráfica de la función y se encuentra ni por encima de la recta $y=x$ ni por debajo de la recta $y=-x$. En este caso, los puntos de la gráfica de la fun-

[1] Algo más difícil, aunque completamente accesible a los estudiantes, es la demostración de que $x+(1/x)$ decrece monótonamente cuando $0<x\leqslant 1$ y crece monótonamente cuando $x\geqslant 1$.

ción y, que corresponden a tales valores de $x > 0$ para los cuales $\operatorname{sen} x = 1$, es decir, a los valores de $x = (\pi/2) + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, se hallan en la recta $y = x$, los puntos correspondientes a aquellos valores de $x > 0$ para los cuales $\operatorname{sen} x = -1$, es decir, a los valores de $x = (3\pi/2 + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, se encuentran sobre la recta $y = -x$.

El trazado de la gráfica de la función y en el semieje negativo de abscisas, es muy simple: por cuanto la función y es par, su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas.

22. *Construir la gráfica de la función* $y = 2^{1/x}$.

Aquí nos tropezamos con la necesidad de construir la gráfica de "una función de otra función"; tales *funciones complejas* se encuentran con bastante frecuencia. Para construir sus gráficas se ha de conocer bien las propiedades de las funciones elementales fundamentales y tener una idea clara de las propiedades de combinaciones de las funciones que se deducen de las primeras.

El recinto de determinación de la función a considerar y abarca todos los números reales, excepto $x = 0$. Ya que para $x > 0$ el exponente $1/x > 0$, entonces, según la propiedad de la función exponencial, $y > 1$ para todos los valores positivos del argumento. Notemos que $y = 2$

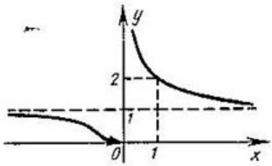


Fig. 47

cuando $x = 1$. Si x va a crecer infinitamente, la expresión $1/x$ viene decreciendo monótonamente hacia cero, siendo positiva (véase las propiedades de la hipérbola), por lo cual $2^{1/x}$ decrece monótonamente hacia 1, siendo sin embargo, mayor que 1 (según la propiedad de la función exponencial). Cuando x es positiva y tiende a cero, el exponente $1/x$ va creciendo infinitamente y, por consiguiente, $2^{1/x}$ también crece infinitamente. Esta circunstancia permite dibujar la gráfica aproximada de la función y para $x > 0$.

Se puede demostrar fácilmente que en el semieje negativo de abscisas es justa la desigualdad $0 < y < 1$. Con ayuda de los razonamientos analógicos se construye también la gráfica de la función y cuando $x < 0$ (fig. 47; la flecha en la curva significa que el origen de las coordenadas no pertenece a la gráfica).

23. *Construir la gráfica de la función*

$$y = 1 - 2^{1 + \operatorname{sen}(x+1)}.$$

Si representamos esta función en la forma

$$y=1+(-2)\cdot 2^{\operatorname{sen}(x+1)}, \tag{9}$$

es evidente entonces que es fácil obtener, teniendo la gráfica de la función $y_1=2^{\operatorname{sen} x}$, la gráfica de la función y que nos interesa, recurriendo a los métodos considerados durante la resolución de los problemas 4, 5, 8.

Por eso, al principio nos pondremos a examinar la gráfica de la función y_1. Esta función es periódica con el período 2π; por consiguiente, es suficiente dibujar su gráfica en el segmento $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ (véase el problema 18).

Para $x=0$ la función y_1 toma el valor de 1. Si x va aumentando desde 0 hasta $\pi/2$, entonces sen x viene creciendo monótonamente desde 0 hasta 1, y $2^{\operatorname{sen} x}$ crece monótonamente desde 1 hasta 2. Si luego x va creciendo de $\pi/2$ a $3\pi/2$, entonces sen x decrece monótonamente desde 1 hasta -1, y $2^{\operatorname{sen} x}$ decrece monótonamente desde 2 hasta 1/2;

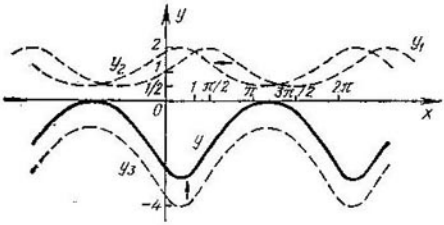


Fig. 48

en particular, para $x=\pi$ la función y_1 toma el valor de 1. Por fin, si x crece desde $3\pi/2$ hasta 2π, entonces sen x crece monótonamente desde -1 hasta 0, y $2^{\operatorname{sen} x}$ crece monótonamente de 1/2 a 1; para $x=2\pi$ el valor de la función y_1 es igual a 1. Todas estas afirmaciones respecto al comportamiento de la función y_1 se deducen de las propiedades del seno y de la función exponencial (al mismo lector se le ofrece fundamentar rigurosamente estas afirmaciones). Estas permiten esclarecer el comportamiento aproximado de la gráfica de la función y_1 para $0\leqslant x\leqslant 2\pi$; conviene prolongar periódicamente la curva obtenida de este segmento a todo el eje de abscisas (en la fig. 48, la gráfica de la función y_1 está representada por las líneas punteadas).

Ahora todo está preparado para construir la gráfica de la función y según la fórmula (9). Ante todo, desplazamos la gráfica de la función y_1, como un cuerpo sólido, en una unidad a la izquierda, a lo largo del eje de abscisas; resulta una curva que es la gráfica de la función $y_2=2^{\operatorname{sen}(x+1)}$ (véase el problema 5). Esta también es una función periódica (con el período 2π); su valor máximo, igual a 2, alcanza en los puntos $x^* = (\pi/2) - 1 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y el valor mínimo, igual a 1/2, en los puntos $x^{**} = -(\pi/2) - 1 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (fig. 48). Al "extender" 2 veces la curva y_2 a lo largo del eje de ordenadas y al realizar su representación especular respecto al eje de abscisas, construiremos la gráfica de la función $y_3 = (-2) \cdot 2^{\operatorname{sen}(x+1)}$ (véase el problema 8). Notemos que el valor máximo de esta función periódica es igual a -1, y su valor mínimo, a -4 (fig. 48). Por fin, la gráfica de la función y se obtendrá si la curva y_3, como un cuerpo sólido, se eleva en una unidad hacia arriba, a lo largo del eje de ordenadas (véase el problema 4).

La gráfica (la línea gruesa en la fig. 48) reproduce los rasgos principales del comportamiento de la función y. Esta es una función periódica (con el período 2π) que se convierte en cero en los puntos $x^{**} = -(\pi/2) - 1 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (el cero es su valor máximo) y toma el valor mínimo que es igual a -3, en los puntos $x^* = (\pi/2) - 1 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ En los intervalos entre los valores extremos la función y varía monótonamente. Para $x = 0$ el valor de la función y es igual a $1 - 2^{1+\operatorname{sen} 1}$ (¡Notemos que sen 1 es el seno del ángulo de un radián!).

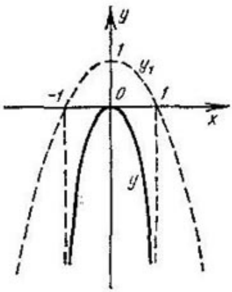


Fig. 49

Claro que la fig. 48 da una representación aproximada, a grandes rasgos, de la gráfica de la función y y los estudiantes no deben dar más detalles a ésta.

24. *Construir la gráfica de la función* $y = \log_2 (1 - x^2)$.

Primeramente construyamos la gráfica de una función auxiliar $y_1 = 1 - x^2$; en la fig. 49 esta parábola está representada por la línea punteada. Luego hay que construir la gráfica del logaritmo de esta función.

Para $x = 0$ tenemos $y = \log_2 1 = 0$. Cuando x va aumentando desde 0 hasta 1, entonces como lo muestra la gráfica de la función auxiliar, $1 - x^2$ decrece desde 1 hasta 0, a causa de que $\log_2(1 - x^2)$ viene decreciendo de 0 a $-\infty$. Análogamente, si x disminuye de 0 a -1, entonces $1 - x^2$ decrece de 1 a 0, y $\log_2 (1 - x^2)$ va decreciendo desde 0 hasta $-\infty$. Para los demás valores de x, es decir, para $x \leqslant -1$ y $x \geqslant 1$, tenemos que $1 - x^2 \leqslant 0$; por eso, $\log_2 (1 - x^2)$ no tiene sentido. La gráfica de la función y esta representada por la línea gruesa en la fig. 49.

Notemos que para la construcción de esta gráfica, al principio no hallamos el campo de definición de la función considerada, y éste resultó automáticamente (por sí mismo). Sin embargo, ocurre a menudo que se hace muy útil hallar previamente el campo de definición.

25. *Construir la gráfica de la función* $y = \log_{\operatorname{sen} x} 1/2$.

El campo de definición de esta función representa un conjunto de todos aquellos valores de x para los cuales sen $x>0$, sen $x\neq 1$ simultáneamente, es decir,

$$2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad \frac{\pi}{2}+2k\pi<x<(2k+1)\pi$$

para $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Es evidente que la función y es periódica con el período 2π. Por eso, durante la construcción de su gráfica es suficiente limitarse al segmento de la longitud 2π, por ejemplo, al segmento $0\leqslant x\leqslant 2\pi$. Pero, no todo el segmento entra en su recinto de determinación: la función tiene sentido (dentro de este segmento) sólo cuando $0<x<\pi/2$, $\pi/2<x<\pi$. Precisamente por eso, en estos intervalos tenemos que construir en primer lugar su gráfica (al ampliarla simplemente a todo el campo de definición según la razón de periodicidad).

Notemos que la función y en su campo de definición puede escribirse en forma de

$$y=\frac{1}{\log_{1/2}\operatorname{sen}x}, \tag{10}$$

en primer lugar, construimos la gráfica de la función auxiliar $y_1 = \log_{1/2}$ sen x; ésta nos interesará sólo cuando $0<x<\pi$. Tomando un segmento de la sinusoide $y_2=$ sen x, el que corresponde al segmento

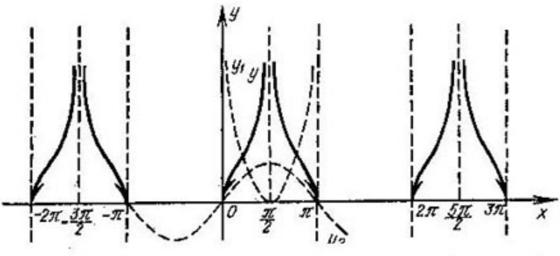


Fig. 50

de variación del argumento de 0 a π, se puede, por el mismo método que ha sido aplicado en el problema anterior (¡no olvidarse que la base del logaritmo es $1/2<1$!), obtener la gráfica de la función compleja y_1 (fig. 50; las gráficas auxiliares y_1 e y_2 están representadas con las líneas punteadas).

Consideremos ahora el intervalo $0<x<\pi/2$. Ya que para cualquier valor de x de este intervalo la magnitud de la función y que le corresponde es *contraria* con respecto a la magnitud de la función y_1 correspondiente al mismo valor del argumento (véase (10)), entonces es fácil imaginarse el aspecto aproximado de la gráfica de la función y para $0<x<\pi/2$ (la línea gruesa en la fig. 50; la flecha en la curva, cerca del origen de las coordenadas, señala que este punto no pertenece a la gráfica).

No es difícil demostrar, utilizando las propiedades conocidas de las funciones elementales que la función y crece monótonamente cuando x varía desde 0 hasta $\pi/2$: si x crece desde 0 hasta $\pi/2$, entonces sen x crece monótonamente de 0 a 1, mientras que $\log_{1/2}$ sen x decrece monótonamente desde $+\infty$ hasta 0 y, por consiguiente (véase (10)), la magnitud de la función y aumenta desde 0 hasta $+\infty$.

Vamos a subrayar que si x viene acercándose a $\pi/2$, quedándose menor que este valor, entonces la magnitud de la función y_1 tiende a cero permaneciendo positiva; por esta razón la magnitud de la función y va creciendo infinitamente; y cuando x se aproxima a cero permaneciendo positiva, la magnitud de la función y_1 va creciendo infinitamente, a causa de que la magnitud de la funcion y tiende a cero (aunque no toma el mismo valor de cero).

De un modo análogo se construye la gráfica de la función considerada cuando $\pi/2<x<\pi$.

Préstese la atención a lo siguiente: tales razonamientos, más o menos parecidos a los que tenían lugar durante la construcción de la gráfica de la función y, según la gráfica ya obtenida de la función auxiliar

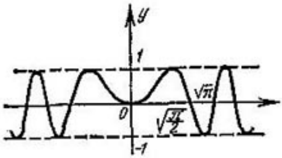


Fig. 51

y_1 (aplicando la fórmula (10)), permiten *construir la gráfica de la función* $y = 1/f(x)$, *si la gráfica de la función* $y_1 = f(x)$ *es conocida.*

Al examinar más detalladamente la fig. 50 se puede notar que no hemos obtenido una descripción completa del comportamiento de la gráfica de la función dada en el curso de la resolución expuesta por arriba (por ejemplo, ni siquiera se discutía el hecho de que esta gráfica resultó encorvada de tal modo como está representada en el dibujo). No obstante, como lo hemos visto, no es difícil dibujar *aproximadamente* el comportamiento de la gráfica.

Además, la forma de la curva, se habría podido precisar en algo de haber calculado complementariamente la tabla de valores de la función para los valores "cómodos" del argumento y haber tomado los puntos obtenidos durante el trazado de la gráfica. Pero, lo importante es aprender a dibujar una curva "aproximada" que ofrezca la forma general y las propiedades características de la gráfica.

26. *Construir la gráfica de la función* $y =$ sen x^2.

Antes que nada subrayemos que la anotación sen x^2 no hay que confundirla con sen$^2 x$: si la primera expresión presenta sen (x^2), la segunda, (sen $x)^2$.

Examinemos primeramente los valores no negativos del argumento y dividamos el semieje $x \geqslant 0$ en segmentos, donde la función y crece o decrece. Si x^2 aumenta desde 0 hasta $\pi/2$ (o sea, x crece desde 0 hasta $\sqrt{\pi/2}$), entonces sen x^2 crece desde 0 hasta 1; si x^2 crece desde $\pi/2$ hasta $3\pi/2$ (es decir, aumenta desde $\sqrt{\pi/2}$ hasta $\sqrt{3\pi/2}$), entonces sen x^2 decrece desde 1 hasta -1; si x^2 crece desde $3\pi/2$ hasta $5\pi/2$ (o sea, x crece de $\sqrt{3\pi/2}$ a $\sqrt{5\pi/2}$), entonces sen x^2 crece desde -1 hasta 1, etc. Por eso la gráfica de la función y tiene un carácter "ondulatorio" con "la amplitud" 1 (fig. 51)[1]. Es fácil obtener abscisas de los puntos de intersección de esta gráfica con el eje x; con este fin es suficiente resolver la ecuación sen $x^2=0$; está claro que las raíces no negativas de esa ecuación son los números $x=\sqrt{k\pi}$, $k=0, 1, 2, \ldots$

Inmediatamente se construye la gráfica sobre el semieje negativo de las abscisas, por cuanto la función y examinada es par.

En resumen, examinemos algunos ejemplos algo distintos de los considerados anteriormente, aunque relacionados también con las construcciones en el plano, con el sistema de coordenadas dado.

27. *Hallar en el plano un conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y verifican el sistema de desigualdades*

$$\begin{cases} 5x+3y \geqslant 0, \\ y-2x<2. \end{cases} \tag{11}$$

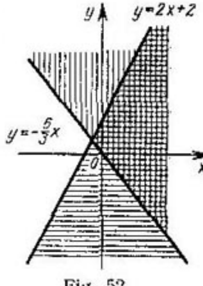


Fig. 52

De la primera desigualdad tenemos que $y \geqslant -5x/3$. Vamos a construir, en primer término, la gráfica de la función $y=-5x/3$ (fig. 52). En este caso, los puntos cuyas coordenadas satisfacen *la igualdad* $y=-5x/3$ se encuentran en la recta construida, y los puntos cuya coordenada y *es mayor que* $-5x/3$ han de hallarse por arriba de esta recta. De tal modo, el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la primera desigualdad (11) será el semiplano ubicado *por arriba* de la recta $y=-5x/3$ (comprendida también esta recta; en la fig. 52 este campo está marcado por sombreado vertical).

Asimismo, de la segunda desigualdad (11) tenemos $y<2x+2$, por lo cual, el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la segunda desigualdad (11) será el semiplano que se halla por debajo de la recta $y=2x+2$ (no comprendida la misma recta; en la fig. 52 este campo está marcado por sombreado horizontal).

Por consiguiente, los puntos del plano, cuyas coordenadas x e y satisfacen el sistema de desigualdades (11), se encuentran en la parte común de los dos semiplanos obtenidos que representa un campo angular (en la fig. 52 el conjunto buscado está señalado por sombreado

[1] Es preciso subrayar que la función $y=$ sen x^2 no es periódica.

doble); en este caso uno de los rayos o un segmento de la recta $y = -5x/3$, que acotan este campo, está comprendido en el conjunto incógnito, y el otro, que es un segmento de la recta $y = 2x + 2$, no está comprendido (el vértice A del campo angular que es un punto de intersección de las rectas $y = -5x/3$ e $y = 2x + 2$, tampoco pertenece al conjunto incógnito).

28. *Determinar el conjunto de puntos de un plano cuyas coordenadas x e y satisfacen la expresión*

$$|x+y| = |y| - x. \qquad (12)$$

Antes que nada trataremos de eliminar el signo del valor absoluto, como se hizo en la resolución de otros problemas con módulos.

Con este fin tracemos (fig. 53) dos rectas en un plano: $x + y = 0$ (es la bisectriz AOB del segundo y cuarto ángulos de coordenadas) e $y = 0$ (es el eje COD de abscisas). Está claro que las coordenadas x e y de cualquier punto ubicado por encima de la recta $x + y = 0$,

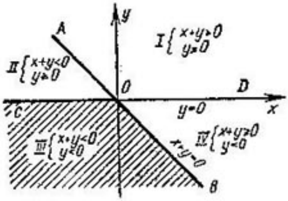


Fig. 53

satisfacen la desigualdad $x + y > 0$, y para cualquier punto ubicado por debajo de esta recta se verifica la desigualdad $x + y < 0$. Análogamente, cualquier punto del semiplano superior (respecto al eje de abscisas) lleva una ordenada positiva y cualquier punto del semiplano inferior tiene la ordenada negativa.

Las rectas señaladas dividen el plano en cuatro campos (fig. 53), de donde es evidente que en cada uno de estos recintos, para cualquier punto (x, y), las expresiones $x + y$ e y conservan su signo. Por eso es razonable hallar, por separado en cada uno de estos campos, los puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen la expresión (12).

Para cualquier punto (x, y) del recinto I (campo angular DOA que comprende también los rayos límites) tenemos las desigualdades $x + y \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Por consiguiente, la expresión (12) del recinto I toma la forma $x + y = y - x$, esto es, que $x = 0$. Pues, a esta última igualdad le satisfacen las coordenadas de puntos del semieje positivo de las ordenadas (esto no quiere decir que sean todos los puntos del eje de ordenadas; en efecto, nos hemos interesado solamente por aquellos puntos que se encuentran en el campo I, y el semieje negativo de ordenadas no pertenece a este recinto).

Para cualquier punto del campo II (el recinto angular AOC que incluye sólo el rayo CO) tienen lugar las desigualdades $x+y<0$, $y\geqslant 0$ dado que la relación (12) en el recinto II toma la forma $-(x+y)=y-x$, o bien, $y=0$. A esta última igualdad la satisfacen los puntos del semieje negativo de las abscisas (los demas puntos del eje de las abscisas no se encuentran en el recinto II).

Para cualquier punto del campo III (el campo angular COB, excepto los rayos límites) son válidas las desigualdades $x+y<0$, $y<0$, dado que la expresión (12) en el recinto III toma la forma $-(x+y)=-y-x$, o bien, $0=0$. Esto denota que las coordenadas de cualquier punto del campo III satisfacen la expresión (12).

Finalmente, para cualquier punto del campo IV (el campo angular que comprende solamente el rayo BO) tenemos $x+y\geqslant 0$, $y<0$, y por eso la expresión (12) en el campo IV toma la forma $x+y=$

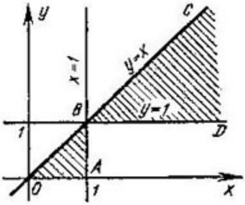


Fig. 54

$=-y-x$, o bien, $x+y=0$. A esta última igualdad le satisfacen, evidentemente, aquellos puntos del campo IV que se hallan sobre la bisectriz del cuarto ángulo de coordenadas.

De tal modo, el conjunto de puntos de un plano cuyas coordenadas x e y satisfacen la expresión (12) son el campo angular entre el semieje negativo de las abscisas y la bisectriz del cuarto ángulo de coordenadas (incluso los rayos límites), y el semieje positivo de las ordenadas (fig. 53).

29. *En un plano está dado un sistema de coordenadas cartesianas. Representar el campo de este plano lleno de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad*

$$\log_x \log_y x>0. \tag{1}$$

Ahora mismo notemos que x e y, que satisfacen las condiciones (13,3) son tales que $x>0$, $y>0$, $x\neq 1$ e $y\neq 1$. Por cuanto las propiedades de los logaritmos son distintas en función de las bases, menores o mayores que 1, entonces es natural analizar dos casos.

a) Sea $x>1$. Basándose en las propiedades de los logaritmos, la desigualdad (13) resulta válida si se cumple la desigualdad $\log_y x>1$. Como se sabe, los logaritmos de los números mayores que 1 son negativos, de su base menor que 1. Por lo tanto, la desigualdad $\log_y x > 1$ no puede satisfacerse para y desde el intervalo $0 < y < 1$.

De tal modo, la desigualdad $\log_y x > 1$ puede ser válida sólo en aquel caso en que $y > 1$. Pero, si $y > 1$, todas las $x > y$ serán la solución de la desigualdad $\log_y x > 1$.

Si $x > 1$, entonces, para que se satisfaga la desigualdad (13), y ha de ser obligatoriamente mayor que 1: $y > 1$, y a la desigualdad inicial le satisfacerán sólo aquellos puntos para cuyas coordenadas sea válida también la condición $x > y$.

Si se representa este conjunto de puntos en un dibujo, se puede ver que es una parte interior del campo angular CBD (fig. 54).

b) Sea ahora $0 < x < 1$. Razonando de modo análogo, hallemos que a la condición del problema le satisfacen aquellos puntos para cuyas

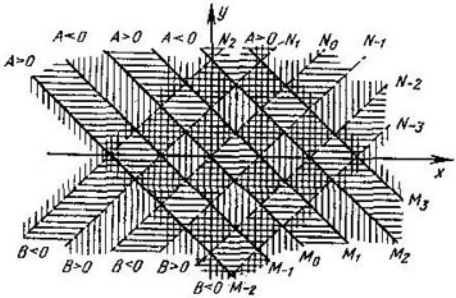


Fig. 55

coordenadas se cumplen las condiciones $0 < y < 1$ e $y < x$. El conjunto de estos puntos constituye el interior del triángulo AOB (fig. 54).

Es por esto que los puntos, cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad (13), forman el campo sombreado en la fig. 54 (las coordenadas de los puntos límites de este campo no satisfacen la expresión (13)).

30. *Hallar todos los puntos de un plano cuyas coordenadas* x e y *satisfacen la desigualdad*

$$\cos x - \cos y > 0.$$

Aplicando una fórmula conocida de Trigonometría, escribamos la desigualdad dada en la forma

$$\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{y-x}{2} > 0.$$

Esta desigualdad es válida para todos aquellos puntos cuyas coordenadas x e y son tales que las expresiones $A = \operatorname{sen}[(x+y)/2]$ y $B = \operatorname{sen}[(y-x)/2]$ llevan signos iguales.

Ante todo, vamos a investigar la expresión A. Al resolver la ecuación sen $[(x+y)/2]=0$, hallamos que $x+y=2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Esto significa, geométricamente, que la expresión A puede ser reducida a cero sólo por las coordenadas x e y de los puntos del plano que se encuentren en cualquiera de las rectas $y=-x+2k\pi$, $k=0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots$ (en la fig. 55 estas rectas están representadas por líneas contínuas). Por abreviar cuestión, la recta $y=-x+2k\pi$, para k entero, la designaremos por M_k (así, la recta M_0 es la bisectriz del segundo y cuarto ángulos de coordenadas, la recta M_{-1} tiene la ecuación $y=-x-2\pi$, etc.).

Todas las rectas M_k son paralelas entre sí y dividen el plano en fajas; convengamos en denominar faja $\{M_k, M_{k+1}\}$ a la faja comprendida entre las rectas adyacentes M_k y M_{k+1}, con todo esto las mismas rectas M_k y M_{k+1} no pertenecen a esta faja. Por ejemplo, $\{M_0, M_1\}$ es la faja que se encuentra entre las rectas $y=-x$ e $y=-x+2\pi$, es decir, un conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen la desigualdad $0<x+y<2\pi$. Análogamente, en el caso general, la faja $\{M_k, M_{k+1}\}$ es un conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen la desigualdad $2k\pi<x+y<2(k+1)\pi$.

Ahora esclareceremos qué representa aquel conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen la desigualdad sen $[(x+y)/2]>0$. Es fácil resolver esta desigualdad; es válida para

$$2\cdot 2n\pi<x+y<2(2n+1)\pi, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Esto denuncia, geométricamente, que la expresión A es positiva para las coordenadas x e y de todos los puntos ubicados en cada una de las fajas $\{M_{2n}, M_{2n+1}\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, o sea, en cada faja acotada por debajo con la recta M_{2n} de signo par, y por encima, con la recta M_{2n+1}.

Resolviendo la desigualdad sen $[(x+y)/2]<0$, nos convenceremos de que la expresión A es negativa para las coordenadas x e y de todos los puntos ubicados en cada una de las fajas $\{M_{2n-1}, M_{2n}\}$, $n=0$, ± 1, ± 2, ... En cada una de las fajas $\{M_k, M_{k+1}\}$ de la fig. 55 va señalado el signo correspondiente de la expresión A: las fajas, donde $A>0$ quedan sombreadas horizontalmente y, donde $A<0$, verticalmente.

Pasemos ahora a la expresión B. Razonamientos análogos muestran que la expresión B la convierten en cero las coordenadas x e y de los puntos ubicados sobre las rectas $y=x+2m\pi$, $m=0$, ± 1, ± 2, ... (en la fig. 55) estas rectas están señaladas con líneas punteadas). Designemos por N_m la recta $y=x+2m\pi$ siendo m entero, y convengamos en llamar $\{N_m, N_{m+1}\}$ a la faja comprendida entre las rectas adyacentes N_m y N_{m+1} (con todo esto, estas rectas no pertenecen a esta faja). Es fácil comprobar que la faja $\{N_m, N_{m+1}\}$ es un conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen la desigualdad $2m\pi<y-x<2(m+1)\pi$.

Resolviendo las desigualdades $B>0$ y $B<0$ nos convencemos de que la expresión B es positiva para las coordenadas x e y de los puntos ubicados en cada una de las fajas $\{N_{2p}, N_{2p+1}\}$, $p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, o sea, en cada faja acotada por debajo con la recta N_{2p} de signo par, y por encima, con la recta N_{2p+1}. A continuación, la expresión B es negativa para las coordenadas x e y de todos los puntos situados en cada una de las fajas $\{N_{2p-1}, N_{2p}\}$, $p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ En cada una de las fajas $\{N_m, N_{m+1}\}$ de la fig. 55 va señalado el signo respectivo de la expresión B: las fajas, donde $B>0$, están sombreadas verticalmente y, donde $B<0$, horizontalmente.

Ahora es fácil describir el conjunto de puntos de un plano cuyas coordenadas x e y satisfacen la desigualdad $A \cdot B>0$: son todos los rectángulos (exceptos sus contornos) que tienen doble sombreado en la fig. 55.

EJERCICIOS:

Hallar el recinto de determinación de las funciones:

1. $y=5\sqrt{1-4x^2}$.

2. $y=\log_{x-1}(2-x-x^2)$.

3. $y=\arccos 2^{|x|}$.

4. $y=\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} x)$.

5. $y=\sqrt[4]{x^{-3}(x-2)(x-3)}$.

6. $y=\sqrt{\lg\cos(2\pi x)}$.

Construir las gráficas de las funciones:

7. $y=-5$.

8. $y=\pi(x+1)$.

9. $y=x(1-x)$.

10. $y=x^2+5|x-1|+1$.

11. $y=|-3x+2|-|2x-3|$.

12. $y=|x^2-3x+2|+|5-x|$.

13. $y=(x+1)(|x|-2)$.

14. $y=|x+1|\cdot(|x|-2)$.

15. $y=\dfrac{2x+1}{2-x}$.

16. $y=\dfrac{2x-6}{3-x}$.

17. $y=1-1/|x|$.

18. $y=(1/3)^{-2x+1}$.

19. $y=2\cdot 3^{x+1}-1$.

20. $y=10^{-|x|}$.

21. $y=-\lg(2x+1)$.

22. $y=\log_{|x|}2$.

23. $y=|\log_{1/\pi}x^2|$.

24. $y=\sqrt{\lg\operatorname{sen} x}$.

25. $y=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$.

26. $y=\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x$.

27. $y=\sqrt{3}\operatorname{sen} 2x+\cos 2x$.

28. $y=2\operatorname{sen}|2x|$.

29. $y=2\operatorname{tg}[-2x+(\pi/4)]$.

30. $y=-\cos^2[x-(\pi/6)]$.

31. $y=1+\sqrt{x}$.

32. $y=x+\operatorname{sen} x$.

33. $y=\log_{1/2}\dfrac{1}{1-x^2}$.

34. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

35. $y=\log_{1/\pi}\operatorname{tg} x$.

36. $y=\operatorname{sen}(\arccos x)$.

37. $y=\cos 2x-\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}\,(\operatorname{sen} x+\cos x)$.

38. $y=\dfrac{|x-2|+1}{|x+3|}$.

39. $y=3+2^{3\cos\frac{x}{3}}$.

¿Cómo se diferencian las gráficas de las funciones:

40. $y_1=\log_3 x^2$ e $y_2=2\log_3 x$?

41. $y_1=2^{\log_2 x}$ e $y_2=x$?

42. $y_1=\operatorname{tg} x\operatorname{cotg} x$ e $y_2=1$?

En un plano con el sistema de coordenadas dado dibujar un conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen las expresiones:

43. $|y-1|=x^2-4x+3$
44. $|x|+x=|y|+y$.
45. $|x-2|+|y+1|\leqslant 1$.
46. $|x-y|>2$.
47. $|2x+y|+|2x-y|<4$.
48. $|y|=\operatorname{sen} x$.
49. $\cos 2x+\cos y=0$.
50. $x\geqslant \operatorname{sen}|y|$.
51. $\log_{|\operatorname{sen} x|} y>0$.
52. $x>\log_2|y|$, $y<x$.

53. La altura de un paralelepípedo rectangular es igual a 1/2, y los lados de la base son iguales a x e y. Hallar la dependencia entre y y x y representarla en una gráfica si se sabe que la superficie lateral del paralelepípedo es igual al área de la base.

54. En una pirámide cuadrangular de altura y y base x, el área de la base es mayor en 1 que el área del corte hecho por el vértice de la pirámide y la diagonal de la base. Hallar la dependencia entre y y x y representarla en una gráfica.

55. En la base del primer cilindro recto se encuentra un círculo de radio y, en la base del segundo, un círculo de radio x; con esto, el radio del primer círculo es mayor. La altura del primer cilindro es igual a 1/8, la altura del segundo, 1/2. Hallar la dependencia entre y y x y representarla en una gráfica, si la diferencia entre el área de la superficie lateral y el área de la base del primer cilindro es igual al área de la superficie lateral del segundo cilindro.

PARTE II

TRIGONOMETRÍA

§ 1. OBSERVACIONES GENERALES SOBRE LA TRIGONOMETRÍA

En esta parte sólo nos detendremos brevemente en determinados problemas del curso de Trigonometría, que consideramos importantes.

En este párrafo haremos unas observaciones de carácter general sobre una serie de materias de Trigonometría que a veces se escapan del campo visual de los estudiantes y también examinaremos ejemplos de resolución de problemas.

Definiciones de las funciones trigonométricas. Los estudiantes conocen bien las definiciones de las funciones trigonométricas de un ángulo. Sin embargo, al igual que todas las funciones elementales que se estudian en Álgebra, las funciones trigonométricas se examinan, en resumidas cuentas, como funciones del argumento *numérico*. Entre tanto, a veces se manifiesta cierta incompresión acerca de qué significa, por ejemplo, *el seno de un número dado*.

A la pregunta *qué significa* sen π le sigue, por lo general de inmediato, la respuesta: sen $\pi=0$. Pero, se trata no de *la magnitud* de sen π sino *del significado de este símbolo*, se trata de cómo debe comprenderse esta anotación: sen π. Precisamente, el seno del número π, es decir, sen π es el seno de un ángulo de una magnitud de π radianes, o sea, de un ángulo de $180°$.

A la definición de las funciones trigonométricas de un argumento numérico, llegamos también poco a poco. Al principio, estas funciones se definen como las de un ángulo arbitrario (positivo o negativo). Luego, la introducción de la medición de ángulos por radianes nos permite poner en correspondencia con un determinado ángulo de valor a en radianes a cada número real a y, a la inversa, un número real determinado unívocamente, o sea, su magnitud en radianes a cada ángulo [1].

[1] Por lo común, a los estudiantes se les ocurre preguntar: ¿Por qué es necesario aplicar la medición *en radianes* de los ángulos para la definición de las funciones trigonométricas de un argumento numérico? ¿Por qué, por ejemplo, es imposible definir el seno del número a como el seno del ángulo de una magnitud de a grados? En efecto, tal definición es posible, en principio, pero a causa de muchos motivos ésta es incómoda y no razonable. Lamentablemente, es imposible explicar aquí los motivos por los cuales tal definición resulta no razonable, teniendo en cuenta el curso escolar de las Matemáticas.

En fin, podemos definir así las funciones trigonométricas de un argumento numerico: *la funcion trigonométrica de un número a es la misma función trigonométrica de un ángulo de una magnitud a en radianes.* De tal modo, por un número dado hallamos un ángulo correspondiente a éste y para cada ángulo las funciones trigonométricas ya han sido definidas.

Por consiguiente, sen 10, por ejemplo, es el seno del ángulo de 10 radianes. En otras palabras, tenemos que tomar el sistema de las coordenadas Oxy, un solo círculo con el centro en el origen de las coordenadas y hallar en la circunferencia tal punto M que el vector $\overrightarrow{OM}$ componga, en el sentido positivo del eje Ox un ángulo de 10 radianes ($\approx 570°$ (градусов)), medido de derecha a la izquierda[1]. En este caso la ordenada del punto M (¡que es un número!) será el seno del ángulo de 10 radianes, es decir, será igual a sen 10.

De esa manera vemos que ningún ángulo participa en la definición categórica de las funciones trigonométricas sino que se establece una relación entre los números. La utilización de los ángulos es una *etapa auxiliar*, intermedia, cuya introducción se impone sólo por razonamientos metodológicos.

Los estudiantes utilizan a menudo el símbolo ∞, el cual no se aplica, en general, en las matemáticas elementales. En particular, es muy popular aunque absurda la fórmula $\operatorname{tg} 90° = \infty$ o su expresión verbal: "La tangente del ángulo recto es igual a infinito". A veces se puede oir hasta sus "argumentos": $\operatorname{tg} 90° = \operatorname{sen} 90°/\cos 90° = 1/0 = \infty$. Hay que comprender que todos estos argumentos no tienen sentido.

Fórmulas trigonométricas. Está claro que las fórmulas deben recordarse. Pero, es necesario también deducirlas con rapidez, porque la habilidad de deducir la fórmula requerida es un mérito mucho mayor que el simple conocimiento de las fórmulas sin saber deducirlas.

El análisis de la demostración de las fórmulas trigonométricas, previsto por el curso escolar de Trigonometría, muestra que puede obtenerse rápidamente cualesquiera de éstas si se saben de memoria las definiciones y propiedades fundamentales de las funciones sen x, cos x, tg x, cotg x[2], la expresión $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y las fórmulas de adición. Por esto es fácil deducir las fórmulas de reducción, las de conversión de un producto de las funciones trigonométricas en la suma y a la inversa, etc.

---

[1] Aquí es conveniente mencionar una convicción difundida de que, al medir, un ángulo en grados obtenemos un número concreto y al medirlo en radianes, un número abstracto. En realidad, cualquiera que sea la medición resulta siempre un número concreto: sean 5 km, 28° ó 10 radianes. Después de la medición de un ángulo en radianes no siempre mencionamos la unidad — "el ángulo es igual simplemente a 3π y no a 3π radianes" —, es un convencionalismo, un convenio universal.

[2] A veces se encuentran designaciones $1/\operatorname{sen} x = \operatorname{cosec} x$ (cosecante), $1/\cos x = \sec x$ (secante).

En efecto, supongamos que necesitamos *una fórmula del seno de un semiángulo* [1]. Según la fórmula de adición y la expresión $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ podemos escribir de inmediato que

$$\cos\alpha = \cos\cdot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} =$$
$$= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \left(1-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2},$$

de donde

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \text{o sea,} \quad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Por otra parte, no hay que sobreestimar la posibilidad de deducir cualesquier fórmulas porque esto exige mucho tiempo, debido a que el número de fórmulas que se hallen en la memoria activa ha de ser bastante grande.

Los métodos de deducción de muchas fórmulas son diferentes. El estudiante puede escoger el método que más le guste, siempre y cuando sea *correcto.* En particular, es obvio considerar las demostraciones de las fórmulas expuestas en algunos libros de texto como una de las variantes posibles de su deducción; es muy bueno cuando el mismo estudiante puede proponer otras argumentaciones correctas de tal o cual fórmula. En este caso es deseable que siempre se elijan los métodos de razonamientos más sencillos.

Pero, es imprescindible observar que durante la deducción de una fórmula no nos basemos en otra que se obtiene a su vez con la utilización de la que se demuestra. Por ejemplo, algunos estudiantes, la paridad de la función $\cos x$ la demuestran así:

$$\cos(-x) = \cos(0-x) = \cos 0\cos x + \operatorname{sen} 0\operatorname{sen} x = \cos x. \qquad (2)$$

En esta cadena de igualdades se aplica la fórmula de adición $\cos(\alpha-\beta)$ en el caso cuando $\alpha<\beta$. Mientras tanto, en algunos libros de texto la deducción de esta fórmula de adición *aplica* la paridad de la función $\cos x$. Por esto, la demostración (2) de la paridad de la función $\cos x$, recién expuesta, puede ser reconocida correcta tan sólo cuando el estudiante sabe fundamentar la fórmula de adición $\cos(\alpha-\beta)$, $\alpha<\beta$, sin aplicar esta propiedad del coseno.

Llamemos la atención a una confusión bastante difundida en lo que se refiere a la comprensión del signo $\pm$ en las fórmulas del tipo (1). Unos entienden este signo en el sentido de que "el seno del semiángulo puede asumir dos valores", otros consideran que debe elegirse sólo uno de estos valores (es decir, correspondiente al signo más o al menos),

[1] Sería mejor decir "la fórmula del seno de un semiargumento", "la fórmula del coseno del argumento doble", etc., pero no vamos a rechazar la terminología adoptada. Subrayemos que, en lo ulterior, el término "ángulo" puede sustituirse siempre, por el término „número", o a la inversa.

pero no pueden explicar con exactitud cuándo y cuál de estos valores conviene tomar.

En realidad, para cualquier valor *fijo* de α debemos elegir en la fórmula (1) el valor correspondiente al signo más o el valor correspondiente al signo menos (¡y nunca ambos valores a la vez!) [1]. Y cuál de estos valores hay que tomar, depende precisamente *del cuadrante en que se encuentra el ángulo* $\alpha/2$: si éste se halla en el primero o segundo cuadrante, conviene tomar el valor con el signo más, y si se ecuentra en el tercero o cuarto, con el signo menos [2].

De tal modo, el signo $\pm$ en la fórmula (1) no significa el seno del semiángulo de dos signos opuestos; nos hemos visto obligados a poner este signo ya que sen $(\alpha/2)$ puede asumir (para distintos α) tanto valores positivos como negativos mientras que la expresión $\sqrt{1/2(1-\cos\alpha)}$ no es negativa para todos los valores de α.

De hecho, la fórmula (1) significa que el conocimiento del valor $\cos\alpha$ no determina *univocamente* el valor de sen $(\alpha/2)$ sino que sólo determina *el valor absoluto* de sen $(\alpha/2)$; y para determinar el valor de sen $(\alpha/2)$ es necesario tener, además de $\cos\alpha$, una información complementaria de la disposición del ángulo $\alpha/2$; ¿en qué cuadrante éste se encuentra?

Precisamente, por esto es preferible evitar la anotación del tipo (1), utilizando la más exacta:

$$\left|\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Nos tropezamos también con una situación análoga en otros problemas donde se exige calcular el valor de una expresión trigonométrica al saber la magnitud de otra expresión. Hay que recordar que por el valor de una función trigonométrica de algún ángulo sólo se determinan univocamente, diciendo en general, los valores absolutos de otras funciones de este ángulo. Y para determinar los propios valores de estas funciones es preciso saber, por ejemplo, en qué cuadrante se encuentra el ángulo considerado.

1. *Es sabido que* $\operatorname{sen}\beta=4/5$ y $0<\beta<\pi$. *¿A qué valor es igual la relación*

$$\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\dfrac{2}{\cos(\pi/6)}\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\alpha},$$

si: a) *el ángulo* β *es agudo*; b) *el ángulo* β *es obtuso*?

---

[1] Sólo cuando $\cos\alpha\neq 1$ porque en el caso de $\cos\alpha=1$ ambos valores son iguales a cero.

[2] No es difícil comprender que el signo "más" en la fórmula (1) se toma en el caso en que $4n\pi\leqslant\alpha\leqslant 4n\pi+2\pi$, y el signo "menos", cuando $4n\pi+2\pi\leqslant\alpha\leqslant 4n\pi+4\pi$ (donde n es un número entero cualquiera). Para $\alpha=2n\pi$, no tiene importancia cuál de los signos se debe elegir ya que con este valor del ángulo sen $(\alpha/2)=0$.

La relación señalada en la condición — la designaremos, para abreviar, por M — puede reducirse a la forma

$$M=\frac{\operatorname{sen}\alpha\,(3\cos\beta+4\operatorname{sen}\beta)+\cos\alpha\,(3\operatorname{sen}\beta-4\cos\beta)}{\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha}.$$

Para calcular el valor de esta expresión es necesario saber, además de la magnitud $\operatorname{sen}\beta$, el valor de $\cos\beta$. Ya que $\operatorname{sen}\beta=4/5$, hallamos inmediatamente la magnitud absoluta del coseno de este ángulo: $|\cos\beta|=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta}=3/5$. El signo del coseno ha de determinarse en función del cuadrante considerado.

En el caso en que el ángulo β es *agudo*, tenemos $\cos\beta=3/5$, debido a que es fácil calcular que $M=5/\sqrt{3}$. Y si el ángulo β es *obtuso*, entonces $\cos\beta=-3/5$ y, por consiguiente, $M=\sqrt{3}\cdot(7+$ $+24\operatorname{cotg}\alpha)/15$.

Por desgracia, no son todos los estudiantes que saben hallar aquellos valores del argumento para los cuales una u otra fórmula es correcta. A veces dicen: "Todas las fórmulas trigonométricas deducidas en los libros de texto representan en sí las identidades, o sea, son válidas para todos los valores de los argumentos". Sin embargo, esto no es así. Las fórmulas trigonométricas son válidas sólo para los valores *admisibles* de los argumentos.

En particular, la fórmula $\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ es válida realmente para un valor arbitrario de α, mientras que la fórmula $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\alpha=1$ tiene sentido sólo para los valores de α distintos de $k\pi/2$, donde k es un número entero arbitrario (porque para $\alpha=$ $=k\pi/2$, una de las funciones de esta fórmula no está determinada).

Así pues, al escribir alguna fórmula trigonométrica hay que tener presente para cuáles valores de las letras que integran la fórmula ésta es válida.

Para hallar estos valores hay que determinar los valores de los argumentos para los cuales tiene sentido *cada* función que entra en la fórmula trigonométrica. Si una de las funciones, aunque sea una sola, que forman parte de la fórmula trigonométrica, pierde sentido para cualquier valor del argumento, este valor tiene que ser despejado.

Consideremos, por ejemplo, la fórmula

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \tag{3}$$

Su primer miembro es determinado cuando $\alpha\neq(\pi/2)+k\pi$ y $\beta\neq$ $\neq(\pi/2)+n\pi$, donde k y n son números enteros arbitrarios, ya que para cada uno de estos valores $\operatorname{tg}\alpha$ ó $\operatorname{tg}\beta$ pierde sentido. El segundo miembro de (3) tiene sentido para aquellos valores de α y β para los cuales $\cos\alpha\cos\beta\neq0$; es fácil comprobar que llegamos a las mismas restricciones para α y β. Vemos de tal modo que los miembros primero y segundo de la fórmula (3) existen en las mismas condiciones:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad k, \ n \ \text{son números enteros;}$$

estas dos desigualdades nos proporcionan condiciones en las cuales es justa la fórmula de la diferencia de tangentes.

Un análisis algo más complejo se refiere a la fórmula siguiente:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \tag{4}$$

Su primer miembro se determina si $\alpha - \beta \neq \pi/2 + k\pi$: solamente para estos valores de α y β la expresión $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ pierde su sentido. Y ahora, en lo que se refiere al segundo miembro de la fórmula (4): para que éste tenga sentido es necesario determinar $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$, o sea, que $\alpha \neq \pi/2 + n\pi$, $\beta \neq \pi/2 + m\pi$, donde n y m son números enteros. No obstante, esto no es todo: el denominador $1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ debe ser distinto de cero. Ya que $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$ son determinados (ya lo hemos supuesto), la condición $1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \neq 0$ puede anotarse en forma de $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$. Por consiguiente, el denominador del segundo miembro de la fórmula (4) es distinto de cero si $\alpha - \beta \neq \pi/2 + k\pi$, donde k es un número entero [1]. De tal manera, la fórmula de la diferencia de tangentes es válida con la condición de que

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \ \beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \ \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \tag{5}$$

donde n, m, k son números enteros [2].

La comparación del análisis realizado de las condiciones en las cuales las fórmulas (3) y (4) tienen sentido denuncia una diferencia esencial entre estas fórmulas. Mientras que los primero y segundo miembros de la fórmula de la diferencia de tangentes existen o no existen *con los mismos valores* de los argumentos, los campos de existencia del primero y del segundo miembros de la fórmula de tangente de la diferencia son *distintos*. Por ejemplo,

---

[1] Subrayemos que para que cierto par de valores de α, β sea eliminado del recinto de valores admisibles de la fórmula (4) se requiere solamente que *sea* $\alpha = \pi/2 + n\pi$ para cierto n entero (y β cualquiera), *sea* $\beta = \pi/2 + m\pi$ para cierto m entero (y α cualquiera), *sea* $\alpha - \beta = \pi/2 + k\pi$ para cierto k entero. Por consiguiente, el cumplimiento *aunque sea de una sola* de estas igualdades denuncia que la fórmula (4) es incorrecta para algunos valores de los argumentos.

[2] Las condiciones (5), a veces, se anotan así:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$
$$k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

Aquí se sobreentiende que en *cada* una de estas desigualdades el número k recorre, *independientemente* de las otras dos desigualdades, todos los valores enteros.

el primer miembro de la fórmula (4) tiene sentido para $\alpha=\pi/2$, $\beta=\pi/4$, mientras que su segundo miembro para estos valores de α y β es indeterminado.

Se pueden citar también otros ejemplos de fórmulas trigonométricas *cuyos miembros primero y segundo tienen diferentes recintos de valores admisibles*. Tales son, por ejemplo, las fórmulas que expresan el seno y el coseno por medio de la tangente del semiángulo, la fórmula de la tangente de la suma, la fórmula de la tangente del ángulo doble (el lector puede analizar atentamente todas estas fórmulas).

Este hecho tiene gran importancia para la resolución correcta de las ecuaciones (véase este problema expuesto más detalladamente en el § 9, Parte I).

EJERCICIOS:

1. ¿Qué significa: a) un ángulo negativo; b) la medida de un ángulo en radianes; c) la tangente de un ángulo dado; d) cos 1; e) arc sen a?

2. ¿Es una definición o un teorema cada una de las afirmaciones siguientes: a) $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ para cualquier α; b) el seno de un ángulo φ es igual a la ordenada de un vector de la longitud unidad, el cual proviene del origen de las coordenadas y que forma con el eje de abscisas un ángulo φ; c) la gráfica de la función $y=\operatorname{sen}x$ pasa por el origen de las coordenadas; d) $\operatorname{ctg}90^\circ=0$?

3. Examinemos el teorema: "Si el ángulo φ termina en el segundo cuadrante, $\cos\varphi\leqslant 0$". Enunciar los teoremas: recíproco, contrario y contrario al recíproco. ¿Cuáles de estos teoremas son correctos?

4. Demostrar que si los números reales x e y satisfacen la condición $x^2+y^2=1$, se encontrará un ángulo φ, donde $x=\operatorname{sen}\varphi$ e $y=\cos\varphi$.

5. ¿Qué es mayor: a) sen 1° ó sen 1; b) tg 1 ó tg 2?

6. ¿Cómo están entrelazados los ángulos α y β si se sabe que a) $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$; b) $\cos\alpha=\cos\beta$; c) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$; d) $\operatorname{sen}\alpha=\cos\beta$?

7. Expresar $\cos(\alpha/2)$ y $\operatorname{sen}(\alpha/2)$ por $\operatorname{sen}\alpha$, si $270^\circ\leqslant\alpha\leqslant 450^\circ$.

8. Tenemos que: $\operatorname{sen}x=1/4(\sqrt{5}-1)$. Calcular sen $5x$.

9. Calcular, sin recurrir a las tablas:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

10. Comprobar si es válida la igualdad

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§ 2. TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

A veces se proponen diferentes problemas en cuanto a la transformación de las expresiones trigonométricas o a la demostración de las proporciones trigonométricas. Todos los problemas similares pueden ser resueltos aplicando determinadas fórmulas. Aunque las expresiones propuestas para la simplificación parecen a veces "terribles" a primera vista, su transformación por combinación de las fórmulas convenientes no presenta corrientemente dificultades de principio.

Sin embargo, a fin de realizar esto hay que saber bien estas fórmulas, saber "leerlas" no sólo "de izquierda a derecha" sino también "de derecha a izquierda", ver estas fórmulas en las más diversas anotaciones. Por ejemplo, en la anotación sen x sen $30°$ — —cos $30°$ cos x se debe "reconocer" — cos $(x+30°)$ y no sen $(x-30°)$, como escriben, de vez en cuando, los estudiantes, etc.

Tal conocimiento puede adquirirse si se obtienen hábitos firmes de trabajo con las fórmulas trigonométricas fundamentales, al ejercitarse en la resolución de un número bastante grande de ejemplos.

Naturalmente, al realizar transformaciones trigonométricas es imprescindible *observar* rigurosamente *todas las reglas de las operaciones algebraicas* y calcular atenta y precisamente los mismos cálculos, porque es suficiente escribir en un lugar, por ejemplo, menos en vez de más o calcular erróneamente el coeficiente para que el resultado definitivo sea incorrecto. En el transcurso de las transformaciones, a veces se han de aprovechar diferentes identidades algebraicas que sean aplicables con habilidad a las expresiones trigonométricas.

En particular, una gran cantidad de errores en las transformaciones provienen de la comprensión incorrecta del símbolo $\sqrt{\ }$. En Trigonometría, así como en Álgebra, este signo significa siempre raíz cuadrada aritmética (véase § 4, Parte I). Por lo tanto, por ejemplo,

$$\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}=\sqrt{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}=|\operatorname{sen} x-\cos x|,$$

y de ningún modo sen x — cos x; en lugar de la expresión $\sqrt{1/2\,(1-\cos 2\alpha)}$ hay que escribir $|\operatorname{sen}\alpha|$ y no sen α, etc.

2. *Simplificar la expresión*

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{b-a}{a}}\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{b-a}{a}}\operatorname{sen} x\right)^2}}\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x},$$

donde $b>a>0$.

Al realizar transformaciones poco complicadas, la expresión dada, designándola por P, para abreviar, puede escribirse en forma que sigue:

$$P=\frac{\operatorname{sen} x\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{a+(b-a)\operatorname{sen}^2 x}}=\frac{\operatorname{sen} x\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{a\cos^2 x+b\operatorname{sen}^2 x}}.$$

No pocos estudiantes realizan incorrectamente la transformación ulterior, considerando que

$$\sqrt{a+b\,\mathrm{tg}^2 x}=\sqrt{a+b\frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\sqrt{a\cos^2 x+b\,\mathrm{sen}^2 x}}{\cos x},$$

y obteniendo la solución $P=\mathrm{tg}\,x$. El error radica en lo siguiente: durante esta transformación tenemos que simplificar de hecho la expresión $\sqrt{\cos^2 x}$, que es igual, en realidad, a $|\cos x|$. Por eso, el resultado definitivo es tal: $P=\mathrm{sen}\,x/|\cos x|$.

En el problema que se examinará a continuación la dificultad principal consiste en el aspecto algebraico, o sea, en la necesidad de señalar con exactitud para cuáles valores de los parámetros es válida tal o cual transformación y cómo se debe proceder cuando los valores de los mismos son otros.

3. *Hallar la dependencia entre m y n despejando* θ y φ *de las expresiones*

$$m^2\mathrm{tg}^2\,\theta+n^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi=1,\quad m^2\cos^2\theta+n^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi=1,$$
$$m\,\mathrm{sen}\,\theta=n\cos\varphi.$$

En este problema es necesario, considerando que las tres expresiones son cumplidas, despejárselas θ y φ. Esto puede hacerse de diferentes maneras; expondremos aquí uno de los procedimientos posibles.

Para aprovechar la tercera expresión, escribiremos la segunda de modo que en ésta entren los productos $m\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $n\cos\varphi$:

$$m^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta+n^2\cos^2\varphi=m^2+n^2-1.$$

Entonces, si tenemos en cuenta la tercera igualdad dada en la condición obtenemos

$$2n^2\cos^2\varphi=m^2+n^2-1.$$

Suponiendo que $n\neq0$ (la posibilidad de $n=0$ va a examinarse especialmente) tenemos

$$\cos^2\varphi=\frac{m^2+n^2-1}{2n^2}.$$

Luego, de la tercera expresión, *suponiendo* que $m\neq0$, tenemos

$$\cos^2\theta=1-\mathrm{sen}^2\,\theta=1-\frac{n^2}{m^2}\cos^2\varphi=\frac{m^2-n^2+1}{2m^2}.$$

De tal manera, ya podemos sacar las primeras conclusiones de las relaciones entre m y n: si $m\neq0$ y $n\neq0$, entonces

$$0<\frac{m^2+n^2-1}{2n^2}\leqslant1,\quad 0<\frac{m^2-n^2+1}{2m^2}\leqslant1.$$

Ahora escribamos la primera de las expresiones dadas en la forma

$$m^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)+n^2\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)=1$$

y pongamos aquí las expresiones halladas para $\cos^2\theta$ y $\cos^2\varphi$; obtenemos la relación entre m y n:

$$\frac{2m^4}{m^2-n^2+1}+\frac{2n^4}{m^2+n^2-1}=m^2+n^2+1.$$

Veamos ahora qué ocurre cuando $n=0$. En este caso las expresiones en cuestión asumen la forma de

$$m^2\operatorname{tg}^2\theta=1,\quad m^2\cos^2\theta=1,\quad m\operatorname{sen}\theta=0.$$

La primera de estas igualdades demuestra que $m\neq 0$; y la tercera da $\operatorname{sen}\theta=0$, lo que contradice a la primera igualdad. Por consiguiente, de las relaciones dadas se deduce que $n\neq 0$. Análogamente se demuestra también que $m\neq 0$.

De esa manera, de las tres igualdades iniciales, una vez despejados θ y φ, se han obtenido las siguientes afirmaciones sobre m y n:

$$m\neq 0,\quad n\neq 0,\quad 0<\frac{m^2+n^2-1}{2n^2}\leqslant 1,\quad 0<\frac{m^2-n^2+1}{2m^2}\leqslant 1,$$
$$\frac{2m^4}{m^2-n^2+1}+\frac{2n^4}{m^2+n^2-1}=m^2+n^2+1,$$

que dan la solución del problema planteado.

Detengámonos en la transformación de la expresión $a\operatorname{sen}x+b\cos x$, e *introduzcamos un ángulo auxiliar*. Como se sabe, al definir el ángulo φ de las condiciones[1] (se supone que a y b simultáneamente no son iguales a cero)

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\tag{6}$$

podemos reducir la expresión $a\operatorname{sen}x+b\cos x$ a la forma $\sqrt{a^2+b^2}\times\operatorname{sen}(x+\varphi)$. Es fácil comprender que los *signos* de los números a y b determinan precisamente aquel cuadrante en que se encuentra el ángulo φ.

Este procedimiento general de introducir el ángulo auxiliar conduce siempre a la solución. Sin embargo, en la práctica, al resolver los problemas concretos (por ejemplo, las ecuaciones trigonométricas), ocurre que es más ventajoso introducir el ángulo auxiliar aplicando un método algo diferente.

Con frecuencia es cómodo determinar el ángulo auxiliar de modo que éste se encuentre *en los límites de* 0 *a* $\pi/2$. Si en lugar de las fórmulas (6) para determinar el ángulo auxiliar α se aplican las igualdades

$$\operatorname{sen}\alpha\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}},\tag{7}$$

[1] En algunos libros de texto se señala que estas condiciones determinan *el único ángulo* dentro de los límites $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Naturalmente, en calidad de ángulo auxiliar podemos elegir también cualquier ángulo $\varphi+2k\pi$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$

será claro que el ángulo α puede elegirse en el primer cuadrante. Además, para determinar α es suficiente utilizar *sólo una* de las fórmulas (7), porque el ángulo del primer cuadrante se determina unívocamente por el valor del seno (o del coseno) [1].

En este caso la expresión $a \operatorname{sen} x + b \cos x$ no se reduce obligatoriamente a la forma $\sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(x+\alpha)$, sino, quizá, a una de las expresiones

$\sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(x-\alpha)$, $\sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(-x+\alpha)$, $\sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(-x-\alpha)$,

lo que resulta en función de los *signos* de los números a y b.

No obstante, no es necesario recordar las fórmulas (7) para transformar la expresión concreta $a \operatorname{sen} x + b \cos x$: es más fácil realizar directamente cálculos requeridos.

Examinemos, por ejemplo, *la expresión* $Q = -2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \times \times \cos x$. Ya que la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de los coeficientes, de seno y coseno, es igual a $\sqrt{7}$, entonces la expresión de Q puede escribirse así:

$$Q = \sqrt{7}\left(-\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cos x\right).$$

Si ahora tomamos $2/\sqrt{7}$ como coseno del ángulo auxiliar α, y $\sqrt{3}/\sqrt{7}$ como seno del mismo ángulo,

$$Q = \sqrt{7}(-\cos\alpha \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\alpha \cos x) = \sqrt{7} \operatorname{sen}(\alpha - x) =$$
$$= \sqrt{7} \operatorname{sen}(x-\alpha).$$

El mismo ángulo α (dentro de los límites de 0 a $\pi/2$) puede ser determinado de la igualdad

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \text{ es decir, } \alpha = \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{21}}{7};$$

por tanto, en definitiva resulta que

$$Q = -\sqrt{7} \operatorname{sen}\left(x - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{21}}{7}\right).$$

Y si, para determinar el ángulo auxiliar α que se halla entre 0 y $\pi/2$, se utiliza la condición

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}, \text{ o sea, } \alpha = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

[1] Según se desee, para determinar α (entre los límites de 0 a $\pi/2$) se puede utilizar también la expresión $\operatorname{tg}\alpha = |b|/|a|$ (si $a \neq 0$) que se deduce de las fórmulas (7). Es fácil convencerse de que todas estas relaciones determinan *el mismo* ángulo α en el primer cuadrante.

la expresión de Q tomará una forma algo distinta:

$$Q=-\sqrt{7}\operatorname{sen}\left(x-\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}\right).$$

A veces resulta más ventajoso reducir la expresión $a\operatorname{sen}x+b\cos x$ al *coseno* de la suma (o la diferencia) del ángulo x y del ángulo auxiliar que se encuentre en los límites de 0 a $\pi/2$. Es también cómodo realizar tal transformación, directamente, sin aplicar fórmulas generales.

Pues así, la expresión $R=\operatorname{sen}2x-\sqrt{3}\cos 2x$ puede ser representada como

$$R=2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right).$$

Este conducirá al coseno de una combinación de ángulos, si la expresión que está entre paréntesis la presentamos como un coseno desarrollado de la suma del ángulo $2x$ y de un ángulo β (dentro de los límites de 0 a $\pi/2$). Pero, para esto es suficiente tomar 1/2 como el seno del ángulo auxiliar β, y $\sqrt{3/2}$ como su coseno. Puesto que en este caso $\beta=\pi/6$, tenemos:

$$R=2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}2x-\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$$

En general, la expresión trigonométrica, como se sabe, tiene sentido pero *no para todos* los valores de sus argumentos. Por esto, en los problemas en que se trata de la transformación de una u otra expresión trigonométrica, *se supone* siempre (aunque no se estipula corrientemente en una forma explícita en la condición del problema) que la transformación de la expresión propuesta se debe realizar en su *campo de determinación*, es decir, sólo para aquellos valores de los argumentos para los cuales la expresión propuesta tiene sentido.

4. *Tenemos los ángulos* α, β, γ *relacionados del modo siguiente:*

$$2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\gamma\operatorname{tg}^2\alpha=1. \qquad (8)$$

Hallar $\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma$.

Según lo dicho anteriormente, es necesario hallar la suma de $\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma$, designándola por N, sólo para aquellos ángulos α, β, γ para los cuales existen todas las funciones trigonométricas que forman parte de (8). En otras palabras, debemos considerar que en este problema los ángulos α, β, γ son tales que $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ tienen sentido [1]. En esta condición complementaria enunciada implícitamente vamos a hallar el valor de N.

[1] Señalemos que la suma incógnita $\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma$ tiene un sentido y un valor completamente determinado para *todos* los ángulos α, β, γ. Sin embargo, para los ángulos α, β, γ que no tengan existente aunque uno de los números $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$, la condición (8) del problema pierde su sentido, a causa de que no es posible considerar tales ángulos como "relacionados por la expresión (8)".

Ya que se propone calcular el valor de N valiéndose de la magnitud de una expresión trigonométrica que contiene las tangentes, es natural escribir también el valor incógnito de N en otra forma, aplicando las tangentes.

$$N=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}+\frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{1+\operatorname{tg}^2\gamma}.$$

Notemos que aquí utilizamos la suposición de que $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ existen: sólo en este caso puede valerse de la fórmula que relaciona el seno y la tangente de un mismo ángulo.

Las transformaciones ulteriores no presentan dificultades: reduciendo la expresión obtenida para N a un denominador común y utilizando (8) hallamos que $N=1$.

En el problema examinado no era necesario hallar los valores admisibles de los argumentos: solamente era importante que las transformaciones realizadas fueran válidas para todos estos valores admisibles, que éstas no cambiaran los campos de determinación.

No obstante, se deben utilizar aquellas transformaciones que hagan variar el campo de determinación, procediendo con mucho cuidado. Esto es muy esencial cuando se necesita no sólo transformar la expresión dada sino aclarar también aquellos valores de la variable que la convierten, digamos, en cero (o sea, resolver realmente alguna *ecuación*). En este caso se han de observar los cambios que sufre el campo de determinación, no admitir su estrechamiento y efectuar comprobaciones si el campo resulta ampliado.

5. *Simplificar la expresión*

$$\frac{1}{3\operatorname{sen}x}[(2\cos x-\operatorname{sen}x)\operatorname{cotg}x+2\operatorname{sen}x+\cos x]\times$$
$$\times\left[1+\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}x}{2\cos x-\operatorname{sen}x}\right)^{-2}\right]^{-1}-\frac{\cos 2x\,[2\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)+(\operatorname{sen}x+\cos x)^2]}{6\,(\operatorname{sen}x+\cos x)^2\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)}.$$

Hállense todos los valores de x con los cuales esta expresión se convierte en cero.

Al principio no vamos a aclarar los valores admisibles de x, sino que realizaremos transformaciones formales. Designando la expresión dada por A, el minuendo, por B, y el sustraendo por C (tal que $A=B-C$), reduciremos B y C a una forma más simple:

$$B=\frac{1}{3\operatorname{sen}x}\cdot\frac{2}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{3\operatorname{sen}^2x}{4\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)}=\frac{1}{2\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)};$$

$$C=\frac{3\,(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)}{6\,(\operatorname{sen}x+\cos x)^2\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)}=\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{2\,(\operatorname{sen}x+\cos x)\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)}.$$

Por consiguiente,

$$A=\frac{\operatorname{sen}x}{(\operatorname{sen}x+\cos x)\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)}.$$

Si tenemos en cuenta que $1 - \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x$, y aplicamos la identidad algebraica

$$(a+b)\ (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3;$$

obtendremos en definitiva que

$$A = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}.$$

Nos referiremos a la segunda cuestión del problema. La forma definitiva de la expresión dada muestra que ésta puede transformarse en cero sólo para áquellos valores de x cuando $\operatorname{sen} x = 0$. No obstante, para estos valores de x la expresión inicial *pierde su sentido*: la presencia del $\operatorname{sen} x$ en el denominador y del $\operatorname{cotg} x$ presupone que la expresión inicial se considera para $x \neq k\pi$, donde k es un número entero. Por eso, *la expresión dada no puede convertirse en cero para cualesquiera que sean los valores de x.*

¿Y cómo explicar entonces el hecho de que la expresión definitiva se convierte en cero con algunos valores de x y la expresión inicial para estos valores de x no tiene sentido? Resulta que en el proceso de las transformaciones de la expresión inicial habíamos *ampliado* su campo de determinación. Esto ocurre en el momento en que se reducen el numerador y el denominador del minuendo por $\operatorname{sen}^2 x$; precisamente después de esto, los valores $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots,$ cayeron en el campo de los valores admisibles.

Notemos que en el campo de determinación de la expresión inicial no entran ni $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ ni siquiera los valores de x, para los cuales las expresiones $\operatorname{sen} x + \cos x$ y $2 \cos x - \operatorname{sen} x$ se convierten en cero (la expresión $1 - \operatorname{sen} x \cos x$ nunca se convierte en cero). Y en lo que se refiere a la expresión definitiva, ésta no tiene sentido para los valores de x cuando $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$, pero tiene sentido para x cuando $2 \cos x - \operatorname{sen} x = 0$ (Hállense las transformaciones después de que los valores indicados de x entraron en el campo de determinación).

Ya hemos examinado detalladamente que las fórmulas trigonométricas son válidas cuando son *admisibles* los valores de los argumentos (véanse, por ejemplo, (3) y (4)). Lo mismo se refiere también a las relaciones (identidades) trigonométricas que se proponen a demostrar a los estudiantes.

En los problemas que exigen fundamentar alguna relación trigonométrica es necesario tener presente que cada relación debemos considerarla *junto* con la descripción del conjunto de valores de los argumentos para los cuales esta es justa. Si el conjunto, en el cual la identidad es válida para la demostración, no se expone en la condición del problema, esto significa que hay que examinar la identidad *en su campo de determinación.* En este caso conviene hallar su campo de determinación y asegurar la validez de la determinación a realizar para *todos* los valores admisibles de los argumentos.

6. *Demostrar la identidad*

$$1 = -\cos 2\alpha \left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi - 2\alpha)\right].$$

A pesar de que en este caso esta identidad es válida, no quiere decir que lo sea para todos los valores de α. En efecto, el primer miembro tiene sentido para cualesquier valores de α (porque no depende de α) y el segundo miembro no está determinado para $\alpha = n\pi$, $\alpha = (\pi/4) + (m\pi/2)$, donde n y m son números enteros. (¡Represente estos valores en el círculo trigonométrico!). Todos los valores de α, excepto los indicados recientemente, son admisibles.

Precisamente, con estos valores de α admisibles tenemos que demostrar la identidad propuesta. Es bastante fácil realizar esta demostración utilizando las fórmulas fundamentales de Trigonometría. Con esto es preciso comprobar solamente que las transformaciones sean válidas para todos los valores de α admisibles.

Para la demostración de las relaciones trigonométricas se toma, por lo común, uno de sus miembros y mediante diferentes operaciones trigonométricas y algebraicas (y también datos del problema) éste se transforma de modo que se obtenga la expresión que se halla en otro miembro de la relación a demostrar. Transformando éstos por separado puede convencerse también de la coincidencia del primero y segundo miembros de la relación que se demuestra.

Sin embargo, en los casos más complejos, cuando se requiere obtener, sobre todo, de una igualdad (dada) la otra (buscada), es bastante difícil percibir en seguida aquellas transformaciones que darían la solución. En tales problemas, al principio *se supone que la relación a demostrar es válida* y ésta se reduce, por diferentes transformaciones, a la igualdad evidente (o dada), "tanteando" de tal modo la vía de resolución

7. *Demostrar que si* $\cos x = \cos a \cos b$ y *si* $x \pm a \neq (2k+1)\pi$, $b \neq (2n+1)\pi$, k, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces

$$1 + \operatorname{tg}\frac{x+a}{2}\operatorname{tg}\frac{x-a}{2} = \sec^2\frac{b}{2}. \qquad (9)$$

En este problema, es poco probable que sea posible determinar a primera vista cómo debe transformarse la igualdad dada $\cos x = \cos a \times \times \cos b$ para llegar (teniendo en cuenta las restricciones) a la igualdad incógnita (9) [1].

[1] Llamaremos la atención en cuanto a la esencia de las restricciones impuestas sobre x, a, b: sin éstas, la afirmación del problema sería incorrecta porque la igualdad (9) que nos interesa, tiene un campo de determinación más estrecho que la relación dada $\cos x = \cos a \cos b$. Por ejemplo, para $x = a + \pi$, $b = \pi$, la relación $\cos x = \cos a \times \times \cos b$ es válida mientras que la igualdad (9) pierde su sentido.

Por lo tanto, *supongamos que la igualdad* (9) *es correcta*, y vamos a transformarla:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}\frac{x+a}{2}\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}}=\frac{1}{\cos^2\frac{b}{2}}-1;\\ \frac{\cos a-\cos x}{\cos a+\cos x}=\frac{1-\cos b}{1+\cos b};\\ \cos x=\cos a\cos b.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Como resultado de los cálculos realizados hemos llegado a una igualdad que *es correcta según los datos del problema.*

En esta etapa algunos estudiantes cometen un grave error lógico sacando la conclusión inmediata: "Por consiguiente es también correcta la igualdad (9) propuesta para la demostración". En realidad, hasta ahora no hay razón alguna para hacer tales conclusiones: los cálculos realizados *no demuestran* la validez de la igualdad requerida. Hablando en rigor hemos demostrado que si la igualdad (9) es válida, entonces $\cos x=\cos a\cos b$, es decir, hemos demostrado la aseveración *contraria* a la que se exige en el problema.

Luego, para resolver el problema propuesto se puede razonar así. Consideraremos los cálculos realizados (10) como simple *búsqueda* de las vías de resolución, como "borrador". Y en calidad de resolución "en limpio", efectuaremos todas estas transformaciones *en la sucesión contraria*, partiendo de la igualdad dada $\cos x=\cos a\cos b$.

Precisamente, tomemos la igualdad *correcta* (según la condición del problema) $\cos x=\cos a\cos b$, multipliquemos por 2 ambos miembros y escribamos el resultado en forma

$$-\cos x+\cos a\cos b=\cos x-\cos a\cos b.$$

Adicionando la expresión $\cos a-\cos b\cos x$ a ambos miembros, obtenemos

$$(\cos a-\cos x)(1+\cos b)=(\cos a+\cos x)(1-\cos b).$$

Ya que $x\pm a\neq(2k+1)\pi$, entonces $\cos a+\cos x\neq 0$; ya que $b\neq\neq(2n+1)\pi$, entonces $1+\cos b\neq 0$. Por eso [1] ambos miembros de esta última igualdad pueden dividirse por el producto $(\cos a+\cos x)\times\times(1+\cos b)$; de aquí obtendremos una igualdad *correcta*

$$\frac{\cos a-\cos x}{\cos a+\cos x}=\frac{1-\cos b}{1+\cos b}.$$

Transformemos en productos la suma y la diferencia de los cosenos de su primer miembro, y para el segundo miembro apliquemos las

[1] Vemos que las restricciones indicadas en la condición del problema se utilizan esencialmente: sólo con estas restricciones podemos realizar a la inversa las transformaciones hechas en "borrador".

fórmulas del semiángulo:

$$\frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{x+a}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x-a}{2}}{2\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}}=\frac{\mathrm{sen}^2\,\frac{b}{2}}{\cos^2\frac{b}{2}}.$$

Ahora, en el primer miembro nos queda por pasar a las tangentes y, en el segundo, expresar el seno del ángulo $b/2$ por su coseno para obtener la igualdad requerida (9).

Pero, se puede de hecho prescindir de los cálculos a la inversa. Es preciso demostrar solamente que todas las transformaciones, con ayuda de las cuales hemos pasado, en la fórmula (10), de la igualdad (9) a la relación $\cos x=\cos a\cos b$, en el campo de determinación de (9) son *reversibles* (o sea, no sólo de cada igualdad obtenida en el curso de transformaciones resulta la consecuente, sino que la misma se deduce de la consecuente). Este método de consideraciones ya lo hemos discutido en el § 8, de la Parte I con arreglo a la demostración de las desigualdades; es totalmente aplicable también para fundamentar las igualdades (incluso las trigonométricas).

Pues, así, debemos analizar una vez más las transformaciones (10). Es fácil convencerse de que todas estas son reversibles (en particular, la transición de la segunda igualdad (10) a la tercera es precisamente reversible a causa de las restricciones superpuestas en la condición del problema sobre x, a, b). Los cálculos (10), provistos de la demostración de reversibilidad de cada transformación, pueden considerarse como solución completa: en este caso éstos permiten sacar conclusiones de la validez de la igualdad inicial (9) (en su campo de determinación).

En resumen, propongamos un problema más sobre la demostración de una relación trigonométrica que se resuelve aplicando un procedimiento artificial.

8. *Demostrar que para cualquier n entero positivo es válida la igualdad*

$$\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}+\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}+\ldots+\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{3}=2\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{6}\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{6}\text{ [1]}.$$

Para abreviar la fórmula, designaremos por S el primer miembro de esta igualdad, lo multiplicaremos por sen $(\pi/6)$ y todos los productos de los senos los desarrollaremos en diferencias de los cosenos:

$$S\cdot\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{3\pi}{6}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\cos\frac{2n-1}{6}\pi-\cos\frac{2n+1}{6}\pi\right)\right].$$

[1] En el problema 8, del § 3 de la Parte I, esta relación fue demostrada por el método de inducción matemática.

Notando que todos los sumandos intermedios de la suma obtenida se eliminan recíprocamente, hallaremos que

$$S\cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{2n+1}{6}\pi\right]=\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{n+1}{6}\pi,$$

$$S=2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi}{6}.$$

El primer miembro de la igualdad a demostrar coincidió de esa manera con su segundo miembro, lo que comprueba su validez [1].

EJERCICIOS:

1. Comprobar la validez de la igualdad

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Está propuesto: $\operatorname{sen} x = 1/4\,(\sqrt{5}-1)$. Calcular $\operatorname{sen} 5x$.

3. Está propuesto: $\operatorname{sen} x = 1/4\,(\sqrt{5}-1)$. Demuéstrese que en este caso $\cos 4x = \operatorname{sen} x$ y hállese en grados el ángulo x que se encuentra entre los límites de 0 a 90°.

4. Exprésese $\cos(\alpha/2)$ y $\operatorname{sen}(\alpha/2)$ por $\operatorname{sen}\alpha$, si $270^\circ \leqslant \alpha \leqslant 450^\circ$.

5. Demuéstrese que la expresión $y=\cos^2 x+\cos^2(x+\alpha)-2\cos\alpha\cos x\times\cos(x+\alpha)$ no depende de x.

6. Simplificar la expresión

$$\frac{2\operatorname{sen}2x\left(\operatorname{sen}x\cos x+\dfrac{\cos^3 x\operatorname{sen}x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\right)}{\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}}+\frac{\cos^2 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

7. Simplificar la expresión

$$\frac{1}{2\sqrt{-a^2-ab}}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{-a^2-ab}}{\cos^2 x}}{a+\sqrt{-a^2-ab}\operatorname{tg}x}-\frac{\dfrac{\sqrt{-a^2-ab}}{\cos^2 x}}{-a+\sqrt{-a^2-ab}\operatorname{tg}x}\right),$$

donde $a^2+ab<0$.

8. Simplificar la expresión

$$\frac{(\operatorname{tg}x)^{-1/2}}{\cos^2 x}-$$
$$-\frac{\left[1+(2\operatorname{tg}x)^{-1/2}\right]\left[\operatorname{tg}x-(2\operatorname{tg}x)^{1/2}+1\right]-\left[1-(2\operatorname{tg}x)^{-1/2}\right]\left[\operatorname{tg}x+(2\operatorname{tg}x)^{1/2}+1\right]}{2\sqrt{2}\cos^2 x\left[\operatorname{tg}x+(2\operatorname{tg}x)^{1/2}+1\right]\left[\operatorname{tg}x-(2\operatorname{tg}x)^{1/2}+1\right\}}+$$
$$+\frac{(\operatorname{tg}x-1)(2\operatorname{tg}x)^{-1/2}-(2\operatorname{tg}x)^{1/2}}{\sqrt{2}\cos^2 x(\operatorname{tg}x-1)^2}\left[1+2\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-1)^{-2}\right]^{-1}.$$

---

[1] El lector puede convencerse de que el método expuesto es aplicable también a otros problemas. Por ejemplo, éste permite calcular sumas de la forma $s_1=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(x+h)+\ldots+\operatorname{sen}(x+nh)$; $s_2=\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$ y así sucesivamente (para esto es suficiente examinar las expresiones $s_1\cdot\operatorname{sen}(h/2)$ y $s_2\cdot\operatorname{sen}(x/2)$, respectivamente).

Hallar todos los valores de x para los cuales esta expresión es igual a $3^{3/4}$.

9. Simplificar la expresión

$$\frac{2\operatorname{sen} a\cos x(1-\cos a\cos x)-\operatorname{sen} 2a\operatorname{sen}^2 x}{2(1-\cos a\cos x)^2}\cdot\left[1-\frac{\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 x}{(1-\cos a\cos x)^2}\right]^{-1/2},$$

si $0<a<\pi/4$, $\pi/4<x<\pi/2$.

10. Demostrar la identidad

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}.$$

11. Demostrar que para $0<x<\pi/2$

$$\sqrt{\operatorname{tg} x+\operatorname{sen} x}+\sqrt{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}=2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

12. Representar la expresión $-\operatorname{tg}(x/2)+\cos x+\operatorname{sen} x$ en forma del producto.

13. Simplificar la expresión

$$\operatorname{sen}(a-b)+\operatorname{sen}(b-c)+\operatorname{sen}(c-a)+4\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}\operatorname{sen}\frac{b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{c-a}{2}.$$

14. Despejando θ y φ de las relaciones

$$a\operatorname{sen}^2\theta+b\cos^2\theta=1,$$
$$a\cos^2\varphi+b\operatorname{sen}^2\varphi=1,\quad a\operatorname{tg}\theta=b\operatorname{tg}\varphi,$$

hallar la dependencia entre a y b, si $0<b<1$, $a>1$.

15. Despejando θ y φ de las relaciones

$$p\operatorname{cotg}^2\theta+q\operatorname{cotg}^2\varphi=1,\quad p\cos^2\theta+q\cos^2\varphi=1,$$
$$p\operatorname{sen}\theta=q\operatorname{sen}\varphi,$$

hallar la dependencia entre p y q.

16. Se da: $\operatorname{tg} x=2b/(a-c)$, $a\neq c$. Calcular las expresiones siguientes: $y=a\cos^2 x+2b\operatorname{sen} x\cos x+c\operatorname{sen}^2 x$; $z=a\operatorname{sen}^2 x-2b\operatorname{sen} x\cos x+c\cos^2 x$.

17. Calcular sin recurrir a las tablas, que

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

18. Demostrar que

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

19. Demostrar que $\operatorname{tg} 142°30'=2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

20. ¿Para los cuáles valores de α y β, de la igualdad $\cos(2\alpha+\beta)=1$ se deduce la igualdad $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}(\beta/2)$?

21. Demostrar que $\operatorname{sen}(\alpha+2\beta)=\operatorname{sen}\alpha$, si $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=0$.

22. Hallar $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ si $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=\sqrt{7}/2$ y el ángulo α se encuentra entre 0° y 45°.

23. Demostrar que $\alpha+2\beta=45°$ si α y β son los ángulos del primer cuadrante y $\operatorname{tg}\alpha=1/7$, $\operatorname{sen}\beta=1/\sqrt{10}$.

24. Demostrar que $\cos(\alpha-\beta)=(aA+bB)/(aB+bA)$ si $\operatorname{sen}(x-\alpha)/\operatorname{sen}(x-\beta)=a/b$, $\cos(x-\alpha)/(\cos(x-\beta)=A/B$ y $aB+bA\neq 0$.

25. Calcular la expresión $\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)+p\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$, sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$ son las raíces de la ecuación $x^2+px+q=0$.

26. Transformar la expresión $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ en una suma de senos a condición de que $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$.

27. Simplificar la expresión $\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

28. La suma de tres números positivos α, β, γ es igual a $\pi/2$. Calcular el producto $\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\gamma$ si se conoce que $\operatorname{cotg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\beta$, $\operatorname{cotg}\gamma$ forman una progresión aritmética.

29. Demostrar que

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2},$$

si α, β, γ son los ángulos de un triángulo.

30. Demostrar que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, si $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$, $0<\gamma<\pi/2$ y $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 1+4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}$.

§ 3. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los estudiantes tienen que saber escribir las fórmulas que presenten las soluciones de las ecuaciones trigonométricas *elementales*: $\operatorname{sen} px = a$, $\cos qx = b$, etc. A veces, al escribir las soluciones de tales ecuaciones se encuentran errores que se explican por el dominio inseguro o la comprensión incorrecta de los símbolos $\operatorname{arc\,sen}\alpha$, $\arccos\alpha$ y de otros.

Consideraremos por ejemplo, la ecuación $\cos x = -1/2$. A veces se oye decir que "la solución de esta ecuación será $x=\pm(-\pi/3)+2k\pi$, donde k es un número entero cualquiera". Tal respuesta denuncia la incomprensión del símbolo $\arccos(-1/2)$ (véase el § 5, Parte II). Esta magnitud se calcula correctamente por muchos estudiantes: $\arccos(-1/2)=\pi-(\pi/3)$, pero la respuesta se escribe, no se sabe por qué, en la forma $x=\pm\pi-(\pi/3)+2k\pi$ en lugar de la forma correcta $x=\pm(2\pi/3)+2k\pi$.

También se cometen errores graves cuando se aplican automáticamente tales o cuales fórmulas. Así pues, al resolver la ecuación $\operatorname{sen} x = (\sqrt{5}+1)/2$ a veces se da la respuesta siguiente:

$$x=(-1)^k \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}+1}{2}+k\pi, \quad \text{para } k=0, \pm1, \pm2, \ldots$$

mientras que esta ecuación no tiene raíces (porque $(\sqrt{5}+1)/2>1$).

Los estudiantes, de vez en cuando, las soluciones de las ecuaciones trigonométricas las escriben en grados. Claro que esto es admisible, aunque es preferible que la solución se dé en radianes, considerando a x como *número* y no como ángulo. Sin embargo, no conviene del todo utilizar anotación en la cual figuren a la vez los grados y los radianes (por ejemplo, $x=(-\pi/8)+90^\circ\cdot k$).

La ecuación de la forma

$$a\operatorname{sen} x + b\cos x = c \tag{1}$$

es próxima a las ecuaciones trigonométricas elementales; a ésta se reducen muchas ecuaciones. Las ecuaciones del tipo (1) se resolverán mejor aplicando *el método de introducción de un ángulo auxiliar* (véase § 2, Parte II).

1. *Resolver la ecuación*

$$\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2 \cos 2x.$$

Aquí es más cómodo transformar el primer miembro al *coseno* de la diferencia (determinando el ángulo auxiliar dentro de los límites de 0 a $\pi/2$):

$$\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

después de lo cual la ecuación toma la forma $\cos [x - (\pi/3)] = \cos 2x$. Si transformaramos el primer miembro al seno de la suma $\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} [x + (\pi/6)]$, entonces, después de permutar al primer miembro $2 \cos 2x$, tendríamos que aplicar también la fórmula del ángulo auxiliar para pasar al producto de las funciones trigonométricas [1]. No obstante, ahora podemos realizar esto inmediatamente:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x = 0, \quad \operatorname{sen} \frac{9x - \pi}{6} \operatorname{sen} \frac{3x + \pi}{6} = 0;$$

de aquí obtenemos dos series de soluciones:

$$x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Las ecuaciones trigonométricas casi siempre tienen varias series de soluciones. Es importante comprender que los números k y n que entran en distintas series *de ninguna manera están ligados entre sí*. Al mismo tiempo, la solución obtenida puede ser escrita en otra forma:

$$x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

sin embargo, en este caso se sobreentiende que en *cada una* de estas igualdades el número k toma, *independientemente* de otro, todos los valores enteros.

En caso de que el ángulo auxiliar resulta ser "bueno" (por ejemplo, $\pi/3$, $\pi/4$, etc.), los estudiantes resuelven siempre tales ecuaciones (1) recurriendo al método expuesto. Y si el ángulo auxiliar no es igual

---

[1] Las ecuaciones de la forma $\cos [x - (\pi/3)] = \cos 2x$ o bien, $\operatorname{sen} [x + (\pi/6)] = \cos 2x$ se resuelven a menudo no por el método indicado por nosotros, sino que se utilizan las relaciones entre α y β que se deducen de las igualdades $\cos\alpha = \cos\beta$ ó $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ (véase ejercicio 1). Sin embargo, la experiencia enseña que en este caso los estudiantes cometen errores relacionados con la aplicación incorrecta de estas relaciones. No hay necesidad de aprender estas relaciones porque su utilización no conduce a la disminución de los cálculos.

a ninguno de los valores bien conocidos, son pocos los que resuelven ecuaciones de tal modo: la sustitución universal y la elevación al cuadrado son de uso común.

Esto se explica, por lo visto, por cierta adversión a los símbolos arc sen a y otros; en este caso "malo", el ángulo auxiliar sólo puede anotarse como arc seno o arc coseno de un número (de una expresión) que "no se deja calcular". No obstante, hay que subrayar que tal inconveniencia es insignificante en comparación con las dificultades que nos esperan al aplicar otros métodos [1].

2. *Resolver la ecuación*

$$2 \operatorname{sen} 4x + 16 \operatorname{sen}^3 x \cos x + 3 \cos 2x - 5 = 0.$$

Surge un método bastante natural: expresar sen $4x$ por funciones trigonométricas del ángulo x:

$$2 \operatorname{sen} 4x = 8 \operatorname{sen} x \cos x - 16 \operatorname{sen}^3 x \cos x.$$

Ahora ya se ve que la ecuación propuesta se reduce a la forma (1):

$$4 \operatorname{sen} 2x + 3 \cos 2x = 5. \qquad (2)$$

Sea α el ángulo entre 0 y $\pi/2$ que satisface a las expresiones sen $\alpha = 3/5$, cos $\alpha = 4/5$, es decir, $\alpha =$ arc sen $3/5$. En este caso la ecuación (2) es equivalente a la ecuación sen $(2x + \alpha) = 1$, de donde

$$x = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{3}{5} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Las expresiones que determinan el ángulo auxiliar α permiten elegir $\alpha =$ arc cos $4/5$ que presenta otra forma de solución:

$$x = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{4}{5} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

o bien, elegir $\alpha =$ arc tg $3/4$; entonces

$$x = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En fin, se podría introducir el ángulo auxiliar β, $0 < \beta < \pi/2$, de modo que la ecuación (2) se reduzca a la forma cos $(2x - \beta) = 1$. Para esto es suficiente elegir $\beta =$ arc sen $4/5$ ó $\beta =$ arc cos $3/5$; la solu-

[1] En efecto, la sustitución universal, o sea, el cambio del seno y del coseno por la tangente del semiángulo, reduce el campo de valores admisibles, lo que puede conducir a la pérdida de raíces (véase el problema 15 del § 9, Parte I). La operación de elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación puede dar lugar a la adquisición de soluciones (véase § 9, Parte I). Por consiguiente estos métodos exigen investigaciones complementarias, mientras que el método de introducción del ángulo auxiliar nos da inmediatamente una ecuación equivalente elemental. Por esto se recomienda su aplicación para resolver las ecuaciones del tipo (1).

ción se escribe, respectivamente, en forma de

$$x=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}+k\pi,\ \text{para } k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

o bien,

$$x=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{3}{5}+k\pi,\ \text{para } k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Es fácil convencerse de que las fórmulas obtenidas son solamente diferentes formas de anotación de las soluciones de la ecuación (2), o sea, todas éstas pueden ser transformadas una en otra (véase el § 5, Parte II).

3. *Resolver la ecuación*

$$tg\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)-\operatorname{cotg}(\pi \operatorname{sen} x)=0.$$

Esta ecuación parece insólita a causa de los argumentos "exóticos" de la tangente y la cotangente. Pero, en realidad aquí no hay nada excepcional: para cualquier x, los números sen x y cos x son totalmente determinados ya que tienen sentido determinado la tangente del número $(\pi/2)\cos x$, si $\cos x \neq \pm 1$, y la cotangente del número π sen x, si sen $x \neq 0$, sen $x \neq \pm 1$. Estas condiciones describen el RVA de la ecuación inicial.

Transformando la diferencia de la tangente y la cotangente y omitiendo el denominador, llegaremos a la ecuación

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x+\pi \operatorname{sen} x\right)=0; \tag{3}$$

es necesario resolver esta ecuación y tomar sus raíces que entran en el RVA de la ecuación inicial.

De la ecuación (3) obtenemos

$$\frac{\pi}{2}\cos x+\pi \operatorname{sen} x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Ahora deben hallarse *todas* las raíces de la ecuación para *cada k* entero:

$$2 \operatorname{sen} x+\cos x=2k+1 \tag{4}$$

del tipo (1). La ecuación (3) "se descompone" por lo tanto, en un número *infinito* de ecuaciones, y para obtener todas sus raíces se ha de buscar todas las raíces de la ecuación (4) correspondiente a $k=0$, todas las raíces de la ecuación (4) correspondiente a $k=1$, todas las raíces de la ecuación (4) que corresponde a $k=-1$, etc.

Esta particularidad del problema desorienta a algunos estudiantes. Unos obtienen de la ecuación (3) la relación $(\pi/2)\cos x+\pi\times$ $\times$ sen $x=\pi/2$ perdiendo de tal modo parte de las raíces; otros consideran que el número k de la ecuación (4) ha de asumir un valor completamente determinado y en vano tratan de hallar este valor de k de la ecuación (3).

No es difícil buscar todas las raíces del número infinito de ecuaciones (4). Introduciendo el ángulo auxiliar, por ejemplo, según la fórmula $\beta = \arccos(1/\sqrt{5})$, podemos reducir las ecuaciones (4) a la forma

$$\cos(x-\beta) = \frac{2k+1}{\sqrt{5}}, \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5}$$

Resolviendo la desigualdad $-1 \leqslant (2k+1)/\sqrt{5} \leqslant 1$, nos convencemos fácilmente de que ésta tiene dos soluciones *de números enteros*: $k=0$ y $k=-1$. Por consiguiente, de todo el número infinito de ecuaciones (5) es preciso hallar solamente las raíces de las *dos* ecuaciones correspondientes a los valores de $k=0$ y $k=-1$:

$$\cos(x-\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \cos(x-\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

las ecuaciones (5) correspondientes a todos los demás valores de k, no tienen raíces.

Las raíces de las dos ecuaciones obtenidas las anotaremos en forma de cuatro series (x_1 y x_2 son las series de la primera ecuación, x_3 y x_4, las de la segunda [1]):

$$x_1 = \beta + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2n\pi = 2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2n\pi$$
$$\text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$x_2 = \beta - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2m\pi = 2m\pi \quad \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x_3 = \beta + \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2p\pi = (2p+1)\pi \text{ para } p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$x_4 = \beta - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2q\pi = 2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + (2q-1)\pi$$
$$\text{para } q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Sin embargo, no todas estas series entran en el RVA de la ecuación inicial: para cualquier raíz de las series segunda y tercera es evidente que $\operatorname{sen} x = 0$ debido a que no existe $\operatorname{cotg}(\pi \operatorname{sen} x)$. Por consiguiente, estas series no pueden ser soluciones de la ecuación inicial. En lo que se refiere a las raíces de las series primera y cuarta, todas éstas entran en el RVA de la ecuación inicial: los cálculos requeridos (que pueden realizarse, por ejemplo, análogamente a la resolución de los ejemplos 2—4 dados en el § 5, Parte II) señalan que para estas raíces $\cos x \neq \pm 1$, $\operatorname{sen} x \neq 0$, $\operatorname{sen} x = \pm 1$. Pues así, la

[1] Al transformar la tercera serie se ha utilizado la expresión obtenida en el problema 10 del § 5, Parte II.

solución de la ecuación inicial comprende dos series x_1 y x_4 indicadas anteriormente.

A veces, algunas series de raíces de la ecuación trigonométrica se logran reuniéndolas mediante una sola fórmula. Por ejemplo, en el problema considerado, las series x_1 y x_4 son fáciles de representar en la forma

$$x = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + l\pi \quad \text{para } l = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

(los valores pares de $l = 2n$ dan la primera serie y los impares de $l = 2q - 1$, la cuarta serie). Sin embargo, esta agrupación no es obligatoria (y no siempre es cómoda); se puede dejar la respuesta definitiva en forma de varias series.

Las ecuaciones trigonométricas contienen expresiones trigonométricas más o menos complejas. Como se sabe, no existe un método único con cuya ayuda se podría resolver cualquier ecuación de funciones trigonométricas. Pero, la finalidad consiste en la transformación de las expresiones trigonométricas, que forman parte de la ecuación, de modo que la ecuación considerada se reduzca a una elemental, o bien "se descomponga" en unas elementales.

En cada ejemplo concreto se ha de aplicar su propio método de transformación de la ecuación considerada. De vez en cuando resulta necesario variar diferentes transformaciones, probar distintas ideas de que se elija el método que conduzca a la solución.

Y sólo el buen conocimiento de las fórmulas trigonométricas y el dominio correcto de las transformaciones trigonométricas (véase el § 2, Parte II) pueden proporcionarnos el éxito; esto puede lograrse sólo con una práctica intensiva.

Muchas ecuaciones trigonométricas admiten distintos métodos de resolución: en dependencia de la idea en que se basa la resolución, cómo se transforman las expresiones trigonométricas que entran en la ecuación. Subrayemos que en este caso la forma de anotación de las soluciones depende a menudo del método elegido para la resolución, y si queremos demostrar la equivalencia de dos formas diferentes de anotación de la solución, tendremos que recurrir a las transformaciones complementarias.

Esto tiene importancia porque los estudiantes, después de resolver una ecuación trigonométrica, a veces empiezan a resolverla, "para el control", de otro modo y obtienen una solución distinta, la cual se toma como una confirmación de que la primera solución es incorrecta; los estudiantes tratan de encontrar errores inexistentes gastando para ello mucho tiempo y esfuerzos en lugar de realizar las transformaciones requeridas de las soluciones y convencerse de su identidad.

Además, se requiere resolver la ecuación trigonométrica propuesta aplicando otro método cualquiera (es deseado: por un método más sencillo y breve), sin recurrir a otras formas de transformaciones de la solución.

En el proceso de las transformaciones de la ecuación se ha de observar la equivalencia para que no se pierdan las raíces (por ejemplo, al dividir el primero y segundo miembros de la ecuación por un factor común) ni se adquieran raíces extrañas (por ejemplo, al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación). Además de esto, es necesario controlar por separado si las raíces obtenidas de la ecuación considerada pertenecen al RVA. En todos los casos necesarios (o sea, cuando se han realizado las transformaciones no equivalentes), debe, obligatoriamente, realizarse la comprobación.

Todas las cuestiones similares referentes a *la resolución de las ecuaciones* (incluso las trigonométricas), así como algunos ejemplos son considerados detalladamente en el § 9, Parte I. Por eso, aquí no nos detendremos especialmente en estos casos.

Los ejemplos que se examinan a continuación, en términos generales solamente ilustran recomendaciones que deben ser tenidas en cuenta, al resolver las ecuaciones *trigonométricas*. Sin embargo, no hace falta pensar que estas recomendaciones tienen un carácter universal y que en todos los casos conducen a las soluciones.

Es sumamente conveniente resolver muchas ecuaciones trigonométricas que contienen el seno, el coseno y la tangente, pasando previamente a una sola función cualquiera. En particular, a veces se logra simplificar la ecuación con ayuda de la sustitución universal, es decir, la sustitución de todas las funciones trigonométricas integrantes, por la tangente del semiángulo.

Sin embargo, es necesario recordar que esta transformación reduce el RVA y por eso puede provocar *la pérdida de raíces* (véase el problema 15 del § 9, Parte I). Por lo tanto, la sustitución universal debe acompañarse de las investigaciones complementarias requeridas.

4. *Resolver la ecuación*

$$(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{sen} 2x)=1+\operatorname{tg} x.$$

Son muchos los métodos para resolver esta ecuación. Pero, lo más pronto que conduce a la solución es la sustitución universal: expresando sen $2x$ por tg x, obtenemos la ecuación

$$(1-\operatorname{tg} x)\left(1+\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)=1+\operatorname{tg} x,$$

que es *equivalente* a la inicial (ya que tg x existe en el RVA de la ecuación inicial). Reduciendo el segundo factor del primer miembro a un denominador común y despejando el denominador (esto es posible, porque $1+\operatorname{tg}^2 x\neq 0$), llegamos a una ecuación "descomponente" $\operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg} x)=0$ que tiene dos series de soluciones:

$$x_1=k\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{4}+n\pi;\quad k,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Los estudiantes, al resolver las ecuaciones trigonométricas que contienen las funciones trigonométricas de los argumentos múltiplos, a veces se esfuerzan por pasar a las funciones del propio argumento; en este caso resulta una ecuación algebraica de alto grado respecto a $\operatorname{sen} x$ (o $\cos x$). No obstante, en muchos casos es más cómodo pasar *de los cuadrados de las funciones trigonométricas a las funciones de argumento doble*, aplicando las fórmulas

$$\cos^2 x = 1/2\,(1+\cos 2x), \quad \operatorname{sen}^2 x = 1/2\,(1-\cos 2x), \tag{6}$$

disminuyendo de tal modo la potencia de la ecuación obtenida. Este procedimiento reduce los cálculos y, además de esto, permite anotar automáticamente la respuesta en la forma más compacta.

5. *Resolver la ecuación*

$$\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x = 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Es fácil reducir el segundo miembro de esta ecuación a la forma $1/2+\cos 4x$. Luego, si expresamos $\cos 4x$ por $\cos x$ y en el primer miembro de la ecuación inicial sustituimos $\operatorname{sen}^2 x$ por $1-\cos^2 x$, entonces ésta se reducirá a la ecuación bicuadrada $12\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1 = 0$ (respecto a $\cos x$).

Designando por y la expresión $\cos^2 x$, obtendremos una ecuación de segundo grado $12y^2 - 12y + 1 = 0$ cuyas soluciones son:

$$y_1 = \frac{3-\sqrt{6}}{6}, \quad y_2 = \frac{3+\sqrt{6}}{6}.$$

La primera raíz y_1 nos lleva a la ecuación $\cos^2 x = (3-\sqrt{6})/6$; puesto que $0 < y_1 < 1$, ésta se descompone a su vez en dos ecuaciones:

$$\cos x = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}} \quad \text{y} \quad \cos x = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}},$$

de donde obtenemos dos series de soluciones de la ecuación inicial. Análogamente, la segunda raíz y_2 conduce más a dos series de soluciones de la ecuación inicial (el mismo lector puede escribir todas las cuatro series de ecuaciones).

Naturalmente, la solución expuesta no hace ningunas objeciones por esencia porque es del todo correcta. Pero, es mejor y más económico otro procedimiento de solución de la ecuación inicial, que permite reducir todo a la consideración de *una* ecuación trigonométrica elemental y obtener la respuesta en forma de una sola fórmula.

En la ecuación $\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x = 1/2 + \cos 4x$ transformaremos no $\cos 4x$ sino que, al contrario, expresaremos $\cos^4 x$ y $\operatorname{sen}^4 x$ por el coseno del argumento cuádruplo, para lo cual aplicaremos la fórmula (6). Cálculos bastante sencillos nos conducirán en seguida a la ecuación $\cos 4x = 1/3$, de donde

$$x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Notemos en particular que la aplicación de la fórmula (6) siempre permite resolver la ecuación *cuadrada* respecto a $\cos 2x$, en lugar de la ecuación *bicuadrada* respecto a $\cos x$ (o $\operatorname{sen} x$), que exige menos cálculos y permite escribir la solución en una forma más sencilla.

6. *Resolver la ecuación*

$$4 \cos^2 (2 - 6x) + 16 \cos^2 (1 - 3x) = 13.$$

Para abreviar la ecuación, al designar $1 - 3x$ por y, ésta la escribiremos en forma de $4 \cos^2 2y + 16 \cos^2 y = 13$. Claro está que el primer sumando del primer miembro puede transformarse por la fórmula del argumento doble: como resultado se obtendrá la ecuación bicuadrada respecto a $\cos y$. Pero, si transformamos el segundo sumando del primer miembro por la fórmula (6), llegaremos a la ecuación de segundo grado $4 \cos^2 2y + 8 \cos 2y - 5 = 0$.

La ecuación de segundo grado $4z^2 + 8z - 5 = 0$ respecto a $z = \cos 2y$ tiene dos soluciones: $z_1 = -5/2$, $z_2 = 1/2$. Por consiguiente, tenemos que resolver dos ecuaciones: $\cos 2y = -5/2$ y $\cos 2y = 1/2$. Ya que $|\cos 2y| \leqslant 1$, la primera ecuación no tiene raíces, y de la segunda se deducen fácilmente las raíces de la ecuación inicial

$$x = \frac{1}{3} \pm \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Se recomienda al lector que observe por qué la solución puede anotarse en tal forma.

La aplicación acertada de las fórmulas *de transformación del producto de las funciones trigonométricas en la suma (diferencia) de tales funciones (o a la inversa)* conduce a menudo a la solución siguiendo un método más breve. Al resolver las ecuaciones es muy útil calcular mentalmente el resultado de la aplicación de estas fórmulas y ver las posibilidades que se obtengan.

7. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{sen} 4x + 3 \operatorname{sen} 2x = \operatorname{tg} x.$$

Algunos estudiantes proceden del modo siguiente: al multiplicar esta ecuación por $\cos x$ y aplicar las fórmulas del argumento doble, llegan a la ecuación

$$\operatorname{sen} x (8 \cos^4 x + 2 \cos^2 x - 1) = 0,$$

que se resuelve luego por métodos ya conocidos.

Mientras tanto, es más fácil proceder de otro modo. Si se desarrollan los productos obtenidos $\operatorname{sen} 4x \cos x$ y $3 \operatorname{sen} 2x \cos x$, una vez multiplicada la ecuación inicial por $\cos x$, en sumas de las funciones trigonométricas, llegaremos a la ecuación $\operatorname{sen} 5x + 4 \operatorname{sen} \cdot 3x + \operatorname{sen} x = 0$. Más adelante, el primer y el tercer sumandos del primer miembro de la última ecuación los transformaremos en un producto de funciones trigonométricas; como resultado obtenemos que $\operatorname{sen} 3x (\cos 2x + 2) = 0$. Esta ecuación "se desintegra" en dos: la primera ($\operatorname{sen} 3x = 0$) da una serie de $x = k\pi/3$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y la segunda, ($\cos 2x + 2 = 0$) no tiene raíces.

Una comprobación (necesaria, dado que la multiplicación por $\cos x$ amplió el RVA) muestra que la serie hallada es la solución de la ecuación inicial.

En muchos casos, al resolver las ecuaciones trigonométricas, se aplica con éxito un método especial: *designación de cierta combinación de funciones trigonométricas por una nueva incógnita y la solución de la ecuación para esta incógnita. Naturalmente, hay que tener una experiencia para ver una combinación apropiada.*

8. *Hallar todas las soluciones de la ecuación*

$$1 + \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2x.$$

Se comprende fácilmente que los miembros de la izquierda y de la derecha de esta ecuación se expresan por la suma y el producto $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Utilizando la identidad $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ escribiremos la ecuación considerada en forma de

$$1 + (\operatorname{sen} x + \cos x)(1 - \operatorname{sen} x \cos x) = 3 \operatorname{sen} x \cos x.$$

El producto $\operatorname{sen} x \cos x$ se expresa a su vez por la suma $\operatorname{sen} x + \cos x$ mediante una identidad trigonométrica [1].

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1.$$

Por eso, es natural designar la suma $\operatorname{sen} x + \cos x$ por y y escribir la ecuación inicial en forma de

$$1 + y - y \frac{y^2 - 1}{2} = 3 \frac{y^2 - 1}{2}.$$

De esta manera hemos llegado a una ecuación algebraica con la incógnita y. Agrupando todos sus términos del primer miembro y sacando $y + 1$ fuera de paréntesis, obtendremos la ecuación $(y + 1) \times (y^2 + 2y - 5) = 0$, que tiene tres raíces:

$$y_1 = -1, \ y_2 = -1 + \sqrt{6}, \ y_3 = -1 - \sqrt{6}.$$

La primera raíz conduce a la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \cos x = -1, \quad \text{o bien} \quad \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

[1] En ocasiones resulta útil la fórmula análoga $2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 - (\operatorname{sen} x - \cos x)^2$.

de donde obtenemos una serie de soluciones:

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En lo que se refiere a la segunda y tercera raíces, estas superan a $\sqrt{2}$ en su magnitud absoluta, mientras que

$$|\operatorname{sen} x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2},$$

y, por consiguiente, estas raíces no dan soluciones de la ecuación inicial.

9. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{tg}^2 2x+\operatorname{cotg}^2 2x+2\operatorname{tg} 2x+2\operatorname{cotg} 2x=6.$$

Notemos que $2\operatorname{tg} 2x \operatorname{cotg} 2x=2$, a razón de que se puede escribir la ecuación dada en forma de

$$(\operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x)^2+2(\operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x)-8=0.$$

Designando por z la suma $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x$ llegamos de tal modo a la ecuación de segundo grado $z^2+2z-8=0$, cuyas raíces son $z_1=-4$ y $z_2=2$. Ahora tenemos que considerar dos posibilidades correspondientes a cada una de estas raíces:

$$\operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x=-4 \text{ y } \operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x=2.$$

Mediante la sustitución de $\operatorname{cotg} 2x$ por $1/\operatorname{tg} 2x$ estas ecuaciones se reducen a las de segundo grado respecto a $\operatorname{tg} 2x$: a cada raíz de la ecuación de segundo grado le corresponde una serie de soluciones.

Si transformamos preliminarmente la suma de la tangente y la cotangente, se exigirán cálculos más fáciles para hallar la solución:

$$\operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x=\frac{2}{\operatorname{sen} 4x}.$$

En este caso la raíz z_1 nos conducirá a la ecuación $\operatorname{sen} 4x=-1/2$, de donde obtendremos la primera serie de soluciones

$$x_1=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4} \quad \text{para } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

y la raíz z_2, a la ecuación $\operatorname{sen} 4x=1$ que nos da la segunda serie

$$x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Es fácil convencerse de que todos los valores de ambas series pertenecen al RVA de la ecuación inicial.

A menudo, al resolver las ecuaciones trigonométricas, conduce a la solución la *agrupación* acertada de los términos. Sin embargo, a veces cuesta trabajo encontrar tal agrupación acertada: para esto es ha de buscar diferentes posibilidades.

10. *Resolver la ecuación*

$$4 \text{ sen } x + 2 \cos x = 2 + 3 \operatorname{tg} x.$$

A primera vista esta ecuación parece bastante sencilla aunque nos dará mucho que hacer. Notemos que el método de resolución con ayuda de la sustitución universal, que aparenta natural, en realidad conduce a la ecuación de cuarto grado respecto a $\operatorname{tg}(x/2)$.

Tratemos de agrupar los miembros de la ecuación considerada de tal modo que resulte una ecuación "desintegrante". Multiplicando todos los miembros de la ecuación inicial por $\cos x$ (naturalmente, en este caso se amplía el RVA y por eso al final deberá verificarse si resultan o no las raíces extrañas) y permutándolos al primer miembro, obtendremos

$$4 \text{ sen } x \cos x + 2 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 \text{ sen } x = 0.$$

¿Puede descomponerse el primer miembro de esta ecuación en factores? En todo caso, no es explícito cómo proceder, y hemos de poner a prueba diferentes variantes.

Es fácil convencerse de que la agrupación del primer término con el segundo, del tercero con el cuarto y del primero con el cuarto y del segundo con el tercero no sirve de nada. Tratemos de agrupar el primer término con el tercero y el segundo con el cuarto:

$$2 \cos x (2 \text{ sen } x - 1) + (2 \cos^2 x - 3 \text{ sen } x) = 0. \tag{7}$$

Luego, el segundo sumando en (7) puede escribirse en la forma de un trinomio de segundo grado (respecto a $\text{sen } x$): $2 \cos^2 x - 3 \text{ sen } x = 2 - 3 \text{ sen } x - 2 \text{ sen}^2 x$. Pero, el trinomio $2y^2 + 3y - 2$ se descompone fácilmente en factores: $2y^2 + 3y - 2 = (2y - 1)(y + 2)$. Por lo tanto, el segundo sumando de (7) se representa en forma de un producto: $2 \cos^2 x - 3 \text{ sen } x = -(2 \text{ sen } x - 1)(\text{sen } x + 2)$ y, por consiguiente, la ecuación puede anotarse así:

$$(2 \text{ sen } x - 1)(2 \cos x - \text{sen } x - 2) = 0.$$

Esta ecuación "se descompone" en una más simple, $\text{sen } x = 1/2$, de donde

$$x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ,$$

y en la ecuación $\text{sen } x - 2 \cos x = -2$ del tipo (1), de donde

$$x_2 = 2n\pi, \ x_3 = -2 \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + 2m\pi;$$
$$\text{para } n, \ m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

Todas las raíces de las tres series obtenidas entran en el RVA de la ecuación inicial, o sea, son sus soluciones.

11. *Resolver la ecuación*

$$\cos(\pi 3^x) - 2\cos^2(\pi 3^x) + 2\cos(4\pi 3^x) - \cos(7\pi 3^x) =$$
$$= \operatorname{sen}(\pi 3^x) + 2\operatorname{sen}^2(\pi 3^x) - 2\operatorname{sen}(4\pi 3^x) + 2\operatorname{sen}(\pi 3^{x+1}) - \operatorname{sen}(7\pi 3^x).$$

Para que la ecuación sea más evidente, designemos $\pi 3^x$ por y; entonces la ecuación considerada tomará una forma común:

$$\cos y - 2\cos^2 y + 2\cos 4y - \cos 7y =$$
$$= \operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen}^2 y - 2\operatorname{sen} 4y + 2\operatorname{sen} 3y - \operatorname{sen} 7y.$$

Después de permutar todos los términos al primer miembro y aplicar diferentes métodos de agrupación, puede hallarse como más aceptable:

$$(\cos y - \cos 7y) + (\operatorname{sen} 7y - \operatorname{sen} y) + 2(\cos 4y + \operatorname{sen} 4y) -$$
$$- 2(\cos^2 y + \operatorname{sen} y^2) - 2\operatorname{sen} 3y = 0,$$

de donde

$$2\operatorname{sen} 4y \operatorname{sen} 3y + 2\operatorname{sen} 3y \cos 4y + 2(\cos 4y + \operatorname{sen} 4y) -$$
$$-2(\operatorname{sen} 3y + 1) = 0. \quad (8)$$

Si ahora sacamos fuera del paréntesis $2\operatorname{sen} 3y$ de los primeros dos términos y comparamos la expresión obtenida con el tercer término, será evidente que estos tres términos se representan en forma de un producto de dos factores, uno de los cuales coincide con el último término de la ecuación (8). Por eso la ecuación (8) puede ser escrita en la forma descompuesta:

$$(\operatorname{sen} 3y + 1)(\operatorname{sen} 4y + \cos 4y - 1) = 0,$$

lo que da la posibilidad de escribir tres series de sus soluciones:

$$y_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad y_2 = \frac{n\pi}{2}, \quad y_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{2};$$

donde k, n, m son los números enteros arbitrarios.

Al recordar que $y = \pi 3^x$, llegaremos a un número infinito de ecuaciones para determinar las raíces de la ecuación inicial:

$$\left.\begin{array}{ll} 3^x = -\frac{1}{6} + \frac{2k}{3} & \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \\ 3^x = \frac{\pi}{2} & \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \\ 3^x = \frac{1}{8} + \frac{m}{2} & \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{array}\right\} \quad (9)$$

Es decir, *cualquier* valor de x que satisface a la primera ecuación (9) para *cierto valor entero de k*, es la solución de la ecuación inicial.

Por consiguiente, tenemos que hallar todas las soluciones de la primera ecuación (9) para cada valor entero de k. Lo mismo ocurre con las dos ecuaciones restantes (9).

Algunos estudiantes no comprenden el sentido de las expresiones obtenidas (9) considerándolas como un sistema de ecuaciones, esto es, buscando sólo aquellos valores de x que (para ciertos números enteros de k, n, m) satisfagan a la vez tres ecuaciones (9). A veces se cometen errores cuando se determinan las raíces de las ecuaciones (9). De vez en cuando, las raíces de estas ecuaciones se escriben formalmente (por ejemplo, se afirma que las raíces de la primera ecuación (9) "son los números $\log_3 [(-1/6)+(2k/3)]$, donde k es un número entero cualquiera"), sin recurrir a un análisis correcto y necesario para aquellos valores de k, n, m (como números enteros) para los cuales las ecuaciones (9) tienen soluciones.

Entre tanto, antes de resolver las ecuaciones (9) hay que recordar que la ecuación $3^x = a$ tiene una sola solución (única) para *a positiva*, que se anota por la fórmula $x = \log_3 a$. Por eso, las ecuaciones (9) sólo tienen soluciones para los valores de k, n, m (enteros) cuando los segundos miembros correspondientes de las relaciones (9) son positivos. Es fácil ver que el segundo miembro de la primera ecuación (9) es positivo para $k > 0$ *enteros*; el segundo miembro de la segunda ecuación (9), para $n > 0$ *enteros*; el segundo miembro de la tercera ecuación (9) para $m \geqslant 0$ *enteros*. De tal modo, sólo para los valores indicados de k, n, m podemos resolver las ecuaciones (9); los valores de x, obtenidos como resultado de lo expuesto, son precisamente soluciones de la ecuación inicial:

$$x = \log_3 \left(-\frac{1}{6} + \frac{2k}{3}\right) \quad \text{para } k = 1,\ 2,\ \ldots;$$

$$x = \log_3 \frac{n}{2} \quad \text{para } n = 1,\ 2,\ \ldots;$$

$$x = \log_3 \left(\frac{1}{8} + \frac{m}{2}\right) \quad \text{para } m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

A menudo nos encontramos con problemas en que se exige buscar no todo el conjunto de raíces de una ecuación trigonométrica sino aquéllas que satisfagan las condiciones complementarias indicadas en el problema (por ejemplo, cuales se hallan entre los límites determinados).

Estos problemas pueden resolverse del modo siguiente: se escriben todas las raíces de la ecuación que se tienen que resolver, y después se escogen aquéllas para las cuales se verifican las condiciones complementarias. Por lo demás, a veces resulta más fácil prescindir las soluciones de la ecuación, hallando inmediatamente las necesarias.

12. *Hallar todas las soluciones de la ecuación*

$$\sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0, \tag{10}$$

comprendidas entre π y $3\pi/2$.

Esta ecuación se puede resolver elevándola al cuadrado, pero en este caso, al final de la resolución tendremos que omitir todas las raíces extrañas y de las que queden, escoger aquéllas que satisfagan la desigualdad $\pi<x<3\pi/2$. Vamos a elegir otro método de solución.

Dado que $\sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}=|\operatorname{sen} x+\cos x|$, la ecuación (10) puede escribirse así:

$$|\operatorname{sen} x+\cos x|-\sqrt{2}\cos 3x=0.$$

Para resolver esta ecuación hay que deshacerse del módulo. Sin embargo, no hay que considerar todos los casos posibles. En efecto, debemos hallar sólo aquellas raíces de esta ecuación que satisfagan la desigualdad $\pi<x<3\pi/2$. Pero, el seno y el coseno son negativos en el tercer cuadrante (¡en el intervalo que nos interesa!), a consecuencia de lo cual la ecuación inicial se reduce a la forma

$$(\operatorname{sen} x+\cos x)+\sqrt{2}\cos 3x=0,$$

o bien, una vez realizadas las transformaciones evidentes,

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)\text{o}\,\text{cs}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=0.$$

Luego, se describen en la forma habitual las series de soluciones se esta ecuación "desintegrante" escogiendo de estas series aquellas daíces que se encuentran entre π y $3\,\pi/2$. Se puede proceder también rin estos cálculos obteniendo de inmediato la respuesta que nos interesa.

En realidad, examinemos primeramente la ecuación $\cos[2x-(\pi/8)]=0$, o buen, designando $2x-(\pi/8)$ por t, la ecuación $\cos t=0$. Nos interesan sólo los valores de x que satisfacen la desigualdad $\pi<x<3\pi/2$; de aquí se deduce que

$$2\pi-\frac{\pi}{8}<2x-\frac{\pi}{8}<3\pi-\frac{\pi}{8}.$$

De esta manera, para nosotros sólo son necesarias las raíces de la ecuación $\cos t=0$ que están comprendidas entre $2\pi-(\pi/8)$ y $3\pi-(\pi/8)$. Recurriendo a la gráfica de la función $y=\cos t$ (fig. 56) es fácil convencerse de que en este intervalo el coseno se convierte en cero una sola vez: en el punto $t=5\pi/2$. Por lo tanto,

$$2x-\frac{\pi}{8}=\frac{5\pi}{2}, \quad \text{de donde} \quad x=\frac{21\pi}{16}.$$

Del mismo modo nos convenceremos de que entre π y $3\pi/2$ hay un solo valor de x, a saber: $x = 11\,\pi/8$, que satisface la ecuación $\cos\,[x + (\pi/8)] = 0$.

Muy a menudo se tiene que recurrir al método de escoger las soluciones de una ecuación trigonométrica cuando ésta se obtiene de una ecuación inicial de tipo "combinado" (por ejemplo, de una ecuación que comprende funciones logarítmicas y trigonométricas). En estos casos, las desigualdades que determinan el RVA de la ecuación inicial hacen el papel de condiciones "complementarias".

13. *Resolver la ecuación*

$$\log_{\frac{-x^2-6x}{10}}(\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x) = \log_{\frac{-x^2-6x}{10}} \operatorname{sen} 2x. \qquad (11)$$

Se eliminan inmediatamente los logaritmos que participan en el enunciado del problema, pero, sería un error grave afirmar que la ecuación inicial es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x, \qquad (12)$$

porque el paso de (11) a (12) *ensancha* el RVA y por eso entre las soluciones de la ecuación (12) pueden encontrarse extrañas.

Por consiguiente, según la afirmación B del § 9, Parte I, para resolver la ecuación inicial (11) es suficiente resolver la ecuación (12)

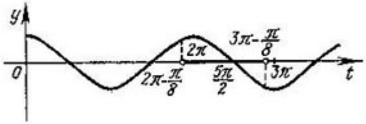


Fig. 56

y tomar sólo aquellas soluciones que entran en el RVA de la ecuación (11), es decir, que satisfacen a las desigualdades

$$\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x > 0,\ \ \operatorname{sen} 2x > 0,\ \ -6 < x < 0 \qquad (13)$$

(¡obtenga estas desigualdades usted mismo!).

La ecuación (12) se escribe inmediatamente en forma de $2\ \operatorname{sen} \times \times 2x \cos x = \operatorname{sen} 2x$. Ya que $\operatorname{sen} 2x > 0$ en el RVA de la ecuación inicial (véase (13)), al realizar la reducción por $\operatorname{sen} 2x$, obtenemos la ecuación $\cos x = 1/2$, de donde

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ para } k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

De estas soluciones tenemos que escoger precisamente aquéllas que satisfacen las condiciones (13).

En este caso será más cómodo examinar dos series de soluciones de las ecuaciones (12), en lugar de una sola fórmula obtenida para las raíces:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi \qquad \text{para } n,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y para cada una de éstas hallar por separado los valores (enteros) de n y m para los cuales las raíces correspondientes satisfagan las tres desigualdades (13).

Primeramente examinemos la primera serie x_1. La más "fuerte" de las restricciones (13) es, evidentemente, la tercera; por esta razón empezaremos por ésta: esto nos dará la posibilidad de realizar una gran "depuración" entre las soluciones.

Para la primera serie de soluciones de la ecuación (12), la tercera de las desigualdades (13) tiene la forma de

$$-6 < \frac{\pi}{3} + 2n\pi < 0; \tag{14}$$

no debemos olvidar que nos interesan solamente las soluciones en *números enteros* de esta desigualdad. Es más fácil hallar estas soluciones mediante la solucción directa. Es comprensible que para cualquier número entero $n \geqslant 0$ el miembro medio de la desigualdad (14) es positivo, y por eso ningún valor entero no negativo de n satisface esta desigualdad. Luego, para cualquier número entero $n \leqslant -2$ tenemos (teniendo en cuenta que $\pi > 3$):

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi \leqslant \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3} < -\frac{11 \cdot 3}{3} = -11 < -6,$$

es decir, ninguno de los valores de número entero de $n \leqslant -2$ satisface la desigualdad (14). Por consiguiente, nos queda por comprobar si el valor de $n = -1$ satisface la desigualdad (14). Ya que con este valor de n el miembro medio de la desigualdad (14) es, evidentemente, negativo y ya que (en vigor de que $\pi < 3,2$)

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} > -\frac{5 \cdot 3,2}{3} = -5\frac{1}{3} > -6,$$

está claro que el valor de $n = -1$ satisface la desigualdad (14).

Así, de toda la primera serie x_1 de soluciones de la ecuación (12) un solo valor de $x^* = -5\pi/3$ satisface la tercera desigualdad (13). La verificación directa demuestra que este valor satisface también dos [1] otras desigualdades (13), o sea, $x^* = -5\pi/3$ es la raíz de la ecuación inicial (11).

---

[1] Mientras tanto, es suficiente efectuar esta verificación para establecer solamente la desigualdad $\operatorname{sen} 2x^* > 0$. Si recordamos luego que x^* es la raíz de la ecuación (12), es decir, $\operatorname{sen} 3x^* + \operatorname{sen} x^* = \operatorname{sen} 2x^*$, será evidente que la desigualdad $\operatorname{sen} 3x^* + \operatorname{sen} x^* > 0$ resulta de la desigualdad $\operatorname{sen} 2x^* > 0$.

Análogamente podríamos examinar la segunda serie x_2 de las soluciones de la ecuación (12), pero llegaremos más rápidamente a la finalidad si comprobamos al principio la segunda de las desigualdades (13). Esta comprobación demuestra que ninguna de las raíces de la segunda serie x_2 satisface la condición sen $2x > 0$ y, por consiguiente, no es una raíz de la ecuación (11).

Se encuentran problemas en los cuales se tienen que escoger también raíces de las ecuaciones trigonométricas, pero por otra causa: hay que hallar sólo aquellas soluciones que son *comunes*, por ejemplo, para *dos* ecuaciones trigonométricas.

14. *Resolver la ecuación* sen $7x + \cos 2x = -2$.

A primera vista puede parecer que este problema no tiene nada de particular. No obstante, a medida que realizamos las transformaciones se esclarece que esta ecuación es de un carácter excepcional: ésta no "se descompone en varias ecuaciones simples, sino se reduce a *un sistema de dos ecuaciones trigonométricas (simplísimas) con una incógnita.*

Escribiendo la ecuación inicial en la forma

$$\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right)\right] + \left[(1 + \cos 2x)\right] = 0$$

y transformando cada uno de los términos entre corchetes, obtendremos la correlación

$$\cos^2\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2 x = 0. \qquad (15)$$

Como se sabe, la suma de cuadrados de dos magnitudes es igual a cero cuando y sólo cuando ambas estas magnitudes son iguales a cero. Por consiguiente, la ecuación inicial *es equivalente al sistema* de dos ecuaciones con una incógnita

$$\left\{\begin{aligned} \cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) &= 0, \\ \cos x &= 0. \end{aligned}\right. \qquad (16)$$

Hace falta, por lo tanto, obtener todas las soluciones del sistema (16), es decir, todas las x, que satisfacen ambas ecuaciones de este sistema.

La primera ecuación del sistema (16) tiene una serie de raíces

$$x = \frac{3\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7} \quad \text{para } k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots,$$

mientras que la segunda,

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{para } n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots ;$$

es necesario elegir todos los valores de x que pertenecen, a la vez a estas dos series (es decir, hay que hallar todos los valores de x que se obtengan para cierto k entero de la primera serie y para algún n entero de la segunda).

Para eso es conveniente hacer uso del círculo trigonométrico[1] Marquemos con puntos los valores de x que pertenecen a la primera serie para $k=0, 1, 2, \ldots, 6$ (fig. 57). Se ve que los puntos que representan los demás valores de x de esta serie (para los demás valores de k), se reiteran dentro de siete unidades (por ejemplo, el punto que corresponde al valor de x para $k=9$ coincide con el punto correspondiente al valor de x para $k=2$, etc.). Los valores de x de la segunda serie se marcan con cruces para $n=0, 1$; los puntos que corresponden a los demás valores de n se repiten dentro de dos unidades.

De la fig. 57. se deduce que las series a examinar tienen como comunes aquellos valores de x a los cuales les corresponden el extremo

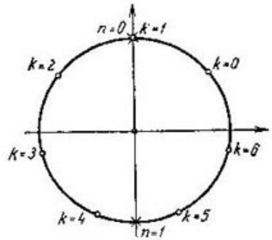


Fig. 57

superior del diámetro vertical; estos valores se obtienen de la segunda serie para $n=2p$, siendo $p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y de la primera, para $k=7q+1$, cuando $q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

De esa manera, la solución del sistema (16) y, por consiguiente de la ecuación inicial es siguiente:

$$x=\frac{\pi}{2}+2p\pi, \quad \text{siendo } p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En la resolución efectuada se ha utilizado la transformación de la ecuación inicial en la forma (15). Sin embargo, no es difícil comprender cómo pasar sin tal transformación.

En efecto, examinemos atentamente la ecuación inicial. Su primer miembro es la suma del seno y del coseno, mientras que el segundo, un número,— 2. Pero, según las propiedades del seno y del coseno, las desigualdades $\operatorname{sen} 7x \geqslant -1$, $\cos 2x \geqslant -1$, son válidas para toda x, de donde al sumar estas desigualdades, obtenemos $\operatorname{sen} 7x + \cos 2x \geqslant -2$. Por lo tanto, la ecuación inicial se satisface úni-

[1] La selección de los valores de x que pertenecen a ambas series indicadas es posible realizarla del todo analíticamente (sin utilizar el círculo trigonométrico), es decir, aplicando el método usado en el problema 4 del § 2, Parte 1.

camente en el caso de que cada uno de *ambos* sumandos de su primer miembro sean iguales a -1, es decir, cuando x satisfaga *simultáneamente* a las dos ecuaciónes

$$\operatorname{sen} 7x = -1, \quad \cos 2x = -1.$$

Tenemos de nuevo el sistema de dos ecuaciones con una incógnita: su resolución puede practicarse como en el caso del sistema (16).

15. *Resolver la ecuación*

$$2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x. \tag{17}$$

Después de las transformaciones elementales, la ecuación a examinar se reduce a la forma siguiente:

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen} 2x = 1,$$

o

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2. \tag{18}$$

Se obtiene la ecuación del mismo género que ha sido analizada en el ejemplo precedente; sin ninguna dificultad el lector efectuará por sí mismo, los razonamientos posteriores.

No obstante, al considerar atentamente la ecuación (18) puede concebirse la idea de que la utilización acertada de las propiedades de las funciones trigonométricas permite no realizar transformaciones que están demás. Aquí, para encontrar la solución, conviene tomar en consideración que el seno de cualquier argumento no supera a la unidad por su valor absoluto.

Por lo tanto, el producto del primer miembro de la ecuación (18) puede ser igual a 1 solamente en dos casos: cuando cada uno de los factores es igual a 1, o cuando cada uno de ellos es igual a -1. De ese modo, el número x será una raíz de la ecuación cuando y sólo cuando este número satisfaga *uno* de los *dos* sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \operatorname{sen} 2x = 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1, \\ \operatorname{sen} 2x = -1. \end{cases}$$

Examinemos el primer sistema. De su segunda ecuación tenemos: $x = \pi/4 + k\pi$, para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Sustituyendo estos valores de x en su primera ecuación, obtenemos $\operatorname{sen}[(\pi/2) + k\pi] = 1$, lo que es válido solamente cuando los valores de k son *pares*, es decir, para $k = 2n$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Por lo tanto, como soluciones del primer sistema serán: $x = \pi/4 + 2n\pi$, donde n es un número entero cualquiera.

En el caso de resolver del mismo modo el segundo sistema nos cercioramos de que el último no tiene soluciones. Por consiguiente, las soluciones halladas del primer sistema son raíces de la ecuación inicial.

Sin embargo, la solución más corta de la ecuación (17) se obtiene como resultado del empleo acertado de las desigualdades. Su segundo miembro, por su valor absoluto para cualquier valor de x (admisible), es más o igual a 2, mientras que la magnitud absoluta de su primer miembro no supera a 2. De ahí, la ecuación (17) puede satisfacerse sólo para los valores de x, con los cuales *ambos miembros* de la ecuación (17) son iguales a 2 ó -2. Examinemos estas posibilidades.

El segundo miembro de la ecuación (17) será igual a 2, si $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x = 1$, es decir, en caso de $x = (\pi/4) + k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ El primer miembro de la (17) tomará este valor cuando $x = \pi/4 + 2n\pi$, siendo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ El termino generae de estas dos series, precisamente, los valores de $x = \pi/4 + 2n\pi$, donde n es un número entero cualquiera, da las raíces de la ecuación (17).

A continuación. El segundo miembro de la ecuación (17) es igual a -2 cuando $x = 3\pi/4 + n\pi$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Sin embargo, con estos valores de x el primer miembro de la ecuación (17) es igual a cero y por lo tanto esta ecuación no se satisface.

Las ecuaciones trigonométricas, que además de las incógnitas contienen *parámetros* componen un grupo especial. Al resolver estos problemas, ante todo, hace falta encontrar los valores de los parámetros para los cuales *existen* soluciones. Sin duda, hay que hallar también mismas soluciones (en función de los parámetros).

Aunque, al resolver los problemas con los parámetros, no son necesarios algunos conocimientos complementarios, los razonamientos requeridos, a veces, pueden manifestar ciertas dificultades lógicas y técnicas.

16. *Hallar todas las soluciones reales de la ecuación*

$$\operatorname{sen} x + \cos(a + x) + \cos(a - x) = 2$$

para cada número real.

Sumando el segundo y tercero término del primer miembro, obtenemos inmediatamente la ecuación del tipo (1):

$$\operatorname{sen} x + 2 \cos a \cos x = 2.$$

Es natural que hay que resolverla con ayuda del método de la introducción del ángulo auxiliar; no obstante, es necesario tener en cuenta diversas posibilidades que surgen para distintos valores del parámetro a.

Es posible escribir las condiciones que determinan el ángulo auxiliar de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\cos^2 a}}, \quad \cos \beta = \frac{2\cos a}{\sqrt{1 + 4\cos^2 a}}; \tag{19}$$

en este caso la última ecuación se reduce a la siguiente

$$\cos(x-\beta)=\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}. \tag{20}$$

Como se sabe, esta ecuación tiene sus raíces solamente si el segundo miembro no supera a 1 por su módulo. Sin embargo, ya que este miembro es positivo (¡raíz aritmética!) para cualquier parámetro a, la ecuación (20) tiene sus soluciones sólo para los valores del a, que satisfacen la desigualdad

$$\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\leqslant 1$$

(para los demás valores de a la ecuación (20) no tiene raíces).

No es difícil resolver esta desigualdad (véase el § 8, Parte I): ésta se reduce a la forma siguiente: $\cos^2 a\geqslant 3/4$, de donde,

$$-\pi/6+k\pi\leqslant a\leqslant\pi/6+k\pi,\ \text{donde}\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{21}$$

Así, la ecuación (20) y la ecuación inicial también *tienen soluciones solamente para los valores de a que satisfacen la condición* (21).

Ya es fácil hallar las mismas soluciones de la ecuación (20) (y, por lo tanto, de la ecuación inicial) correspondientes a todo valor de a que satisface la condición (21):

$$x=\beta\pm\arccos\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}+2n\pi,$$
$$\text{siendo}\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;$$

aquí hace falta sólo sustituir la expresión del ángulo auxiliar β.

Muchos estudiantes, sin razonamientos especiales, aplicando las relaciones (19), toman para β la expresión que se obtiene de la primera fórmula (19):

$$\beta=\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}.$$

Pero el ángulo β que se determina por esta igualdad satisface la segunda de las condiciones (19) no para todo valor del parámetro a. En realidad, este ángulo se encuentra en el primer cuadrante (ya que bajo el signo del arco seno se halla la expresión positiva para todos los valores de a) y por lo tanto, su coseno será también positivo para todos los valores del parámetro a. Entretanto la segunda fórmula (19) muestra que si $\cos a<0$, el coseno del ángulo auxiliar debe ser negativo.

Para elegir la expresión necesaria del ángulo auxiliar β puede ayudarnos el razonamiento siguiente. Ya que sen β es siempre positivo (lo que se ve de la primera fórmula (19)), por lo tanto, es posible tomar el mismo ángulo β en el primero o segundo cuadrante. Pero, precisamente, en estos cuadrantes se encuentra el arco coseno.

Por eso, como el ángulo auxiliar es posible tomar

$$\beta = \arccos \frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}.$$

Este ejemplo muestra que para los problemas con parámetro es imposible tener éxito en cada intento de elegir el ángulo auxiliar de manera que éste se encuentre en el primer cuadrante y se exprese por una fórmula que sería válida para *todos* los valores del parámetro

17. *Hallar todas las soluciones de la ecuación*

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)\operatorname{sen} 2x = a(\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x),$$

que se sitúan entre $\pi/2$ *y* π. *¿Para qué* a *esta ecuación no tiene más de una solución que satisfaga la condición* $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$?

La ecuación dada puede ser escrita de una vez, en la forma "descomponente":

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} 2x - a + a \operatorname{sen} x \cos x) = 0,$$

debido a que siempre (es decir, para todo el valor del parámetro a) se tiene *por lo menos una* raíz que se encuentre en el intervalo a examinar $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$, o sea, la raíz $x = 3\pi/4$ de la ecuación $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$.

Luego, hace falta hallar las demás soluciones de la ecuación inicial, es decir, las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x - a + a \operatorname{sen} x \times \cos x = 0$ ó $(2+a) \operatorname{sen} 2x = 2a$.

Para todo valor del parámetro a distinto de -2, esta ecuación puede adoptar la forma siguiente

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2a}{2+a}. \tag{22}$$

Sin embargo, solamente tienen interés las raíces de x que se encuentren entre $\pi/2$ y π. En este caso $\pi < 2x < 2\pi$, por lo tanto, $\operatorname{sen} 2x$ debe ser no positivo y no debe ser menor que -1. En consecuencia, la ecuación (22) tiene raíces entre $\pi/2$ y π sólo para los valores del parámetro $a \neq -2$ para los cuales

$$-1 \leqslant \frac{2a}{2+a} \leqslant 0. \tag{23}$$

Esta desigualdad se resuelve fácilmente: $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$.

De ese modo, para cada valor de a que satisface la condición $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$, la ecuación (22) tiene raíces entre $\pi/2$ y π; para los demás valores de a distintos de -2 no hay tales raíces.

Ahora es necesario hallar las mismas raíces de x de la ecuación (22) que se encuentran en el intervalo de $\pi/2$ a π, considerando que $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$. Para esto $2x$ se denomina con y, y la ecuación (22) toma la forma $\operatorname{sen} y = 2a/(2+a)$; determinemos las raíces de y de esta ecuación (para $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$) que satisfacen la condición

$\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$. Ya que en virtud de la desigualdad (23), el ángulo

$$\alpha = \text{arc sen}\,\frac{2a}{2+a}$$

se sitúa entre $-\pi/2$ y 0 (véase el § 5, Parte II), es fácil entender, utilizando el círculo trigonométrico (fig. 58), que la ecuación sen $y = 2a/(2+a)$ tiene sólo dos soluciones que satisfacen la condición $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$' a saber:

$$y_1 = \pi - \text{arc sen}\,\frac{2a}{2+a} \quad \text{e} \quad y_2 = 2\pi + \text{arc sen}\,\frac{2a}{2+a}.$$

Por lo tanto, como raíces de (22) (para $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$) que se encuentran en el intervalo $\pi/2$ π, serán

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{2a}{2+a}, \quad x_2 = \pi + \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{2a}{2+a}.$$

Así, pues, para $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$, satisfacen la ecuación inicial tres números: $3\pi/4$, x_1 y x_2. A pesar de esto, no hay ninguna razón para considerar que la ecuación inicial con cada valor de a en el intervalo

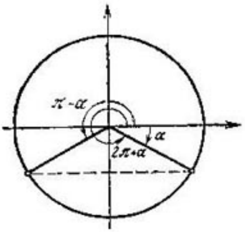


Fig. 58

indicado tiene *más* de una raíz: quizá, para algunos de estos valores de a, $x_1 = x_2 = 3\pi/4$. Precisamente, esto tiene lugar cuando $a = -2/3$ y sólo cuando a tiene este valor, de lo que es fácil cerciorarse directamente.

Por consiguiente, si $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$, la ecuación inicial tiene tres raíces en el intervalo $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$, a saber $3\pi/4$, x_1, x_2; para otros valores de a, además de $a = -2$, esta ecuación tiene sólo una raíz $3\pi/4$.

Señalemos que ahora hace falta examinar el último caso cuando $a = -2$. Con este valor del parámetro a es imposible analizar la ecuación (22) y debe examinarse la ecuación $(2 + a)$ sen $2x = 2a$ la cual (para $a = -2$) obtiene la forma siguiente: $0 = -4$. Como esta ecuación no tiene raíces, la ecuación inicial sólo tiene una raíz $3\pi/4$ en el intervalo entre $\pi/2$ y π cuando $a = -2$.

EJERCICIOS:

1. ¿Qué relación existe entre los ángulos α y β si es conocido que a) $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$; b) $\cos\alpha = \cos\beta$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$; d) $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$?

2. Estudiar las posibilidades de resolver la ecuación $a \operatorname{sen} x + b\cos x = c$.

Resolver las ecuaciones:

3. $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{tg}(\pi/6)\cos 2x = 1$.
4. $\operatorname{sen}[2x-(\pi/2)] + \cos[2x-(\pi/12)] = \sqrt{2}\cos[3x+(\pi/6)]$.
5. $\operatorname{sen} 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\operatorname{sen} 6x + \cos 8x)$.
6. $\operatorname{sen} 3x + 4\operatorname{sen}^3 x + 4\cos x = 5$.
7. $2\operatorname{sen} 4x - 3\operatorname{sen}^2 2x = 1$.
8. $-2 + 4\cos^2 z = \cos z + \sqrt{3}\operatorname{sen} z$.
9. $2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 - \cos(\pi\operatorname{sen} 2x)$.
10. $\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{cotg} x} = 2\operatorname{sen} x$.
11. $2\left[1-\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\right] = \sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi-x}{2}$.
12. $3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x = 0$.
13. $\operatorname{cotg}[(\pi/4)-x] = 5\operatorname{tg} 2x + 7$.
14. $2\cos 2x + \operatorname{sen} 3x - 2 = 0$.
15. $\dfrac{7}{4}\cos\dfrac{x}{4} = \cos^3\dfrac{x}{4} + \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$.
16. $\operatorname{tg} x = (2+\sqrt{3})\operatorname{tg}(x/3)$.
17. $\cos(10x+12) + 4\sqrt{2}\operatorname{sen}(5x+6) = 4$.
18. $\operatorname{cotg}^3\left(\dfrac{\pi-\pi x}{1+x}\right) - \sqrt{3}\operatorname{cotg}^2\left(\dfrac{\pi-\pi x}{1+x}\right) = 6\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi-\pi x}{1+x}\right)$.
19. $4\operatorname{sen}^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$.
20. $\operatorname{sen} 3t \cos t = 3/2 \operatorname{tg} t$.
21. $\left(2\operatorname{sen}^4\dfrac{x}{2} - 1\right)\dfrac{1}{\cos^4\dfrac{x}{2}} = 2$.
22. $\operatorname{sen}^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{16}\cos^2 2x$.
23. $\operatorname{sen}^6 2x + \cos^6 2x = 7/16$.
24. $\cos^2 x + \cos^2(3x/4) + \cos^2(x/2) + \cos^2(x/4) = 2$.
25. $\operatorname{sen} y + \cos 3y = 1 - 2\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} 2y$.
26. $\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 6x = 1/4 \operatorname{sen} 4x$.
27. $\cos^2(x-\gamma) + \cos^2(0{,}5x+\beta-\gamma) - 2\cos(0{,}5-\beta)\times$
$\times\cos(x-\gamma)\cdot\cos(0{,}5x+\beta-\gamma) = {}^3/_4$.
28. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x + \ldots + \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} n^2x = 1$.
29. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x = 0$.
30. $\operatorname{sen} x \cos 2x + \operatorname{sen} 2x \cos 5x = \operatorname{sen} 3x \cos 5x$.
31. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} + 2\operatorname{tg} x = 0$.

32. $\cos x + \operatorname{sen} x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x}$.

33. $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x + 2\cos x = \operatorname{sen} 2x + 2\cos^2 x$.

34. $(2/\sqrt{3})(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x - 2$.

35. $\sqrt{17\sec^2 x + 16(1/2\operatorname{tg} x \sec x - 1)} = 2\operatorname{tg} x(1 + 4\operatorname{sen} x)$.

36. $\sqrt{\dfrac{1}{16} + \cos^4 x - \dfrac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\dfrac{9}{16} + \cos^4 x - \dfrac{3}{2}\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}$.

37. $\operatorname{sen}(5\pi 2^x) + \operatorname{sen}(\pi 2^x) - 2\operatorname{sen}(3\pi 2^x) = 8\operatorname{sen}^2(\pi 2^x) + 2\cos(3\pi 2^x) - \cos(\pi 2^x) - \cos(5\pi 2^x)$.

38. $2\cos^2(\pi 4^x) - \operatorname{sen}(\pi 4^{x+1}) + \operatorname{sen}(\pi 4^{x+1/2}) - 2\cos(\pi 4^{x+1/2}) = 0$.

39. $6\operatorname{tg} x + 5\operatorname{cotg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

40. $5(\operatorname{sen} x + \cos x) + \operatorname{sen} 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \operatorname{sen} 2x)$.

41. Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \pi/8 \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 0,$$

que se encuentran en el intervalo y $5\pi/2$ entre $7\pi/2$.

42. Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$\frac{\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}}{\cos x} = 4\operatorname{sen} x,$$

que se encuentran entre 0 y 2π.

Resolver las ecuaciones:

43. $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 7x = 1$.

44. $\log_{\frac{6x - x^2}{11}}(-\cos x - \cos 3x) = \log_{\frac{6x - x^2}{11}}(-\cos 2x)$.

45. $\log_{\frac{9x - x^2 - 14}{7}}(\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x) = \log_{\frac{9x - x^2 - 14}{7}} \cos 2x$.

46. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x = 2$.

47. $\cos x - \operatorname{sen} 3x = -2$.

48. $\operatorname{sen}(5x/2) - \operatorname{sen}(x/2) = 2$.

49. $\cos x \cos 6x = -1$.

50. $(\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x)\operatorname{sen} 3x = 2$.

51. $\cos(\pi\sqrt{x})\cos(\pi\sqrt{x - 4}) = 1$.

52. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 7x = 1$.

53. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{sen} x$.

54. Demostrar que la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \ldots + \operatorname{sen} nx = n - 1$$

para todo número entero $n > 2$ no tiene soluciones.

55. ¿Para qué valores de a la ecuación

$$4\operatorname{sen}(x + \pi/3)\cos(x - \pi/6) = a^2 + \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x - \cos 2x$$

tiene sus soluciones? Hallar estas soluciones.

56. ¿Qué valores de a dan soluciones de la ecuación $a^2 - 2a + \sec^2 \pi(a + x) = 0$? Hallar estas soluciones.

57. ¿Con qué valores de a la ecuación $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - a = 0$ tiene soluciones? Hallar qué soluciones se encuentran entre los límites $0 \leqslant x < 2\pi$.

58. Resolver la ecuación $\operatorname{sen} 4x = m\operatorname{tg} x$, $m > 0$.

59. ¿Para qué valores de b la ecuación

$$\frac{b\cos x}{2\cos 2x-1}=\frac{b+\operatorname{sen} x}{(\cos^2 x-3\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{tg} x}\cdot$$

tiene soluciones? Hallar estas soluciones.

60. ¿Qué valores de a proporcionan las soluciones de la ecuación

$$\frac{a^2}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+a^2-2}{\cos 2x}?$$

Hallar estas soluciones.

§ 4. SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

A veces es necesario resolver sistemas de ecuaciones trigonométricas. Resolver este sistema no es otra cosa (según la determinación algebraica general de la resolución de un sistema de ecuaciones) que *hallar todos los conjuntos de valores de las incógnitas que convierten al mismo tiempo todas las ecuaciones del sistema en igualdades numéricas justas.*

Por lo común, al resolver sistemas trigonométricos, se elimina una de las incógnitas, expresándola con ayuda de las otras de una ecuación del sistema, o un sistema trigonométrico se reduce al sistema de ecuaciones algebraicas mediante la introducción acertada de nuevas incógnitas, o transformando las ecuaciones del sistema.

Es natural que en caso de resolver sistemas de ecuaciones trigonométricas no deben perderse soluciones y hay que omitir soluciones extrañas si éstas aparecen.

La resolución de los sistemas trigonométricos no exige métodos o conocimientos especiales que no formen parte del curso general de la trigonometría. No obstante, estos problemas están vinculados con algunas dificultades específicas. Una de estas dificultades está relacionada con el hecho de que estos sistemas tienen como regla *un número infinitamente grande de soluciones*. Por lo tanto, la representación correcta del conjunto de los valores de las incógnitas que forman la solución y también la elección de las soluciones debidas, etc., pueden ser dificultadas por la necesidad de examinar distintos casos o resolver desigualdades auxiliares.

1. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg} y,\\ x-y=\pi/6.\end{cases}$$

La segunda ecuación del sistema a examinar permite fácilmente expresar una incógnita por la otra. Esto sugiere la idea de que es mejor resolver el sistema sustituyendo directamente una incógnita, después de lo cual el sistema se reduce a una ecuación trigonométrica "ordinaria".

No importa qué incógnita se elimina; sustituimos y. Ya que $y = x - (\pi/6)$, la sustitución en la primera ecuación proporciona una ecuación trigonométrica respecto a x:

$$\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

El primer miembro de esta ecuación se transforma con facilidad en la forma tg $[(\pi/4) - x]$ después de lo cual mediante la fórmula de la diferencia de tangentes, se obtiene la ecuación

$$\operatorname{sen}\left(2x - \frac{5\pi}{12}\right) = 0, \text{ de donde } 2x - \frac{5\pi}{12} = k\pi, \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Por consecuencia, las soluciones del sistema inicial son las siguientes:

$$x = \frac{5\pi}{24} - \frac{k\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{24} - \frac{k\pi}{2}, \text{ siendo } k = 0, \pm 1, \pm 2 \ \ldots$$

La comprobación que aquí es indispensable, demuestra que todos los pares de los valores obtenidos de x e y satisfacen el sistema inicial. Subrayamos que a cada número entero k le corresponde *el par* de los valores de x e y, o sea, *la solución* del sistema inicial. Este par se calcula por aquellas fórmulas. El sistema en cuestión tiene un número infinitamente grande de soluciones.

2. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} - \operatorname{cotg}\frac{z}{2} = 0, \\ \cos(x - y - z) = 1/2, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

La última ecuación del sistema permite inmediatamente sustituir z. Precisamente, poniendo $z = \pi - (x + y)$ en las dos primeras ecuaciones obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}, \\ \cos 2x = -1/2. \end{cases} \tag{1}$$

La segunda ecuación de este sistema se resuelve en seguida

$$x = \pm \pi/3 + k\pi, \text{ donde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2}$$

Parece que es natural poner esta expresión para x en la primera ecuación (1) y, por lo tanto, reducir el sistema (1) a una ecuación. Sin embargo, este procedimiento nos conduce a una ecuación trigonométrica, bastante incómoda respecto a y (aunque, sin duda, es posible resolverla).

Por esto, conviene elegir otro método, es decir, transformar la primera ecuación del sistema (1). Convirtiendo el primer miembro de acuerdo con la fórmula de la suma de tangentes, después de transformaciones evidentes obtenemos la correlación siguiente:

$$\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\right)=0. \tag{3}$$

Igualando el primer factor a cero, obtenemos la correlación algebraica entre x e y:

$$x+y=2n\pi, \text{ donde } n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

Ahora, aplicando las expresiones para x y z, es fácil obtener la primera serie de los valores de las incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} &x_1=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, && \text{siendo } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ &y_1=\mp\frac{\pi}{3}+(2n-k)\pi, && \text{siendo } n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ &z_1=\pi-2n\pi. && \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Igualemos el segundo factor del primer miembro (3) a cero. Por medio de la fórmula del coseno de suma (coseno suma), tenemos la correlación siguiente: sen $(x/2)$ sen $(y/2)=0$. Pero, en virtud de (2), sen $(x/2)\neq 0$, y por lo tanto, sen $(y/2)=0$, de donde $y=2m\pi$, siendo m un número entero. Empleando las expresiones de x y z, hallamos la segunda serie de valores de las incógnitas:

$$\begin{aligned} &x_2=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, && \text{siendo } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ &y_2=2m\pi, && \text{siendo } m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ &z_2=\pi\mp\frac{\pi}{3}-(2m+k)\pi. && \end{aligned}$$

La comprobación muestra que las dos series encontradas son, en realidad, las soluciones del sistema inicial.

Señalemos algunas observaciones con respecto a la forma de escribir las soluciones de los sistemas trigonométricos.

Al resolver un problema a considerar, muchos estudiantes razonan, por ejemplo, de esa manera: "Ya que de la fórmula (4) se deduce que $y=2n\pi-x$, entonces, tomando en consideración (2) para x, hallamos que

$$y=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}-k\pi=\pm\frac{\pi}{3}+(2n-k)\pi. \tag{6}$$

Algunos intentan incluso demostrar la "legalidad" de esta fórmula: "Ya que (2) da lugar a tomar ambos valores (más y menos), por lo tanto en la expresión para y hay que tomar ambos signos, lo que se indica en (6) por medio del signo $\pm$".

En realidad, la expresión (6) para y no es justa: si se aplica algun valor de x correspondiente al signo "más" en la fórmula (2), el valor respectivo de y corresponde a la elección del signo "menos" en la segunda fórmula (5). Por consiguiente, los signos en las fórmulas (5) no significan la elección arbitraria de los signos "más" y "menos" en cada una de ellas, sino la elección determinada por completo: en estas fórmulas *se toman simultáneamente ambos signos superiores o ambos inferiores.*

Conviene entender correctamente este exacto sentido de la expresión convencional (5). En particular, esta expresión significa que a cada elección de los valores de k y n le corresponden dos soluciones, es decir, dos tríos de números x, y, z, del sistema inicial.

Otra equivocación típica consiste en denominar con una misma letra, en todos los casos, los números enteros arbitrarios. Por ejemplo, en vez de (4) muchos estudiantes escriben: $x+y=2k\pi$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ y teniendo en cuenta (2) y la expresión para z, obtienen en vez de (5) la serie:

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ y=\mp\frac{\pi}{3}+k\pi,\ z=\pi-2k\pi.$$

Aunque estos tríos de números satisfacen realmente el sistema inicial, muchas de sus soluciones están perdidas. La causa de este error consiste en que, al pasar de las ecuaciones del sistema (1) a las igualdades para x y $x+y$, hace falta, introduciendo los parámetros de números enteros k y n (como se ha sido hecho en (2) y (4)), conservar "la independencia" de estas igualdades y no "atarlas" mediante la introducción de un mismo número entero k.

3. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \cos x+\cos y=1, \\ \cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1. \end{cases}$$

En este sistema no tenemos una ecuación que permita expresar *directamente* una incógnita por otra, y con esto eliminar una de las incógnitas. Por consiguiente, intentemos transformar las ecuaciones de este sistema de modo que se obtenga un sistema algebraico de ecuaciones respecto a unas funciones trigonométricas de incógnitas x e y.

Como se sabe, el coseno de cualquier ángulo se expresa por el coseno del semiángulo lo que sugiere la idea de designar $\cos(x/2)$ por u y $\cos(y/2)$ por v, y escribir la primera ecuación del sistema con ayuda de u y v[1]. Las transformaciones evidentes conducen al sistema que es un sistema algebraico "corriente":

$$\begin{cases} u^2+v^2=3/2, \\ u+v=\frac{\sqrt{2}}{2}-1. \end{cases}$$

[1] A propósito, de la segunda ecuación del sistema, sería posible expresar $\cos(x/2)$ por $\cos(y/2)$ y luego, al reducir el primer miembro de la primera ecuación a $\cos(x/2)$ y $\cos(y/2)$, eliminar $\cos(x/2)$. Como resultado, se obtiene la ecuación cuadrática respecto a $\cos(y/2)$.

No es difícil resolver este sistema. Desprendiendo del primer miembro de la primera ecuación el cuadrado completo de la suma de incógnitas u y v, y tomando en consideración la segunda ecuación, hallamos la magnitud del producto uv. De este modo podemos obtener otro sistema

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1, \\ uv=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

que se resuelve por medio de la reducción conocida a la ecuación cuadrática (por el teorema inverso al teorema de Viete). Sin embargo, es más simple "adivinar" las soluciones del último sistema. En efecto, son evidentes dos pares de tales números [1], que la suma de éstos es igual a $\sqrt{2}/2-1$ y su producto, a $-\sqrt{2}/2$

$$u_1=\sqrt{2}/2,\ v_1=-1;\ u_2=-1,\ v_2=\sqrt{2}/2.$$

Por consiguiente, para determinar las incógnitas x e y tenemos que resolver sucesivamente dos sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\dfrac{y}{2}=-1. \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}=-1, \\ \cos\dfrac{y}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

De aquí se hallan dos series de soluciones del sistema inicial

$$x_1=\pm\frac{\pi}{2}+4k\pi,\quad y_1=2\pi+4n\pi,\ \text{donde } k,\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x_2=2\pi+4p\pi,\qquad y_2=\pm\frac{\pi}{2}+4q\pi,\ \text{donde } p,\ q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En el problema siguiente tampoco tenemos la posibilidad de eliminar directamente una de las incógnitas, pero el sistema que se considera allí se transforma simplemente en una forma que permite encontrar soluciones. La particularidad de este problema consiste en que nos interesan no todas las soluciones del sistema trigonométrico sino aquellas que satisfacen algunas condiciones complementarias.

4. *Hallar todas las soluciones del sistema*

$$\begin{cases} |\operatorname{sen} x|\operatorname{sen} y=-1/4, \\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=3/2, \end{cases}$$

que satisfacen las condiciones $0<x<2\pi$, $\pi<y<2\pi$.

---

[1] No obstante, de nuestra "conjetura" no se deduce que este sistema no tenga otras soluciones. Por lo tanto, para la exactitud completa es necesario referirse al hecho de que cada sistema del tipo $u+v=a$, $uv=b$ no tiene más de dos soluciones.

Para resolver este sistema se utiliza el método corriente de eliminación del módulo. Con este motivo se consideran dos casos: sen $\times x>0$ y sen $x<0$. La primera de estas desigualdades se satisface (tomando en consideración la limitación de x que se deduce de las condiciones del problema) si $0<x<\pi$, la segunda, si $\pi<x<2\pi$; es evidente que la igualdad $x=\pi$ es imposible.

Al principio, sen $x>0$, es decir, $0<x<\pi$. En este caso la primera ecuación se reduce a la forma sen x sen $y=-1/4$ y se transforma el producto de senos en diferencia de cosenos; el sistema inicial se reduce al sistema

$$\begin{cases} \cos(x-y)-\cos(x+y)=-1/2, \\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=3/2, \end{cases}$$

del cual se deduce otro sistema más simple:

$$\begin{cases} \cos(x-y)=1/2 \\ \cos(x+y)=1. \end{cases} \tag{7}$$

El sistema obtenido se reduce de modo evidente al sistema algebraico de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} &x-y=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, \quad \text{siendo } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ &x+y=2n\pi, \qquad\quad\ \ \text{siendo } n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{aligned}$$

lo que permite encontrar fácilmente todas las soluciones del sistema (7). Sin embargo, la selección posterior de las soluciones que satisfacen las limitaciones complementarias planteadas en la condición, sería muy compleja, pués sería necesario resolver las desigualdades de los números enteros y examinar distintas posibilidades.

Por lo tanto, es más simple, buscar en seguida las soluciones necesarias, es decir, las soluciones del sistema (7) que se encuentran en los intervalos $0<x<\pi$ (supongamos que sen $x>0$) y $\pi<y<2\pi$ que son de interés para nosotros. De estas desigualdades se deduce que

$$\begin{aligned} -2\pi<x-y<0, \\ \pi<x+y<3\pi. \end{aligned}$$

Hablando de otro modo, se necesita hallar solamente tales soluciones del sistema (7) para las cuales son justas estas desigualdades.

No obstante, si la diferencia $x-y$ se encuentra entre -2π y 0, la igualdad $\cos(x-y)=1/2$ se satisface sólo para dos casos: cuando $x-y=-\pi/3$ y $x-y=-5\pi/3$. De esto puede cerciorarse, por ejemplo, por medio del círculo trigonométrico (fig. 59) o según la gráfica del coseno. Luego, si la suma $x+y$ se encuentra entre π y 3π, la igualdad $\cos(x+y)=1$ puede satisfacerse sólo para el caso de $x+y=2\pi$.

De esa manera, obtenemos dos sistemas algebraicos lineales:

$$\begin{cases} x-y=-\pi/3, \\ x+y=2\pi \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x-y=-5\pi/3, \\ x+y=2\pi, \end{cases}$$

de donde tenemos, respectivamente, dos soluciones de nuestro problema:

$$x_1=5\pi/6,\ y_1=7\pi/6 \ \text{ y } \ x_2=\pi/6,\ y_2=11\pi/6.$$

El caso de sen $x<0$ que tiene lugar si $\pi<x<2\pi$ se analiza análogamente del todo y da dos soluciones más del sistema inicial que satisfacen las desigualdades del problema:

$$x_3=7\pi/6,\ y_3=7\pi/6 \ \text{ y } \ x_4=11\pi/6,\ y_4=11\ \pi/6.$$

5. *Hallar las soluciones del sistema*

$$\begin{cases} \log_2 x \log_y 2+1=0, \\ \qquad \operatorname{sen} x \cos y = 1-\cos x \operatorname{sen} y, \end{cases}$$

que satisfacen la siguiente condición: $x+y<8$.

Al resolver este sistema, nos encontramos también con la selección de las soluciones. Pero hace falta prestar atención a que, además de

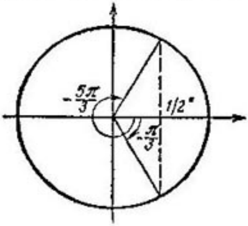


Fig. 59

la desigualdad indicada $x+y<8$, surgen otras condiciones complementarias, vinculadas con la necesidad de asegurar la existencia de los logaritmos integrantes del sistema. Por esto, precisamente, son interesantes sólo tales pares de valores x e y para los cuales $x>0$, $y>0$, $y\neq 1$.

A partir de estas condiciones complementarias es fácil reducir la primera ecuación del sistema a la forma $xy=1$. En lo que se refiere a la segunda ecuación del sistema, ésta se escribe en forma de sen $(x+y)=1$, de donde

$$x+y=(\pi/2)+2k\pi, \text{ siendo } k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Así, en vez del sistema trigonométrico inicial, obtenemos una multitud infinita de sistemas algebraicos

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \text{ siendo } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ \quad xy=1; \end{cases} \tag{8}$$

al mismo tiempo, nos interesan solamente tales soluciones de cada uno de estos sistemas para las cuales $x+y<8$, $x>0$, $y>0$, $y\neq 1$. En lugar de resolver todos los sistemas (8) y luego seleccionar las soluciones necesarias, hallaremos estas soluciones.

De las condiciones complementarias $x+y<8$, $x>0$, $y>0$ se deduce que $0<x+y<8$, debido a lo cual tiene razón hacer el análisis de tales sistemas (8) que correspondan a los valores (de números enteros) de k que satisfacen la desigualdad:

$$0<\frac{\pi}{2}+2k\pi<8.$$

La selección directa (véase el problema 15, § 3, Parte II) muestra que a esta desigualdad le corresponden solamente dos valores (enteros) de k, es decir, $k=0$, y $k=1$; los sistemas (8) que corresponden a los demás valores de k no pueden tener las soluciones requeridas.

Así, hace falta resolver dos sistemas algebraicos

$$\begin{cases} x+y=\pi/2, \\ xy=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x+y=5\pi/2, \\ xy=1; \end{cases} \tag{9}$$

el primer sistema no tiene soluciones reales y el segundo nos da

$$x_1=\frac{5\pi+\sqrt{25\pi^2-16}}{4}, \quad y_1=\frac{5\pi-\sqrt{25\pi^2-16}}{4};$$
$$x_2=\frac{5\pi-\sqrt{25\pi^2-16}}{4}, \quad y_2=\frac{5\pi+\sqrt{25\pi^2-16}}{4}.$$

Nos cercioramos inmediatamente de que para cada una de estas soluciones $x>0$, $y>0$, $y\neq 1$. Las dos primeras de estas condiciones, por otra parte, son evidentes al examinar el segundo sistema (9) (ya que la suma y el producto de los números x e y son positivos). En lo que se refiere a la condición $y\neq 1$, es cómodo comprobar esta última no para las fórmulas finales, sino para obtener, directamente, del segundo sistema (9): este último no tiene soluciones cuando $y=1$.

Luego se estudia un sistema más de ecuaciones trigonométricas, cuya solución exige cierta ingeniosidad al realizar transformaciones trigonométricas. Se dan varios métodos de su solución para mostrar distintos procedimientos que conducen al objetivo y que podrían ser útiles en caso de resolver otros sistemas trigonométricos.

6. *Resolver un sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\operatorname{sen}\alpha, \\ \cos x+\cos y=\cos\alpha. \end{cases} \tag{10}$$

Primer método. La idea de esta solución consiste en obtener alguna dependencia algebraica entre las incógnitas x e y, y luego, por medio de sustitución, eliminar una de las incógnitas. Para realizar esta idea, indicamos que, el sistema inicial se escribe de nuevo en forma

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\,\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\mathrm{sen}\,\alpha, \\ 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\cos\alpha, \end{cases} \tag{11}$$

los primeros miembros de ambas ecuaciones contienen un mismo factor $\cos[(x-y)/2]$. Si se pudiera eliminar este factor , se obtendría una ecuación trigonométrica respecto a $x+y$, que nos daría la dependencia lineal entre las incógnitas x e y.

Ahora mostremos la solución total del sistema (10) que utiliza la idea de eliminar el factor $\cos[(x-y)/2]$ de las ecuaciones (11).

Supongamos, en primer término que el valor del ángulo α asegura que $\cos\alpha\neq 0$ (más adelante se analiza especialmente el caso contrario). En este caso, el primer miembro de la segunda ecuación de (11) es diferente de cero, debido a lo que cada miembro de la primera ecuación puede dividirse por la segunda.

Como resultado tenemos

$$\mathrm{tg}\,\frac{x+y}{2}=\mathrm{tg}\,\alpha \tag{12}$$

de donde

$$x+y=2\alpha+2k\pi,\ \text{siendo}\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \tag{13}$$

Notemos que el paso de (12) a (13) da una ecuación *equivalente*. En efecto, si $x+y=2\alpha+2k\pi$, $(x+y)/2=\alpha+k\pi$, pero, como $\mathrm{tg}\,(\alpha+k\pi)=\mathrm{tg}\,\alpha$ existe (debido a $\cos\alpha\neq 0$), entonces $tg[(x+y)/2]$ tiene sentido y la igualdad (12) es válida.

El paso ulterior de la resolución es evidente. De la correlación (13) se halla que

$$y=2\alpha+2k\pi-x, \tag{14}$$

a partir de lo cual se realiza la sustitución en la segunda ecuación del sistema (10) $\cos x+\cos(2\alpha+2k\pi-x)=\cos\alpha$. Aplicando la periodicidad del coseno y transformando la suma de cosenos en el producto, obtenemos la ecuación $2\cos\alpha\cos(x-\alpha)=\cos\alpha$.

Hemos supuesto que $\cos\alpha\neq 0$. Por lo tanto, de la última correlación se deduce que $\cos(x-\alpha)=1/2$, es decir, $x=\alpha\pm(\pi/3)+2n\pi$, siendo $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

Sustituyendo los valores hallados de x en la correlación (14), tenemos las soluciones del sistema inicial (10):

$$x=\alpha\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ y=\alpha\mp\frac{\pi}{3}+2(k-n)\pi; \tag{15}$$

donde k y n son números enteros cualesquiera y simultáneamente, en ambas fórmulas se usan los signos superiores o inferiores.

De ese modo ha sido considerado por completo el caso de $\cos\alpha \neq 0$; es preciso, sin duda, recordar que todas las correlaciones obtenidas más arriba (12), (13) y otras, en particular, *las soluciones* (15) *tienen lugar solamente para los valores de* α, *para los cuales* $\cos\alpha \neq 0$, ya que estas soluciones fueron obtenidas precisamente a partir de esta suposición. Por ejemplo, si $\alpha = \pi/2$, no tenemos, por ahora, derecho a escribir las fórmulas (15), aunque para este valor de α las fórmulas dadas tienen sentido.

A continuación examinaremos el caso de $\cos\alpha = 0$. Este puede reducirse fácilmente a las consideraciones anteriores. En efecto, si $\cos\alpha = 0$, siempre $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$. Por eso consideraremos el sistema inicial (10) suponiendo que $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$. Pero en este caso cada miembro de la segunda ecuación del sistema (11) puede dividirse por la primera de este sistema y se obtiene

$$\operatorname{cotg}\frac{x+y}{2} = \operatorname{cotg}\alpha,$$

de donde se desprende de nuevo la correlación (13). Hasta ahora esta correlación ha sido obtenida sólo para todos los valores de α, excepto el caso en que $\cos\alpha = 0$; no obstante resultó que esta correlación tiene lugar también para aquellos valores de α para los cuales $\cos\alpha = 0$, es decir, *para todas las* α.

Luego, expresando mediante (13) y por x, y sustituyendo (14) en la primera ecuación del sistema (10), hallamos (ya que $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$) que ahora $\cos(x-\alpha) = 1/2$ para toda α. Por consiguiente, podemos deducir que las fórmulas (15) nos dan la solución del sistema inicial (10).

Segundo método. Es posible realizar de otro modo la idea, que se puso en práctica durante la primera resolución: la obtención de la dependencia algebraica entre las incógnitas y la eliminación de una de éstas. Para esto debemos notar que si la primera ecuación del sistema (10) se multiplica por $\cos\alpha$ y después de ésta se resta la segunda ecuación de este sistema multiplicada por $\operatorname{sen}\alpha$, en este caso se obtiene la correlación

$$\operatorname{sen}(x-\alpha) + \operatorname{sen}(y-\alpha) = 0.$$

Es evidente que *si simultáneamente* $\cos\alpha \neq 0$ y $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ (¡las ecuaciones del sistema (10) se multiplicaron por estas magnitudes!), en vez del sistema (10) luego se puede resolver un sistema [1] *equivalente* a éste

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}(x-\alpha) + \operatorname{sen}(y-\alpha) &= 0, \\ \cos x + \cos y &= \cos\alpha. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

[1] Es posible examinar también el sistema

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}(x-\alpha) + \operatorname{sen}(y-\alpha) &= 0, \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y &= \operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}\right.$$

La primera ecuación de este sistema escrita en forma de "descomposición"

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}-\alpha\right)\cos\frac{x-y}{2}=0,$$

nos conduce a la necesidad de examinar dos posibilidades. Si

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}-\alpha\right)=0, \quad \text{es decir,} \quad x+y=2\alpha+2k\pi,$$

donde k es un número entero arbitrario, podemos expresar y por x (véase (14)) y, mediante la ecuación obtenida, producir la sustitución en la segunda ecuación de (16). En este caso llegamos a la ecuación trigonométrica respecto a una incógnita x

$$2\cos\alpha\ \cos(x-\alpha)=\cos\alpha$$

o, debido a que $\cos\alpha\neq 0$ según suposición, $\cos(x-\alpha)=1/2$, de donde es fácil encontrar la solución (15) del sistema inicial.

Hay que analizar aún la segunda posibilidad, a saber, $\cos[(x-y)/2]=0$. Para esto es más sencillo escribir la segunda ecuación del sistema (16) en la forma siguiente

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\cos\alpha;$$

de donde se ve que, si $\cos\alpha\neq 0$, la igualdad $\cos[(x-y)/2]=0$ es imposible, es decir, el sistema (16) resulta ser incompatible [1].

A continuación hace falta examinar los casos de $\operatorname{sen}\alpha=0$ ó $\cos\alpha=0$. Si $\operatorname{sen}\alpha=0$, la sustitución directa de los valores (15) obtenidos en el sistema inicial (10) expone que el sistema se satisface, o sea, que entre las soluciones (15) no hay ajenas. Lo mismo tiene lugar también en el caso de $\cos\alpha=0$. Por consiguiente, las fórmulas (15) describen las soluciones del sistema (10) *para todos los valores de* α.

Tercer método. La idea de este método de resolución es bastante sencilla: con ayuda de la correlación trigonométrica básica (suma de los cuadrados del seno y coseno de cualquier argumento es igual a 1) hay que intentar obtener del sistema (10) una ecuación que tiene solamente la incógnita x y otra que tiene sólo la y.

Con este motivo escribimos el sistema inicial (10) en la forma siguiente:

$$\begin{cases}\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}y,\\ \cos x=\cos\alpha-\cos y,\end{cases}$$

y elevamos al cuadrado cada una de estas ecuaciones, y luego sumamos. Como resultado de las transformaciones evidentes se obtiene la ecua-

[1] Si halláramos de la correlación $\cos[(x-y)/2]=0$ la dependencia entre x e y, y después eliminároamos una de las incógnitas sustituyendo respectiva expresión en la segunda ecuación (16), se obtendría la relación $\cos\alpha=0$. Puesto que esta última no es justa, por lo tanto la segunda posibilidad no da ninguna solución del sistema inicial.

ción $\cos(y-\alpha)=1/2$, de donde $y-\alpha=\pm(\pi/3)+2k\pi$, donde k es un número entero. Si el sistema (10) se escribe de otra forma, "aislando" respectivamente en el primer miembro de sus ecuaciones sen y y cos y, y se efectúan las mismas transformaciones, se obtiene la ecuación $\cos(x-\alpha)\,1/2$ de donde $x-\alpha=\pm(\pi/3)+2n\pi$.

Así, hemos obtenido *cuatro* series de valores de las incógnitas (notemos que aquí las correlaciones $y-\alpha=\pm(\pi/3)+2k\pi$ y $x-\alpha=$ $=\pm(\pi/3)+2n\pi$ son completamente independientes y por esto deben tomarse todas las combinaciones de signos):

$$x_1=\alpha+\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad y_1=\alpha+\frac{\pi}{3}+2k\pi;$$

$$x_2=\alpha+\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad y_2=\alpha-\frac{\pi}{3}+2k\pi;$$

$$x_3=\alpha-\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad y_3=\alpha+\frac{\pi}{3}+2k\pi;$$

$$x_4-\alpha-\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad y_4=\alpha-\frac{\pi}{3}+2k\pi,$$

donde k y n son números enteros arbitrarios.

Sin embargo, sería prematuro declarar que estas cuatro series son las soluciones del sistema inicial (10), ya que las ecuaciones se elevaron al cuadrado, mientras que esta operación puede originar soluciones ajenas. Por lo tanto es necesaria la comprobación.

Esta comprobación proporciona sólo algunas dificultades puramente técnicas. Por ejemplo, efectuamos la comprobación para la primera serie. Con este motivo hace falta sustituir las expresiones de x_1 e y_1 en las ecuaciones del sistema (10). Las transformaciones indispensables dan las siguientes igualdades

$$\left\{\begin{array}{l}2\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\alpha,\\ 2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha,\end{array}\right. \quad \text{o} \quad \left\{\begin{array}{l}\sqrt{3}\cos\alpha=0,\\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha=0,\end{array}\right.$$

que no pueden cumplirse simultáneamente. De este modo, la primera serie no es la solución del sistema (10). La cuarta serie tampoco es la solución del sistema inicial. En lo que se refiere a las segunda y tercera series puede decirse que son válidas para el sistema inicial (éstas coinciden con la solución (15)).

Cuarto método. A continuación demostraremos otro método eficaz de resolver el sistema (10) en el cual se utilizan particularidades específicas de este sistema y que permite sencillamente alcanzar el objetivo. La idea de esta solución consiste en el uso de la teoría de números complejos, más exactamente, de su interpretación geométrica.

Se puede señalar que el sistema (10) es equivalente a la igualdad $z_1+z_2=w$ entre los números complejos: $z_1=\cos x+i$ sen x, $z_2=$

$= \cos y + i$ sen y, $w = \cos\alpha + i$ sen α; donde w es un número conocido (ya que su argumento α está prefijado) y z_1 y z_2 son números incógnitos complejos. Luego, es evidente que $|z_1| = |z_2| = |w| = 1$.

De ese modo, la solución del sistema (10) se reduce a lo siguiente: hallar dos números complejos z_1 y z_2 con módulos unitarios cuya suma es igual a w, para el número complejo dado w con el módulo igual a 1. Está claro que es suficiente determinar los argumentos de los números z_1 y z_2 ya que sus módulos tienen su valor prefijado igual a 1.

Supongamos que el punto A representa un número conocido w, como $|w| = 1$, el punto A se encuentra en una circunferencia única, cuyo centro está en el origen de las coordenadas (fig. 60). Los puntos B y C que representan los números que se buscan z_1 y z_2 también deben situarse en esta circunferencia. La igualdad $z_1 + z_2 = w$ significa geométricamente que OA es la diagonal del paralelogramo, cuyos lados no paralelos OB y OC son iguales entre sí y a esta diagonal. En este caso el triángulo OBA debe ser equilateral, o sea, $\angle BOA = \angle AOC = \pi/3$.

De ahí se deduce que si α es el argumento del número prefijado w, $\alpha + (\pi/3)$ es el argumento de uno de los números buscados, mientras que $\alpha - (\pi/3)$ es el argumento del otro. Nosotros sabemos que todos los argumentos (no iguales a cero) de un número complejo se obtienen

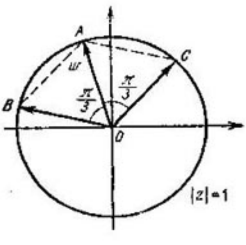


Fig. 60

de uno solo, según la fórmula (5) del § 5, Parte I. Por consiguiente, todos los argumentos de uno de los números a buscar son de la forma siguiente $\alpha + (\pi/3) + 2k\pi$ donde k es un número entero cualquiera, y todos los del otro número, $\alpha - (\pi/3) + 2n\pi$, siendo n un número entero cualquiera. Ahora, si notamos que los números z_1 y z_2 son iguales entre sí por completo (es posible considerar que el punto B representa el número z_1 y el C, el z_2; no obstante, puede considerarse, viceversa, que el punto B es el número z_2 y el C, el z_1), entonces se obtienen dos series de soluciones descritas por las fórmulas:

$$x_1 = \alpha + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y_1 = \alpha - \frac{\pi}{3} + 2n\pi;$$

$$x_2 = \alpha - \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad y_2 = \alpha + \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

donde k, n, son números enteros cualesquiera (esta respuesta coincide con la (15)).

En resumen de este párrafo examinemos un ejemplo de la resolución de un sistema de ecuaciones trigonométricas con parámetro.

7. *Hallar todos valores de a para los cuales el sistema*

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = a^2, \\ \operatorname{sen} y \cos x = a, \end{cases}$$

tiene soluciones y a continuación hallar estas soluciones.

Sumando y sustrayendo las ecuaciones del sistema a examinar, obtenemos otro sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = a^2 + a, \\ \operatorname{sen}(x-y) = a^2 - a. \end{cases} \tag{17}$$

Está claro que este sistema tiene soluciones únicamente cuando se cumplen al mismo tiempo las dos desigualdades dobles siguientes:

$$\begin{cases} -1 \leqslant a^2 + a \leqslant 1, \\ -1 \leqslant a^2 - a \leqslant 1. \end{cases} \tag{18}$$

La primera de estas desigualdades dobles puede escribirse como un sistema de dos desigualdades cuadráticas

$$\begin{cases} a^2 + a + 1 \geqslant 0, \\ a^2 + a - 1 \leqslant 0; \end{cases}$$

de éstas, la primera se cumple para todo valor de a y la segunda, para

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \tag{19}$$

Este intervalo sirve de solución para la primera desigualdad doble (18).

La segunda desigualdad doble (18) se escribe de nuevo como un sistema de dos desigualdades cuadráticas

$$\begin{cases} a^2 - a + 1 \geqslant 0. \\ a^2 - a - 1 \leqslant 0; \end{cases}$$

de éstas, la primera es válida para todo valor de a y la segunda para

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{20}$$

Este intervalo es la solución de la segunda desigualdad doble (18).

Por lo tanto, la parte común de los intervalos (19) y (20) puede servir de solución del distema (18) de las desigualdades dobles o sea

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \tag{21}$$

Para estos valores del parámetro a el sistema inicial de las ecuaciones trigonométricas tiene soluciones; para todos los demás valores de a este sistema no tiene soluciones.

No es difícil hallar las soluciones del sistema inicial a partir de la condición (21). En efecto, para todo valor del parámetro a del intervalo (21) el sistema (17) se escribe en la forma siguiente:

$$\begin{cases} x+y=(-1)^n \operatorname{arc\,sen}(a^2+a)+n\pi, & \text{siendo } n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ x-y=(-1)^n \operatorname{arc\,sen}(a^2-a)+k\pi, & \text{siendo } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

de donde

$$x=\frac{1}{2}[(-1)^n \operatorname{arc\,sen}(a^2+a)+(-1)^k \operatorname{arc\,sen}(a^2-a)+(n+k)\pi],$$

$$y=\frac{1}{2}[(-1)^n \operatorname{arc\,sen}(a^2+a)-(-1)^k \operatorname{arc\,sen}(a^2-a)+(n-k)\pi];$$

siendo n y k números enteros arbitrarios.

EJERCICIOS:

Resolver los sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x-y=\pi/18, \\ \operatorname{sen}(x+\pi/18)\ \operatorname{sen}(y+\pi/9)=1/2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=2\pi/3, \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} y=3, \\ |x-y|=\pi/3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z=3, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z=6, \\ x+y+z=\pi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \operatorname{sen} x+\sec y=2, \\ \operatorname{sen} x \sec y=1/2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \operatorname{sen}(x-y)=3 \operatorname{sen} x \cos y-1, \\ \operatorname{sen}(x+y)=-2 \cos x \operatorname{sen} y. \end{cases}$

7. Hallar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 1/2 \operatorname{sen}(1-y+x^2) \cos 2x=\cos(y-1-x^2) \operatorname{sen} x \cos x, \\ \log_2 x \dfrac{2^{y+2x}}{2^{1+x^2}}=2-x, \end{cases}$$

que satisfacen la condición $y-1-x^2+2x \geqslant 0$.

8. Hallar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} 2y \\ \cos x=\operatorname{sen} y \end{cases}$$

que satisfacen las condiciones $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

9. Hallar las soluciones del sistema que satisfacen las condiciones $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$

$$\begin{cases} |\operatorname{sen} x| = a \operatorname{sen} y \quad (a > 0), \\ \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

10. Determinar, para qué valores de a y b, el sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = a \operatorname{cotg} x, \\ \operatorname{tg} 2x = b \cos y \end{cases}$$

tiene soluciones y hallar estas soluciones.

§ 5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

En las escuelas de segundo grado las funciones trigonométricas inversas se estudian muy brevemente y, como resultado, muchos estudiantes tienen una idea muy vaga de estas funciones. Les parece que la teoría de estas funciones es muy compleja y vaga y está llena de una gran cantidad de las fórmulas complicadas, imposibles de deducir y retener en la memoria.

En realidad, las funciones trigonométricas inversas no son tan difíciles. Las definiciones iniciales son sencillas y para utilizarlas es suficiente conocer bien Trigonometría general. En lo que se refiere a las fórmulas complicadas, no deben deducirse y tampoco memorizarse.

En primer lugar, conviene llegar a comprender las designaciones, por ejemplo, entender la diferencia entre Arc sen a y arc sen a. El asunto es el siguiente. De las propiedades de la función $y = \operatorname{sen} x$ se deduce que para $-1 \leqslant a \leqslant 1$ existe una multitud infinita de ángulos x que satisfacen la ecuación $\operatorname{sen} x = a$. Esta multitud infinita de ángulos se denomina convencionalmente con el símbolo Arc sen a. No obstante, entre todos los ángulos de esta multitud hay *uno* que se sitúa en el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Este ángulo se llama, a veces, *principal*, y se designa por arc sen a. Todo esto se representa muy bien en la

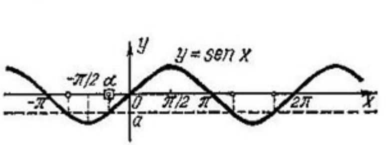


Fig. 61

curva de la función $y = \operatorname{sen} x$ (fig. 61). En el eje de abscisas se señalan con puntos los ángulos de Arc sen a, mientras que el ángulo α que se encuentra en el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$, es decir, arc sen a, está marcado con un cuadrado.

De esa manera, arc sen a es un *ángulo, cuyo seno es igual a a y que se encuentra entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.*

Es posible escribir más formalmente esta *definición*: $\alpha = \operatorname{arc\,sen} a$, si 1) $\operatorname{sen} \alpha = a$ y 2) $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

Un error grave y muy difundido es el siguiente: por ejemplo, al ver la igualdad $t = \operatorname{sen}\alpha$, escriben de una vez $\alpha = \operatorname{arc\,sen} t$. Sin duda alguna, esto no es correcto, ya que de la igualdad $t = \operatorname{sen}\alpha$ se deduce sólo que el ángulo α es de la multitud designada con Arc sen t, sin embargo, no se deduce de ninguna manera que este ángulo satisface también la segunda condición, o sea, $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

Es muy difundida también la definición de la segunda condición. En vez de esta última se utiliza la expresión: "el ángulo se encuentra en el primer o cuarto cuadrante". Pero esta frase, cuyo sentido exacto significa que el radio móvil del ángulo se encuentra en el primer o cuarto cuadrante, expresa una cosa diferente de la segunda condicion de la definición. Por ejemplo, el radio móvil del ángulo $9\pi/4$ se sitúa en el primer cuadrante, no obstante no tiene lugar la desigualdad $-\pi/2 \leqslant 9\pi/4 \leqslant \pi/2$.

Conviene razonar de forma análoga las definiciones de otras funciones trigonométricas inversas. Ilustremos todas estas definiciones en una tabla:

$\alpha = \operatorname{arc\,sen} a$	$\alpha = \operatorname{arc\,cos} a$	$\alpha = \operatorname{arc\,tg} a$	$\alpha = \operatorname{arc\,cotg} a$
1) $\operatorname{sen}\alpha = a$; 2) $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$	1) $\cos\alpha = a$; 2) $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$	1) $\operatorname{tg}\alpha = a$; 2) $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$	1) $\operatorname{cotg}\alpha = a$; 2) $0 < \alpha < \pi$

Estas definiciones y fórmulas trigonométricas son suficientes por completo para resolver distintos problemas de cálculo relacionados con las funciones trigonométricas inversas. A continuación, se dan ejemplos más característicos de este tipo. En algunos se obtienen fórmulas muy útiles.

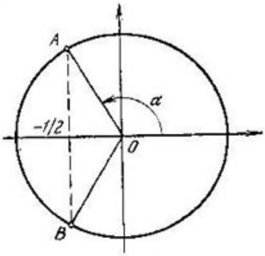


Fig. 62

1. *Calcular* arc cos $(-1/2)$.

Según la definición, el ángulo $\alpha = \operatorname{arc\,cos}(-1/2)$ se encuentra entre 0 y π, y su coseno es igual a $-1/2$. Examinemos el círculo trigonométrico (fig. 62); supongamos que las posiciones OA y OB del radio móvil corresponden a los ángulos cuyo coseno es igual a $-1/2$ (por consiguiente, estos ángulos pertenecen al Arc cos $(-1/2)$. Designemos con una flecha el ángulo α entre 0 y π; es evidente que $\alpha = 2\pi/3$, es decir, $\arccos(-1/2) = 2\pi/3$.

2. *Calcular* cotg [arc cos $(-1/3)$].

Ante todo, no debemos impresionarnos por esta expresión. Si se dominan las definiciones y las fórmulas trigonométricas, este problema se resuelve sin dificultad alguna. En efecto ¿qué es necesario hacer? Hay que hallar la cotangente del ángulo $\alpha = \arccos(-1/3)$. Según la definición del arco coseno puede escribirse que $\cos\alpha = -1/3$ y $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$; ya que el coseno es negativo, el ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante: $\pi/2 < \alpha < \pi$. De esa manera, el problema se ha hecho más sencillo:

Es sabido que $\pi/2 < \alpha < \pi$ y $\cos\alpha = -1/3$.
Hallar cotg α.

Esta función se resuelve con ayuda de las correlaciones fundamentales entre las funciones trigonométricas. En realidad, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} =$ $= \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ (el seno situado en el segundo cuadrante es positivo [1]), de donde tenemos definitivamente que

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\left[\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3. *¿A qué es igual* cos (arc sen a), $|a| \leqslant 1$?

Dado $\alpha = \operatorname{arc\,sen} a$, en este caso: 1) $\operatorname{sen}\alpha = a$ y 2) $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Por lo tanto, el seno del ángulo ya se conoce y nos queda hallar su coseno. Pero $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$, o sea, $\cos^2\alpha = 1 - a^2$. En este caso ¿cómo hallar $\cos\alpha$? Está claro que es suficiente saber el signo del coseno α. El ángulo α se encuentra entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. En este intervalo el coseno no es negativo: $\cos\alpha \geqslant 0$, y por esto $\cos\alpha = \sqrt{1-a^2}$. De ese modo:

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} a) = \sqrt{1-a^2}.$$

Es posible demostrar análogamente que la fórmula

$$\operatorname{sen}(\arccos a) = \sqrt{1-a^2}$$

es válida.

4. *¿A qué es igual* cos (2 arc sen 2/3)?

Empleando la fórmula del coseno de ángulo doble $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$, tenemos

$$\cos\left(2\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}\right) = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

---

[1] El signo del radical significa, como siempre, la raíz no negativa.

Aquí hemos utilizado, además, la fórmula que se deduce de la definición del arco seno

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} a) = a.$$

Las fórmulas semejantes son válidas para otras funciones trigonométricas:

$$\cos(\operatorname{arc\,cos} a) = a, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} a) = a, \quad \operatorname{cotg}(\operatorname{arc\,cotg} a) = a.$$

Hay un grupo aparte de problemas que consiste de ejemplos relacionados con distintas formas de escribir cierto ángulo, aplicando diferentes funciones trigonométricas. En efecto, a cada ángulo, por ejemplo, ángulo $\pi/6$, le corresponde un valor determinado del seno: $\operatorname{sen}\pi/6 = 1/2$, del coseno: $\cos\pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, etc. Por lo tanto, este ángulo puede representarse a la vez en dos formas distintas: arc sen $1/2$ y arc cos $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Otro ejemplo del mismo tipo nos muestra el problema 2 examinado más arriba. La respuesta de este ejemplo nos muestra que el ángulo $\alpha = \operatorname{arc\,cos}(-1/3)$ puede escribirse en la forma siguiente: $\alpha = \operatorname{arc\,cotg}(-\sqrt{2}/4)$, ya que $\operatorname{cotg}\alpha = -\sqrt{2}/4$ y $0 < \alpha < \pi$. De hecho, este problema nos enseña que ambas formas expresan un mismo ángulo.

La determinación del hecho de que distintas formas expresan un mismo ángulo, tiene gran importancia resolviendo problemas de Geometría. Supongamos que, al resolver un problema, en que hay que determinar un ángulo incógnito se obtiene la respuesta: $\alpha = \operatorname{arc\,cos}(-1/3)$. Sin embargo, este problema, a menudo, puede resolverse de otro modo. En este caso la respuesta puede tener otra forma, por ejemplo, $\alpha = \operatorname{arc\,cotg}(-\sqrt{2}/4)$. Todo esto demuestra que distintas formas de la respuesta no deben ser motivo de emociones.

5. *Demostrar, que*

$$1/2 \operatorname{arc\,cos} 3/5 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{4}{5}.$$

Doblemos cada uno de estos tres términos e intentemos demostrar que

$$\operatorname{arc\,cos} 3/5 = 2\operatorname{arc\,tg} 1/2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos}\frac{4}{5}$$

Ante todo, señalemos que los tres ángulos se encuentran entre 0 y $\pi/2$. En efecto, para el primer ángulo esto es evidente, ya que si $\alpha = \operatorname{arc\,cos} 3/5$, entonces $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ y $\cos\alpha = 3/5$ es positivo, de donde se deduce lo que es necesario. Para el ángulo $\pi/2 - \operatorname{arc\,cos} 4/5$ esto se demuestra análogamente. En fin, si $\beta = \operatorname{arc\,tg} 1/2$, esto significa que $-\pi/2 < \beta < \pi/2$ y $\operatorname{tg}\beta = 1/2$; por lo tanto, el ángulo β está situado en el intervalo desde 0 hasta $\pi/4$, a causa de lo cual el ángulo $2 \operatorname{arc\,tg} 1/2$ se encuentra entre 0 y $\pi/2$.

Como los tres ángulos a examinar se encuentran entre los límites de 0 a $\pi/2$, es menester, para demostrar su igualdad, mostrar que una función trigonométrica cualquiera, por ejemplo, coseno de estos ángulos tiene un mismo valor. En realidad, hallamos con facilidad

$$\cos(\operatorname{arc}\cos 3/5) = 3/5;$$

$$\cos(2\operatorname{arc}\operatorname{tg} 1/2) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)} = 3/5;$$

$$\cos(\pi/2 - \operatorname{arc}\cos 4/5) = \operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cos 4/5) = \sqrt{1-\cos^2(\operatorname{arc}\cos 4/5)} = 3/5$$

(indiquemos que arc cos 4/5 es un ángulo del primer cuadrante, Por ello el radical se da con el signo más) lo que pone fin a la demostración.

Al resolver estos problemas, los estudiantes cometen un gran número de errores. El error más grave consiste de lo siguiente. Para determinar la igualdad de estos ángulos, se comprueba que una de las funciones trigonométricas de cada uno de estos ángulos tiene el mismo valor y a base de esto se da la conclusión de que los ángulos son iguales. En efecto, esta deducción es infundada por completo. Por ejemplo, los ángulos arc sen 1/2 y arc sen (—1/2) no son iguales, sin embargo

$$\cos(\operatorname{arc}\operatorname{sen} 1/2) = \cos[\operatorname{arc}\operatorname{sen}(-1/2)] = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La cosa consiste en que *de la igualdad de cosenos (senos, etc.) de dos ángulos no se deduce la igualdad de los mismos ángulos.* Pero, si nosotros hemos demostrado que los ángulos están situados, por ejemplo, en el intervalo de 0 a $\pi/2$ (como tuvo lugar en el problema ya examinado), la igualdad de las funciones trigonométricas conduce a la igualdad de los ángulos.

6. *¿A qué es igual el ángulo* arc sen $1/3 +$ arc sen $3/4$?

Supongamos que $\alpha = \operatorname{arc}\operatorname{sen} 1/3$, $\beta = \operatorname{arc}\operatorname{sen} 3/4$, $\gamma = \alpha + \beta$. Hay que hallar, ante todo, una función trigonométrica del ángulo γ para encontrar el valor del mismo ángulo. Parece que es natural calcular sen γ:

$$\operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha =$$
$$= 1/3\sqrt{1-9/16} + 3/4\sqrt{1-1/9} = \frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}.$$

¿Cómo puede hallarse el mismo ángulo γ? Es conocido ya que no es posible escribir $\gamma = \operatorname{arc}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}$, sin determinar con antelación si se sitúa o no el ángulo γ en el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Esto no es fácil de aclarar.

Por lo tanto, intentemos resolverlo de otro modo. Al principio hace falta analizar las condiciones. Se sabe que los ángulos α y β

se encuentran en el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$ y sus senos son positivos. Por esto es posible decir con más exactitud que ellos se sitúan entre 0 y $\pi/2$, o sea, $0<\alpha<\pi/2$; $0<\beta<\pi/2$. Sumando estas desigualdades, obtenemos

$$0<\gamma<\pi.$$

Ahora está claro que el ángulo γ puede determinarse a partir de su coseno:

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=$$
$$=\sqrt{1-1/9}\sqrt{1-9/16}-1/3\cdot 3/4=\frac{2\sqrt{14}-3}{12}.$$

Así, 1) $\cos\gamma=\dfrac{2\sqrt{14}-3}{12}$, 2) $0<\gamma<\pi$ [1]. Por consiguiente

$$\gamma=\arccos\frac{2\sqrt{14}-3}{12}.$$

7. *¿A qué es igual el ángulo* $2\operatorname{arc\,tg}(-3)$?

Es evidente que el ángulo $\alpha=\operatorname{arc\,tg}(-3)$ satisface la igualdad $-\pi/2<\alpha<0$, de donde $-\pi<2\alpha<0$. ¿Qué función puede ayudarnos a determinar 2α? Pueden aplicarse distintos métodos.

Primer método. Al multiplicar la última desigualdad por -1, obtenemos $\pi>-2\alpha>0$. A continuación,

$$\cos(-2\alpha)=\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-9}{1+9}=-\frac{4}{5}.$$

Así, 1) $\cos(-2\alpha)=-4/5$ y 2) $0<-2\alpha<\pi$. Por lo tanto, $-2\alpha=\arccos(-4/5)$, es decir, $2\alpha=-\arccos(-4/5)$.

Segundo método. De la desigualdad $-\pi<2\alpha<0$ se deduce que $0<2\alpha+\pi<\pi$. Luego, $\cos(2\alpha+\pi)=-\cos 2\alpha=4/5$. Pero, si se cumplen estas dos condiciones, entonces $2\alpha+\pi=\arccos 4/5$, es decir, $2\alpha=-\pi+\arccos 4/5$.

Tercer método. De la desigualdad $-\pi<2\alpha<0$ se desprende que $-\pi/2<2\alpha+\pi/2<\pi/2$. Luego,

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\pi/2)=-\operatorname{cotg}2\alpha=-\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}=-\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=-4/3.$$

Por eso, $2\alpha+\pi/2=\operatorname{arc\,tg}(-4/3)$, de donde obtenemos una solución más: $2\alpha=-\pi/2+\operatorname{arc\,cotg}(-4/3)$.

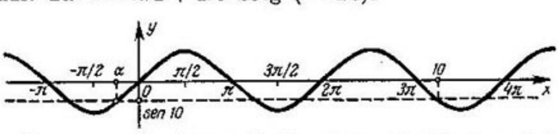


Fig. 63

Se ve que los tres métodos de resolución han dado lugar a tres soluciones distintas. Sin embargo, estas tres respuestas sólo parecen distintas. En realidad, ellas son de distintas formas de representa-

[1] Es evidente que si $0<\gamma<\pi$, entonces es más justa la desigualdad $0\leqslant\gamma\leqslant\pi$ (véase el § 1 de la Parte I).

ción *del mismo ángulo* y, si es necesario demostrarlo, esto puede hacerse como en el ejemplo 5.

Adelante se da un ejemplo de otro tipo más que provoca ciertas dificultades. A pesar de esto, su resolución exige solamente conocimientos seguros de las definiciones.

8. *¿A qué es igual el ángulo* arc sen (sen 10)?

Según la definición, $\alpha = \text{arc sen (sen } 10)$ es un ángulo que satisface dos condiciones: $\text{sen }\alpha = \text{sen } 10$ y $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Es más fácil determinar este ángulo con ayuda de la curva de la función $y = \text{sen } x$ (fig. 63). Hay que encontrar en el eje de abscisas el número 10, luego hallar geométricamente sen 10, que será la ordenada y de un punto de curva que corresponde a $x = 10$, y a continuación trazar una recta

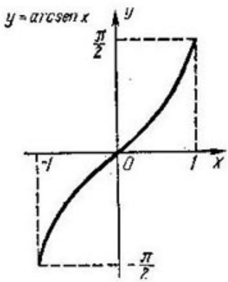


Fig. 64

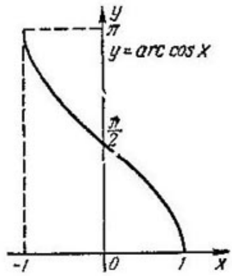


Fig. 65

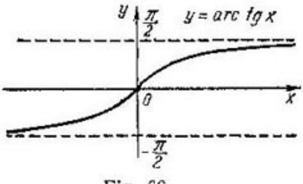


Fig. 66

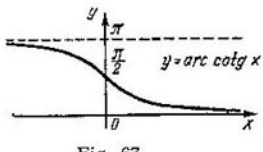


Fig. 67

horizontal $y = \text{sen } 10$. La abscisa de uno de los puntos de intersección de esta recta con la curva se encuentra en el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$; esta abscisa es el ángulo que se busca, es decir, según sus condiciones éste se sitúa entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, y su seno es igual a sen 10. Mediante simples razonamientos geométricos es fácil ver que los puntos α y 10 son simétricos respecto del punto $3\pi/2$, por eso, $10 - 3\pi/2 = 3\pi/2 - \alpha$, de donde se deduce que $\alpha = 3\pi - 10$.

Al terminar por considerar los ejemplos numéricos, conviene examinar directamente *las funciones trigonométricas inversas*.

Para los números α que satisfacen la condición $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, tenemos la expresión siguiente: arc sen α. En este caso es posible examinar la función:

$$y = \operatorname{arc\,sen} x,$$

que determina cada número y en función de cada número a. Este número y es igual a *la medida en radianes* del ángulo arc sen a. Este número se designa también por arc sen a. El intervalo de definición de esta función, (es decir, multitud de los valores de x para los cuales ésta tiene sentido) es una multitud de valores que se encuentran entre -1 y 1.

Del mismo modo se definen las demás funciones trigonométricas inversas. Sus intervalos de existencia son: para la función arc cos x una multitud de números pertenecientes al intervalo de -1 a 1; y para las funciones arc tg x y arc cotg x, una multitud de todos los números reales.

Las curvas de las funciones trigonométricas inversas se exponen en las figs. 64—67. Sin duda alguna, antes que trazarlas hay que estudiar detalladamente las propiedades necesarias de estas funciones. En particular, conviene demostrar que arc sen x y arc tg x son funciones crecientes, mientras que arc cos x y arc cotg x decrecientes. Estas demostraciones no son difíciles, sin embargo, no es indispensable efectuarlas, ya que las gráficas de las funciones en cuestión no se refieren al programa de esta obra, y en este libro se dan a modo de ilustración. El lector puede efectuar estas demostraciones individualmente. Por un lado, este ejercicio es muy útil y por otro, la aplicación de estas propiedades simplifica a menudo la resolución de los problemas.

El análisis de las resoluciones de los problemas siguientes proporciona la demostración de distintas propiedades de las funciones trigonométricas inversas.

9. *Demostrar la identidad*:

$$\operatorname{arc\,sen}(-x) = -\operatorname{arc\,sen} x, \text{ si } \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Escribamos esta igualdad en otra forma $-\operatorname{arc\,sen}(-x) = \operatorname{arc\,sen} x$ e indiquemos que $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(-x)$. Entonces según la definición

$$1) \ \operatorname{sen}\alpha = -x \ \text{ y } \ 2) \ -\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2.$$

Sin embargo, de estas condiciones es fácil deducir que

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha = x \ \text{ y } \ \pi/2 \geqslant -\alpha \geqslant -\pi/2,$$

lo que significa que $-\alpha = \operatorname{arc\,sen} x$. Esto ha sido necesario demostrar.

La identidad demostrada puede expresarse del modo siguiente: $y =$ arc sen x no es otra cosa que una función impar.

Señalemos que no tenemos *ningún* argumento para declarar que $y =$ arc sen x es una función impar *ya que* la función $y =$ sen x es impar. En realidad, guiándonos de este procedimiento, podríamos deducir lo siguiente: la función $y = \cos x$ es par, por lo tanto $y = \operatorname{arc\,cos} x$

es también par. Sin embargo, esto es incorrecto, puesto que, por ejemplo, $\arccos 1 = 0$, mientras que $\arccos(-1) = \pi \neq 0$. La relación entre $\arccos x$ y $\arccos(-x)$ es más compleja.

10. *Demostrar la identidad:*

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad \text{siendo} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

La demostración es igual que en el caso precedente. Dado $\alpha = \arccos(-x)$. Esto significa que:

$$1)\ \cos\alpha = -x \ \text{ y } \ 2)\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,$$

pero en este caso $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = x$ y $0 \geqslant -\alpha \geqslant -\pi$, o sea $\pi \geqslant \pi - \alpha \geqslant 0$, así que $\pi - \alpha = \arccos x$, es decir, $\pi - \arccos(-x) = \arccos x$, lo que ha sido necesario demostrar.

Las identidades 9 y 10 nos permiten simplificar algunas expresiones. Indiquemos además que ambas identidades se exponen bien en el círculo trigonométrico.

11. *Demostrar la identidad:*

$$\operatorname{arc\,sen} x + \arccos x = \pi/2, \qquad \text{cuando } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Primer método. De la desigualdad $-\pi/2 \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \pi/2$ y $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ se deduce que

$$-\pi/2 \leqslant \operatorname{arc\,sen} x + \arccos x \leqslant 3\pi/2.$$

Además (véase el ejemplo 3).

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x + \arccos x) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x^2} = 1.$$

Pero, entre $-\pi/2$ y $3\pi/2$ existe sólo un ángulo, cuyo seno es igual a 1, es decir $\pi/2$, por lo tanto, $\operatorname{arc\,sen} x + \arccos x = \pi/2$, lo que ha sido necesario demostrar.

Segundo método. Esta identidad es equivalente a la siguiente:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \pi/2 - \arccos x;$$

pero $\operatorname{sen}(\pi/2 - \arccos x) = \cos(\arccos x) = x$ y más

$$-\pi/2 \leqslant \pi/2 - \arccos x \leqslant \pi/2$$

(esto se deduce fácilmente de la desigualdad $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$). Por consiguiente, $\pi/2 - \arccos x = \operatorname{arc\,sen} x$, lo que ha sido necesario demostrar.

Esta identidad se expone bien en el círculo trigonométrico (hace falta examinar también dos casos: $x \geqslant 0$ y $x < 0$).

A continuación, resolvemos varias ecuaciones que contienen funciones trigonométricas inversas.

12. *Resolver la ecuación* $\operatorname{arc\,sen} x = \pi$.

Es evidente que esta ecuación no tiene soluciones ya que $\operatorname{arc\,sen} x$ no puede superar a $\pi/2$.

Muchos estudiantes resuelven esta ecuación del modo siguiente: "Tomamos senos de ambos miembros: sen (arc sen x) = sen π, o sea: x = sen $\pi = 0$. Respuesta: $x = 0$". ¿En qué consiste la equivocación de este razonamiento? El hecho es que en el caso general, las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y sen $f(x)$ = sen $g(x)$ no son en absoluto de igual fuerza. La segunda ecuación es el corolario de la primera, pero, sin duda, puede tener raíces de sobra, lo que ha tenido lugar en este caso.

Esto siempre hay que tenerlo muy presente ya que, al resolver ecuaciones que contienen funciones trigonométricas inversas, a menudo, conviene operar con funciones trigonométricas "directas" de ambos miembros. Por consiguiente, debe realizarse la comprobación [1]. La comprobación de esta resolución incorrecta mostraría que arc$\times$ $\times$sen $0 = 0 \neq \pi$, es decir, la raíz $x = 0$ está de más.

13. *Resolver la ecuación* $\arccos x\sqrt{3} + \arccos x = \pi/2$.

Escribamos esta ecuación en otra forma:

$$\arccos x\sqrt{3} = \pi/2 - \arccos x,$$

y tomemos los cosenos de ambos miembros

$$\cos(\arccos x\sqrt{3}) = \cos(\pi/2 - \arccos x),$$

es decir, $x\sqrt{3} = \sqrt{1-x^2}$. Ambos miembros de esta última expresión se elevan al cuadrado (merced a esta operación podrán aparecer raíces sobrantes, pero a pesar de todo nos vemos en la necesidad de efectuar la comprobación, ¡ya que hemos tomado los cosenos de ambos miembros!): $3x^2 = 1 - x^2$. De ahí, $4x^2 = 1$, o sea $x_{1,2} = \pm 1/2$.

Realicemos la comprobación. Cuando $x = 1/2$, tenemos

$$\arccos \sqrt{3}/2 + \arccos 1/2 = \pi/6 + \pi/3 = \pi/2,$$

y en consecuencia, $x_1 = 1/2$ es la raíz de la ecuación dada. Si $x = -1/2$, tenemos

$$\arccos(-\sqrt{3}/2) + \arccos(-1/2) = 5\pi/6 + 2\pi/3 = 3\pi/2,$$

es decir, $x_2 = -1/2$ es una raíz sobrante.

14. *Resolver la ecuación* $\arcsin 3x/5 + \arcsin 4x/5 = \arcsin x$.

Tomemos los senos de ambos miembros de la ecuación. En este caso se obtiene

$$\frac{3x}{5}\sqrt{1-\frac{16x^2}{25}} + \frac{4x}{5}\sqrt{1-\frac{9x^2}{25}} = x,$$

ó

$$x(3\sqrt{25-16x^2} + 4\sqrt{25-9x^2}) = 25x.$$

[1] Además, hay que tener en cuenta que debido a que las funciones tg x y cotg x no tienen sentido para algunos valores de x, entonces, al tomar estas funciones de ambos miembros, las raíces pueden perderse. Por ello ha de servirse de ellas con gran atención.

Una raíz es evidente: $x_1=0$; hace falta resolver la ecuación

$$3\sqrt{25-16x^2}+4\sqrt{25-9x^2}=25.$$

Para simplificar, designemos x^2 por y. La ecuación irracional se resuelve del modo común, elevando al cuadrado y separando previamente uno de los radicales[1]. Como resultado tenemos $y=1$.

Así, $x^2=1$, o sea $x_{2,3}=\pm 1$. Nos queda por verificarlo. Puesto que $\operatorname{arc\,sen} 0+\operatorname{arc\,sen} 0=\operatorname{arc\,sen} 0$, $x_1=0$ es la raíz. La verificación de la segunda raíz está relacionada con algunas dificultades. Esta se reduce a la demostración o refutación de la igualdad:

$$\operatorname{arc\,sen} 3/5+\operatorname{arc\,sen} 4/5=\pi/2.$$

Es necesario demostrar esta igualdad. El ángulo arc sen 4/5 es agudo y positivo, su coseno es igual a $\sqrt{1-16/25}=3/5$; por esto $\operatorname{arc\,sen} 4/5=\operatorname{arc\,cos} 3/5$. En este caso a base de la identidad del ejemplo 11, tenemos

$$\operatorname{arc\,sen} 3/5+\operatorname{arc\,sen} 4/5=\operatorname{arc\,sen} 3/5+\operatorname{arc\,cos} 3/5=\pi/2=\operatorname{arc\,sen} 1,$$

así que $x_2=1$ es una raíz de la ecuación inicial. Luego, según la identidad 9, tenemos las igualdades:

$$\operatorname{arc\,sen}(-3/5)+\operatorname{arc\,sen}(-4/5)=-\operatorname{arc\,sen} 3/5-\operatorname{arc\,sen} 4/5=$$
$$=-\pi/2=\operatorname{arc\,sen}(-1),$$

es decir, $x_3=-1$ es también una raíz de la ecuación inicial.

15. *Resolver la ecuación* $\operatorname{arc\,sen}(1-x)-2\operatorname{arc\,sen} x=\pi/2$.

Primer método. Es posible escribir la ecuación en la forma siguiente: $\operatorname{arc\,sen}(1-x)=\pi/2+2\operatorname{arc\,sen} x$, y después tomemos los senos de ambos miembros. Al realizar las transformaciones evidentes, obtenemos la ecuación $x=2x^2$, es decir, $x_1=0$; $x_2=1/2$.

La comprobación muestra que $x_2=1/2$ es una raíz extraña.

Segundo método. El intervalo de valores admisibles (RVA) de la ecuación en cuestión se determina por las desigualdades:

$$-1\leqslant 1-x\leqslant 1,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Resolviendo estas dos desigualdades, se obtiene $0\leqslant x\leqslant 1$. Pero, si $x>0$, entonces $2\operatorname{arc\,sen} x>0$ y $1-x<1$, y como resultado $\operatorname{arc}\times\times\operatorname{sen}(1-x)<\pi/2$. Por lo tanto, si $x>0$, en este caso

$$\operatorname{arc\,sen}(1-x)-2\operatorname{arc\,sen} x<\pi/2,$$

así que $x>0$ no puede ser una raíz de la ecuación inicial. Sólo queda comprobar el valor $x=0$. Este último valor resulta ser la raíz.

[1] Esta ecuación irracional se resuelve sin dificultades, si entendemos que $y=1$ es una raíz, mientras que el primer miembro es una función decreciente.

Es posible continuar proponiendo otros ejemplos para su resolución. Sin embargo, está claro que no se confrontan grandes dificultades con este teoría. Es suficiente conocer la Trigonometría general y las definiciones fundamentales de las funciones trigonométricas inversas para resolver con éxito muchos problemas.

EJERCICIOS:

Calcular los ángulos:

1. $\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\operatorname{arc\,sen} 1$.

2. $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\operatorname{arc\,cos}(-1)$; $\operatorname{arc\,cos} 0$.

3. $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\operatorname{arc\,tg}(-1)$.

4. $\operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\operatorname{arc\,cotg}(-1)$; $\operatorname{arc\,cotg} 0$.

5. $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} 5)$; $\operatorname{arc\,cos}(\cos 10)$; $\operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}(-6)]$; $\operatorname{arc\,cotg}[\operatorname{cotg}(-10)]$.

6. $\operatorname{arc\,cos}\frac{4}{5}-\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{4}$; $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}$; $\operatorname{arc\,cotg}(-2)-\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Demostrar las fórmulas:

7. $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen}\alpha)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$, $-1<a<1$.

8. $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cotg} a)=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

9. $\operatorname{cotg}(\operatorname{arc\,sen} a)=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$, $-1\leqslant a\leqslant 1$, $a\neq 0$.

Demostrar las identidades:

10. $\operatorname{arc\,tg}(-x)=-\operatorname{arc\,tg} x$.

11. $\operatorname{arc\,cotg}(-x)=\pi-\operatorname{arc\,cotg} x$.

12. $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,cotg} x=\frac{\pi}{2}$.

¿Para qué valores de x son justas las igualdades?

13. $\operatorname{arc\,sen} x=\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2}$;

14. $\operatorname{arc\,cotg} x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$.

Resolver las ecuaciones:

15. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\operatorname{arc\,cos} x\right)=1$.

16. $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{x}}-\operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2}$.

17. $\operatorname{arc\,cotg} x=\operatorname{arc\,cos} x$.

18. $\operatorname{arc\,sen} x-\operatorname{arc\,cos} x=\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

PARTE III

GEOMETRÍA

§ 1. OBSERVACIONES GENERALES SOBRE LA GEOMETRÍA

La Geometría goza de poca autoridad entre algunos estudiantes porque a ellos les parece que ésta contiene una cantidad inmensa de teoremas y definiciones que deben aprenderse de memoria. Por esta razón tratan de dominar la Geometría memorizándola, "empollando" todo lo que haya, incluso las designaciones. Entre tanto, los hechos y nociones geométricos, si se llega a su fondo, son muy lógicos, ilustrativos y naturales.

Algunos creen que deben saberse, obligatoriamente, las enunciaciones de las afirmaciones geométricas "palabra por palabra, según el manual". Pero no es así. El estudiante debe presentar una *enunciación exacta, clara y correcta*, sea ésta algo distinta en comparación con la del manual.

Se sabe bien que muchos teoremas del curso pueden ser demostrados de varios modos. Los estudiantes pueden usar cualesquier demostraciones, lo principal es que sean *correctas*. Por lo tanto, es necesario elegir de antemano y analizar minuciosamente aquella demostración de cada teorema que sea más comprensible y sencilla.

Pero es necesario tener en cuenta que, al demostrar un teorema, no nos apoyemos en otro, obtenido a su vez con el empleo de aquel que debe demostrarse. Claro está que tal "círculo lógico" en los razonamientos es inadmisible.

Conviene subrayar especialmente que todas las demostraciones deben ser exhaustivas. En particular, hay que enunciar precisamente y, si es necesario, demostrar todos los teoremas y lemas auxiliares, a los cuales se hacen referencias en el proceso de la demostración.

A veces los estudiantes tratan de omitir una u otra etapa de la demostración, haciendo uso de tales expresiones como "es evidente", "está absolutamente claro que", etc. Pero hay que prepararse para contestar al profesor ya que éste, después de cualquier referencia sobre la "evidencia", puede preguntar: "¿Por qué?" Por consiguiente, si analizamos la demostración hay que tratar de aclarar *completamente cada* afirmación, *cada* paso en el razonamiento. Es muy útil la práctica siguiente: durante la preparación para los exámenes el estudiante demuestra los teoremas y hace a menudo preguntas: "¿Por qué? ¿De dónde se deduce?", sin dejar de aclarar una sola etapa de la demostración y sin creer a pie juntillas ni una afirmación.

Al estudiar la Geometría no debe olvidarse que las nociones, incluso las más simples (salvo, por supuesto, tales como el punto, la recta, el plano), tienen sus *definiciones*. De lo contrario, es probable que surjan disgustos por preguntas "astutas", por ejemplo: "¿Qué es ángulo recto?", "¿Por qué se puede trazar un plano a través de dos rectas paralelas en el espacio?", etc. En términos generales, debe prestarse atención especial a las definiciones, ya que la práctica demuestra que en una serie de casos los estudiantes simplemente sustituyen las definiciones por imágenes geométricas correspondientes. Por ejemplo, cada uno, sin excepción se imagina bien visualmente qué es la circunferencia, el círculo, el prisma, la pirámide, el cono, la

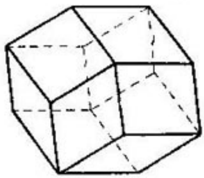


Fig. 68

esfera sólida, la superficie cónica, la esfera, etc., pero ni mucho menos cada uno puede presentar las definiciones correctas de estas nociones.

A modo de ilustración, consideraremos un *prisma*. Sin lugar a dudas, sobre este objeto cada uno posee una imaginación geométrica lo suficientemente clara como para resolver los problemas que se planteen. Sin embargo, la definición del prisma que suelen dar los estudiantes no corresponde a esta imagen geométrica.

De acuerdo con esta definición, el prisma es un poliedro cuyas dos caras son polígonos iguales de lados respectivamente paralelos y las demás caras son paralelogramos. Primero, repitiendo este concepto, muchos olvidan que antes de la definición se estipula que se tiene en cuenta un poliedro *convexo*. Segundo, incluso el poliedro convexo representado en la fig. 68 (se llama *dodecaedro* o *rombododecaedro*; todas sus caras son rombos iguales y los planos y las aristas de las caras opuestas son también paralelas) satisface esta definición. Es evidente que dicho poliedro no corresponde a la imagen geométrica del prisma, sin hablar de que no son válidas las fórmulas para su superficie y volumen.

El hecho es que demostrando estas fórmulas se sobreentiende que el prisma tiene el aspecto que nos imaginamos geométricamente. Es por eso que hay que dar la definición adecuada.

Esto puede realizarse de varios modos. Por ejemplo, *se denomina prisma al poliedro convexo cuyas dos caras son polígonos convexos igua-*

les de lados paralelos respectivamente, y las aristas que unen los vértices correspondientes de estos polígonos son iguales y paralelas [1].

Se puede dar otra definición utilizando la noción de la superficie cilíndrica: *el prisma es un cuerpo limitado por una superficie cilíndrica, cuya directriz es un polígono convexo, y por dos planos secantes paralelos entre sí que no son paralelos a la generatriz.*

Es necesario subrayar que la Geometría, al igual que todas las demás partes de las Matemáticas, requiere cierta cultura lógica. La habilidad de dar la idea de lo dado y de lo que se desea demostrar, la propiedad de expresar exacta y sucintamente un pensamiento matemático, son rasgos indispensables que ha de adquirir cada estudiante que se dedica al estudio de la Geometría.

Muchos estudiantes no entienden bien *el axioma sobre las rectas paralelas*. Por ejemplo, lo enuncian con frecuencia del modo siguiente: "A través de un punto ubicado fuera de una recta puede trazarse una, y sólo una recta que sea paralela a dicha recta". El axioma de tal enunciado contiene *dos* afirmaciones: la primera, que existe una recta paralela y la segunda, que ésta es única.

No obstante, es conocido para cada uno el problema para la construcción sobre el plano: "Trazar por un punto, dispuesto fuera de una recta, otra recta que sea paralela a la recta dada". En este problema se da un método de construcción de tal recta, de donde se deduzca su *existencia*. En este caso, la demostración de lo justo de la construcción, es decir, del hecho de que la recta trazada es de veras paralela a la recta dada, no se basa en el axioma sobre las rectas paralelas, sino que sólo se hace uso del tercer concepto de la igualdad de triángulos y el concepto del paralelismo de rectas por ángulos alternos, y las dos afirmaciones se demuestran *antes* de enunciar el axioma sobre las rectas paralelas.

Pero si es posible trazar una recta (incluso sólo con un compás y una regla) en paralelo con la recta dada por un punto dispuesto fuera de esta línea, entonces, ¿para qué se requiere su existencia en el axioma? Claro está, las exigencias son ilógicas.

En efecto, el axioma sobre las rectas paralelas contiene *una sola* afirmación, o sea, *por un punto fuera de una recta es imposible trazar dos rectas que sean paralelas a la recta en cuestión.*

En algunos casos el axioma se formula del modo siguiente: "a través de un punto, tomado fuera de la recta dada, puede trazarse una sola recta, paralela a esta recta". De cierto modo, esta interpretación no es concreta, porque se puede entender de dos maneras: tanto erróneamente, al exponer que hay dos afirmaciones (primero, que *es posible* trazar tal recta y segundo, que tal recta *es única*), como correctamente, al decir que hay una afirmación (que es imposible

[1] En realidad, esta definición es, de cierto modo, excesiva.

trazar dos rectas paralelas a la recta dada). En las Matemáticas hay enunciaciones de esta índole en algunos casos, pero, por lo general, se entienden únicamente en el *último* sentido. No obstante, conviene evitar esta vaguedad, si enunciamos el axioma para que no tengan lugar interpretaciones distintas.

El tema sobre los segmentos rectilíneos conmensurables e inconmensurables ofrece ciertas dificultades a los estudiantes, puesto que se entrelaza íntimamente con la introducción de un nuevo concepto algebraico, lógicamente difícil, el concepto de número irracional. Se necesita analizar detalladamente el material referente al tema en los manuales, tener una idea clara acerca de la consecuencia lógica de los razonamientos que se deducen.

Un error, en que caen con mayor frecuencia los estudiantes, consiste en que no comprenden como es debido el método, con cuya ayuda se determina si son conmensurables, o no, dos segmentos rectilíneos dados. Algunos estudiantes piensan más o menos del modo que sigue: "Supongamos que se han dado dos segmentos rectilíneos AB y CD (fig. 69). Tomemos el menor de ellos (AB) y vamos a colocarlo sobre el mayor (CD) a partir del punto C hasta que se agote por completo el mayor, o que quede cierto "resto", segmento $C'D$ que es menor en comparación con el segmento dado AB. En el primer caso los segmentos AB y CD son conmensurables. En el segundo caso dividamos el

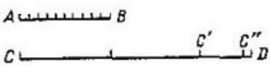


Fig. 69

segmento menor AB en 10 partes iguales, pongamos la 1/10 parte de AB en el $C'D$ a partir del punto C' hasta que se agote por completo este resto, o que quede un nuevo "resto", el segmento $C''D$ que es menor que 1/10 parte de AB. En el primer caso los segmentos AB y CD son conmensurables. En el segundo caso dividamos la décima parte de AB una vez más en 10 partes iguales y la 1/100 parte obtenida de AB póngase en el $C''D$ a partir del punto C'', etc. Si el proceso descrito se detiene en alguna etapa, es decir, cierta parte de AB se coloca sobre el "segmento" corespondiente un número entero de veces, los segmentos AB y CD son conmensurables. Pero, si el proceso no se detiene, los segmentos son inconmensurables".

No es difícil convencerse de que el razonamiento ilustrado contiene un error. En efecto, determinemos según el método descrito, si son conmensurables o no los segmentos del largo de 3 y 4 unidades. Primero, el segmento menor se pone en el mayor una vez y resulta un "resto" del largo igual a 1; a continuación la 1/10 parte del segmento del largo de 3 unidades se coloca en el "resto" obtenido 3 veces, y el nuevo "resto" tendrá 0,1 de largo; la 1/100 parte del segmento de largo de 3 unidades se pone en este "resto" 3 veces y se obtendrá un "resto" de 0,01 de largo, etc. Claro está que este proceso continuará *infinitamente*, de modo que de acuerdo con la "regla" enunciada los segmentos rectilíneos de 3 y 4 unidades de largo son inconmensurables. Pero, por otra parte, es evidente que dichos segmentos son conmensurables, ya que el segmento de una unidad de largo es su medida común.

Esta "paradoja" se resuelve fácilmente: los segmentos AB y CD son inconmensurables no en el caso en que el proceso descrito se continúa infinitamente, sino en que nos conduce a una *fracción infinita no periódica*. No obstante, si el proceso se continúa infinitamente, pero nos conduce a una *fracción infinita periódica*, los segmentos AB y CD, al igual que en el caso de detener el proceso en el paso *finito*, son *conmensurables*. (En el ejemplo de segmentos de 3 y 4 unidades de largo obtenemos una fracción periódica infinita 1, (3), es decir, los segmentos son verdadermante conmensurables).

Antes de empezar el estudio de las cuestiones relacionadas con la longitud de la circunferencia, el área del círculo, las superficies y volúmenes de los cuerpos redondos, es necesario analizar minuciosamente el concepto de *límite de la sucesión*.

Muchos estudiantes no entienden la diferencia que implican las preguntas: "¿Qué es área del círculo?" y "¿A qué es igual el área del círculo?"; "¿Qué es volumen del cono?" y "¿A qué es igual el volumen del cono?", etc. Por ejemplo, al preguntarse: "¿Qué es longitud de la circunferencia?, contestan a veces: "La longitud de la circunferencia es el número $2\pi R$, donde π es igual a 3,14 ... y R es el radio de la circunferencia". En realidad, *la longitud de la circunferencia se define como el límite de la sucesión de los perímetros de polígonos regulares inscritos en la circunferencia, con el aumento ilimitado del número de lados*, mientras que la fórmula $C=2\pi R$, que da la magnitud numérica de la longitud de la circunferencia, es un teorema que se demuestra a base de la definición inicial [1]. Todo lo dicho es justo también para el área del círculo, para la superficie del cono, etc.

Consideremos brevemente la demostración de la fórmula para la longitud de la circunferencia. Hay estudiantes que piensan que la fórmula $C=2\pi R$ se deduce de la fórmula de duplicación. Pero en realidad, partiéndonos de la definición de la longitud de la circunferencia, demostramos que para cualesquier circunferencias la relación de las longitudes es igual a la de los radios. De aquí se deduce a continuación que para *todas* las circunferencias la relación de la longitud de la circunferencia a la longitud del diámetro es siempre el *mismo número*, el llamado número π. Así, *la igualdad* $\pi=C/2R$ o, lo que es lo mismo, $C=2\pi R$ es *válida con respecto a la definición*

[1] Aquí la situación lógica es análoga a la que hemos considerado al determinar y calcular la suma de la progresión geométrica decreciente infinitamente (véase § 1, Parte I).

del número π. Como vemos ahora, la fórmula de duplicación no tiene nada en común con el asunto. Esta fórmula podría servir nada más que para un cálculo aproximado del número π.

Para la demostración de diferentes fórmulas y teoremas de geometría conviene hacer uso amplio de los métodos algebraicos y trigonométricos. En particular, es la forma trigonométrica de muchas afirmaciones geométricas (teorma de los cosenos, fórmula $S = 0{,}5\ ab \operatorname{sen} C$ para el área del triángulo, teorema de senos) la que hace la demostración de éstas más simple y resulta más cómoda para la solución de problemas; son las funciones trigonométricas las que permiten expresar, en forma escrita y sencilla, con generalización suficiente, muchos conceptos geométricos, lo que a veces es imposible efectuar por medio del "lenguaje puramente geométrico".

Por ejemplo, con la ayuda de las funciones trigonométricas, es muy fácil expresar *el lado de un polígono de n ángulos regular mediante* el radio r de la circunferencia inscrita o el radio R de la circunferencia circunscrita. Por ser igual a $2\pi/n$ de radianes el ángulo central que corresponde a un lado de un polígono regular de n ángulos, es evidente que su lado

$$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \tag{1}$$

De modo absolutamente análogo nos convenceremos de que

$$a_n = 2R \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}. \tag{2}$$

Si n es igual a 3, 4 ó 6, entonces se obtienen las fórmulas conocidas para el lado del triángulo regular, del cuadrado y del hexágono regular.

Es muy útil la relación

$$R = \frac{a}{2 \operatorname{sen} A}, \tag{3}$$

que expresa *el radio R de la circunferencia circunscrita a un triángulo, recurriéndose solamente a un lado y a su ángulo opuesto* (con ayuda de esta relación se demuestra el teorema de los senos). Es curiosa la deducción originada por esta relación: resulta que para calcular el radio

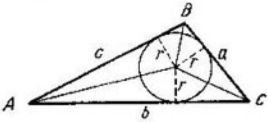


Fig. 70

del círculo circunscrito es suficiente conocer uno de los lados del triángulo y su ángulo opuesto, a pesar de que con estos datos no puede apreciarse el triángulo en forma completa.

En muchos casos, para resolver los problemas se utiliza la fórmula

$$S = pr, \tag{4}$$

que relaciona *el área S del triángulo con su semiperímetro p y radio r del círculo inscrito.* Esta fórmula se obtiene de la igualdad obvia (fig. 70) $0{,}5\ ar + 0{,}5\ br + 0{,}5\ cr = S$. Es fácil convencerse de que esta fórmula es válida también para cualquier polígono en que está inscrito el círculo (S y p son respectivamente el área y el semiperímetro del polígono).

Cabe señalar que también puede utilizarse una fórmula análoga en la estereometría. Supongamos, por ejemplo, que en una pirámide está incrita una esfera de radio r, en este caso puede calcularse el volumen V según la fórmula

$$V = Sr/3, \tag{5}$$

donde S es la superficie total de la pirámide. La demostración de esta fórmula se efectúa de igual modo que en el caso plano. El centro de la esfera se une con todos los vértices, después de lo cual uno puede imaginarse que la pirámide está dividida en varias pirámides pequeñas. Después fijándonos que el radio de la esfera inscrita es la altura de cada una de las pirámides pequeñas, calculamos el volumen de la pirámide en cuestión como la suma de los volúmenes de estas pirámides pequeñas.

Los estudiantes tienen distintas opiniones acerca del dibujo y su importancia para la resolución de problemas geométricos. Unos creen que el dibujo es innecesario y por eso lo trazan con evidente negligencia y tratan de fundamentar sus razonamientos sin referirlos al dibujo. Otros, al contrario, consideran el dibujo como el elemento decisivo en la resolución e incluso piensan que no es necesario argumentar de uno u otro modo lo que "es evidente en el dibujo".

Ambos puntos de vista son erróneos. Naturalmente, ningún dibujo, por hermoso, ilustrativo y exacto que sea, puede sustituir la demostración lógica de un fenómeno geométrico ya que el dibujo no es nada más que una *ilustración* para los razonamientos (para más detalles véase el §5, Parte III). Por esta razón es necesario argumentar lógicamente el fenómeno geométrico que hemos "notado" en el dibujo, y sólo en este caso podemos estar seguros de que este fenómeno tiene lugar realmente y no es resultado de la ejecución justa (o, quizá, no justa) del dibujo.

Sin embargo, el papel del dibujo no se reduce solamente a la ilustración de los razonamientos durante la resolución de los problemas. En muchas ocasiones resulta que el dibujo hecho acertadamente es lo que puede dar la idea sobre el empleo de uno u otro teorema, o sobre la necesidad de cumplir una construcción adicional. En otras palabras, en la mayoría de los problemas el dibujo desempeña un papel importantísimo, permitiendo encontrar (e incluso sugerir) la idea de la resolución. Por eso conviene trazar los dibujos minuciosa y exactamente, saber notar en ellos los fenómenos geométricos que se pueden aprovechar (véase el § 6, Parte III).

A veces una propiedad, notada con acierto en el dibujo, permite reducir la resolución del problema literalmente a varios renglones. Para resolver el problema que sigue se propusieron más de una decena de variantes. Pero fueron muy pocos estudiantes que ofrecieron la más breve y simple, bastante fácil de encontrar.

1. *En una circunferencia está inscrito un rectángulo $ABCD$, cuyo lado AB es igual a a. Desde el extremo K del diámetro KP paralelo al lado AB el lado BC se ve bajo el ángulo 2β. Calcular el radio de la circunferencia.*

Supongamos que O es el centro del círculo, $KP \parallel AB$, $\angle BCK = 2\beta$ y $AB = a$ (fig. 71). Se requiere calcular el radio R de la circunferencia.

Aquí está la resolución propuesta por algunos estudiantes, basada sobre argumentaciones geométricas superficiales. Sea M el punto de intersección del diámetro KP con el lado BC. Puesto que $R = KM - OM$, calculemos los segmentos rectilíneos KM y OM. Del triángulo rectangular KMB hallamos que $KM = BM$ cotg β. Si trazamos el segmento OB y nos fijamos que el triángulo BOK es isósceles podemos concluir que $\angle BOM = 2\beta$ (como ángulo externo de este triángulo), por lo tanto, del triángulo rectángulo BOM se deduce que $OM = BM \times$ $\times$ cotg 2β. De tal modo, $R = BM/\text{sen } 2\beta$.

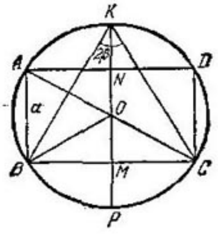


Fig. 71

Si trazamos la diagonal AC en el rectángulo $ABCD$, según el teorema de Pitágoras obtenemos del triángulo rectángulo ABC: $(2R)^2 = a^2 + (2BM)^2$. Despejando BM de esta expresión y de la anterior encontraremos el radio del círculo: $R = a/(2|\cos 2\beta|)$.

Sin embargo, hay otra solución, más simple y breve, la que casi nadie pudo notar. Si se traza la diagonal AC desde el principio, estará claro que los ángulos $\angle BKC$ y $\angle BAC$ son inscritos, que se apoyan en el arco común BPC y por eso del triángulo rectangular ABC la respuesta se obtiene en seguida.

Por supuesto, las dos resoluciones descritas son completamente admisibles; en términos generales, cualquier resolución válida expuesta sin faltas matemáticas es completamente legítima, sea larga o corta. Aun más en las condiciones de los exámenes, cuando el tiempo que se ha dado para la resolución es limitado, conviene evitar la búsqueda prolongada de una resolución "fina" que, tal vez, no existe; es mejor realizar la idea que ha surgido, sin pensar mucho en otras posibilidades, y finalizar la resolución aunque sea larga pero segura. No obstante hay que reconocer que una resolución fina hecha en unos renglones manifiesta que el estudiante posee no sólo conocimientos, sino también un alto "sentido" de la Geometría y espíritu de observación.

Dirigiéndonos otra vez a la figura 71 que hemos utilizado para resolver el problema en cuestión, debemos prestar atención a una circunstancia importante: *los datos del problema no determinan este dibujo en forma completamente unívoca.* En efecto, en la fig. 71 hemos tomado el rectángulo $ABCD$ cuyo lado $AB = a$ es el *menor*; de modo igual hemos elegido según nuestro criterio un caso en que el ángulo BKC es *agudo*. En otras palabras, si realizamos la resolución de este problema según la fig. 71 deduciremos de hecho *suposiciones complementarias* no estipuladas en los datos del problema.

El carácter indefinido de los datos del problema en este sentido suele encontrarse con bastante frecuencia, y el estudiante tiene que hacer suposiciones complementarias necesarias por sí mismo (que, como regla general, no se indican evidentemente) al ilustrar la con-

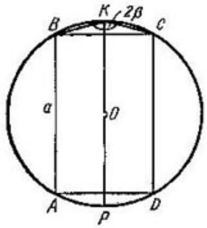


Fig. 72

figuración geométrica en el dibujo. Hablando en forma más estricta, debemos examinar *todos* los dibujos posibles y convencernos de que la elección de uno u otro dibujo no influye de manera alguna en la respuesta. (Por ejemplo, si consideramos el problema anterior convendría, además de la fig. 71 recurrir a la fig. 72 y convencernos de que el resultado que se obtiene es el mismo a pesar de que los razonamientos cambien en cierto modo). Pero, por lo común esto no se cumple ya que en un problema de Geometría planteado de una manera lacónica la respuesta debe ser igual para todos los dibujos *posibles*, por esto es suficiente realizar la resolución sólo con el uso de uno de ellos.

El asunto es más complejo cuando las suposiciones complementarias, hechas durante el trazado del dibujo, son *incompatibles* con los datos del problema. Por ejemplo, en el problema siguiente, por muy rica que sea nuestra imaginación no puede darnos de inmediato la configuración correcta en el espacio, y sólo en el proceso de la resolución estricta se puede aclarar cuál es la disposición real de los cuerpos.

2. *En una pirámide de base triangular dos caras son triángulos equiláteros con el lado a y las otras dos son triángulos rectangulares isósceles. Determinar el radio de la esfera inscrita en la pirámide.*

Para resolver el problema se necesita un dibujo tradicional: supongamos que $SABC$ es la pirámide en cuestión (fig. 73), los triángulos ASC y BSC son equiláteros y $\angle ASB = \angle ACB = 90°$. Con el fin de calcular el radio r de la esfera inscrita recurramos a la fórmula (5).

El área de la superficie de la pirámide $SABC$ se determina inmediatamente: $S = a^2\ (2+\sqrt{3})/2$. Para encontrar su volumen es necesario calcular su altura SH. Unamos el punto H con los vétrices de la base. Puesto que las aristas laterales son iguales, son también

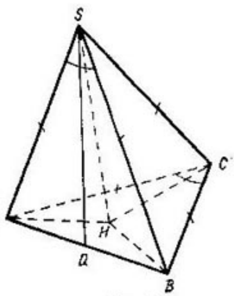


Fig. 73

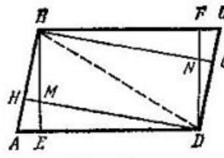


Fig. 74

iguales sus proyecciones: $AH = BH = CH$. Pero esto significa que H es el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC. Sin embrago, como $\angle ACB = 90°$, el centro del círculo circunscrito ha de hallarse en el punto medio de la hipotenusa AB, es decir, el punto H tiene que coincidir con el punto Q, que es la base de la altura de la cara lateral ASB bajada de S a AB.

Es así como resulta imposible el fenómeno ilustrado en la fig. 73, el dibujo es erróneo. En realidad el plano ASB es perpendicular al plano ABC y la altura de la pirámide coincide con la altura SQ de la cara lateral ASB.

Después de hacer correctamente el dibujo, podemos determinar fácilmente $V = a^3\sqrt{2}/12$, luego se calcula el radio de la esfera inscrita en la pirámide: $r = a\sqrt{2}(2-\sqrt{3})/2$.

He aquí otro problema en el cual el dibujo "habitual", como se ha aclarado, no corresponde a los datos del problema y debe ser sustituido.

3. *Se tiene un paralelogramo cuyo lado $AB = 1$, $BC = 2$ y el ángulo ABC es obtuso. Por cada punto B y D se han trazado dos rectas, una de las cúales es perpendicular al lado AB y la otra es perpendicular al lado BC. Como resultado de la intersección de estas cuatro rectas se ha formado un paralelogramo semejante al $ABCD$. Hallar el área del paralelogramo $ABCD$.*

Al empezar a resolver este problema los estudiantes suelen trazar la fig. 74; en ésta $BE \perp BC$, $DF \perp BC$, $BG \perp AB$, $DH \perp AB$. Según las condiciones el paralelogramo $BNDM$ formado por la intersección de las rectas BE, DF, BG y DH es semejante al paralelogramo $ABCD$. Para calcular el área del paralelogramo $ABCD$ hay que calcular el ángulo BAD (los lados del paralelogramo ya se conocen). En virtud de los datos este ángulo es agudo, designemos su valor por medio de α.

Primero encontraremos la relación $BM : MD$ de los lados del paralelogramo $BNDM$. Con este fin es necesario determinar, qué pares de lados de los paralelogramos semejantes $ABCD$ y $BNDM$ son similares. Tracemos la diagonal BD y examinemos los triángulos BAD y BMD. Puesto que $\angle ABD > \angle ADB$ (ya que en el triángulo BAD según los datos $AD > AB$) y $\angle ABE = \angle ADH$ (como ángulos agudos con lados respectivamente perpendiculares), por consiguiente $\angle MBD \angle$ $\angle MDB$, y por eso para los lados del triángulo BMD es válida la desigualdad $MD > BM$. Así pues, en el paralelogramo $BNDM$ el lado MD es *mayor* que el lado BM, es decir, $MD : BM > 1$. Como en el paralelogramo $ABCD$, de acuerdo con los datos, $BC : AB = 2 > 1$, entonces son similares los pares de lados AB y BM, BC y MD y por eso $MD : BM = 2$.

Pasemos ahora al cálculo del ángulo α. De la semejanza de los triángulos rectángulos MED y MHB deduzcamos que $ED : HB = MD : MB$, o sea $ED = 2HB$. Pero $ED = AD - AE = 2 - \cos\alpha$ (del triángulo rectangular ABE se deduce que $AE = AB\cos\alpha = \cos\alpha$) y $HB = AB - AH = 1 - 2\cos\alpha$ (del triángulo rectángulo AHD se deduce que $AH = AD\cos\alpha = 2\cos\alpha$) y, por consiguiente, $2 - \cos\alpha = 2\cdot(1-2\cos\alpha)$, de donde $\cos\alpha = 0$, es decir, $\alpha = 90°$.

Al obtener este valor del ángulo α (que según los datos del problema ha de ser *agudo*) muchos estudiantes no pueden superar la contradicción surgida. Unos tratan de encontrar un error en los cálculos anteriores (pero sin éxito, ya que para la configuración que se da en la fig. 74 todos los cálculos se han efectuado correctamente), otros estudiantes dicen que el problema no tiene solución.

Sin embargo, son pocos los que hacen una conclusión correcta: *el resultado obtenido demuestra que la fig. 74 no satisface los datos del problema*, ya que en estos datos la configuración mostrada en la figura (dibujo) resulta *imposible* [1]. Por consiguiente, se necesita aclarar si existe alguna otra disposición de las figuras que se tratan en los datos del problema. Por desgracia, muchos estudiantes, por falta de imaginación geométrica, no llegan a la configuración ilustrada en la fig. 75, donde el paralelogramo $BNDM$ no se halla por completo dentro del paralelogramo $ABCD$.

Así, resolvamos el problema para la configuración ilustrada en la fig. 75. Al determinar que $MD > BM$ (con este fin es suficiente trazar una diagonal BD y notar que $\angle MBD > \angle MBC = 90°$), deducimos de la semejanza de los paralelogramos que

$$\frac{BM}{DC} = \frac{MD}{BC}. \tag{6}$$

Sea K el punto de intersección de la recta MD con el lado BC. De la semejanza de los triángulos rectangulares MBK y KCD se deduce que

$$\frac{BM}{DC} = \frac{MK}{KC}. \tag{7}$$

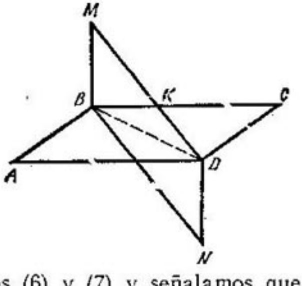


Fig. 75

Si comparamos (6) y (7) y señalamos que $MD = MK + KD$, $BC = BK + KC$, obtenemos la igualdad

$$\frac{MK}{KC} = \frac{MK + KD}{BK + KC}, \quad \text{ó} \quad \frac{MK}{KC} = \frac{KD}{BK}. \tag{8}$$

Sin embargo, de los triángulos semejantes MBK y KDC se deduce que $MK : KC = BK : KD$. Comparando esta igualdad con (8) concluimos que $MK = KC$. Pero en este caso de (7) se deduce que $BM = DC = 1$ y luego de (6), que $MD = BC = 2$. Así resulta que los paralelogramos $ABCD$ y $BMDN$ son *iguales*.

[1] Hablando con mayor precisión, si trazamos las perpendiculares BE, DF, BG y DH en el paralelogramo $ABCD$ (con los lados $AB = 1$, $BC = 2$ y ángulo obtuso ABC) se obtiene el paralelogramo $BMDN$ que se halla *en el interior* del paralelogramo $ABCD$ (fig. 74), en este caso los paralelogramos *no pueden ser semejantes*.

Puesto que $MK = KC$, del triángulo rectángulo MBK, de acuerdo con el teorema de Pitágoras obtenemos que $MK^2 = 1 + (2 - MK)^2$, es decir, $MK = 5/4$. En fin, si tomamos en consideración que $\angle BMK = \alpha$, encontramos del mismo triángulo rectángulo MBK que sen $\alpha = BK/MK = (2 - KC)/MK = (2 - MK)/MK = 3/5$. Por consiguiente, el área del paralelogramo $ABCD$ es igual a $S = AB \cdot BC \cdot$ sen $\alpha = 6/5$.

Así, el problema está resuelto. Resulta que a los datos del problema les satisface la única configuración en que el paralelogramo $BMDN$ no se halla dentro del paralelogramo $ABCD$. Cabe señalar que algunos estudiantes, desde el principio encuentran el área del paralelogramo $ABCD$ haciendo uso de la fig. 75, pero no investigan si es posible o no, según los datos del problema, el caso de la disposición ilustrada en la fig. 74. Es natural, que pueda considerarse por completa sólo aquella resolución en la que se examinen los dos casos.

EJERCICIOS:

1. Defina a) un polígono convexo; b) los ángulos alternos internos; c) una circunferencia inscrita en el triángulo; d) las rectas que se cruzan; e) un ángulo entre dos planos que se intersecan; f) un sector esférico.

2. ¿Es una definición, un axioma o teorema cada una de las siguientes afirmaciones: a) dos rectas que se intersecan pueden tener un solo punto común; b) se llama regular un polígono cuyos ángulos, al igual que los lados, son iguales; c) tres puntos cualesquiera en el espacio siempre se encuentran en un plano; d) una recta es perpendicular a un plano; si es perpendicular a dos rectas que se intersecan y se hallan en dicho plano?

3. Supongamos que la recta l se encuentra en el plano π y que L es una recta cualquiera que no se halla en dicho plano. Consideremos el teorema siguiente: si la recta L es paralela a la recta l, entonces la recta L es paralela al plano π. Formule teoremas: uno inverso, uno contrario y uno contrario al inverso. ¿Cuáles de éstos son válidos?

4. Demostrar que el triángulo cuyos lados son de 5, 13 y 12 unidades es rectangular. ¿Qué relación existe entre esta afirmación y el teorema de Pitágoras?

5. ¿Puede definirse la longitud de la circunferencia como el límite de la sucesión de los perímetros de polígonos inscritos, si se cumplen dos condiciones: a) el número de lados de los polígonos crece infinitamente, b) la sucesión de las longitudes de los mayores lados de los polígonos tiende a cero?

6. Demostrar que $3 < \pi < 4$.

7. Consideremos la afirmación siguiente: "Si en los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ tenemos, que $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ y $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, en este caso $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$". ¿Es justa esta demostración de la afirmación? Apliquemos el triángulo $A_1B_1C_1$ al triángulo ABC de tal modo que el lado A_1C_1 coincida con el lado AC, y el vértice B_1 se halle en cierto punto B_2 dispuesto, en contraste con el vértice B, a otro lado respecto a la recta AC. Unamos los puntos B y B_2. El triángulo BAB_2 es isósceles (porque $AB_2 = A_1B_1 = AB$), y por eso $\angle ABB_2 = \angle AB_2B$. Como $\angle ABC = \angle AB_2C$ (ya que $\angle AB_2C = \angle A_1B_1C_1$), también $\angle CBB_2 = \angle CB_2B$, es decir, el triángulo BCB_2 es isósceles y $BC = B_2C$. Por consiguiente, los triángulos ABC y AB_2C tienen los lados iguales respectivamente, es decir, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. ¿Es justa la afirmación inicial?

8. Se dan dos triángulos en el espacio, cuyos lados son respectivamente paralelos. ¿Qué puede decirse de las rectas que unen respectivamente los vértices del primero y segundo triángulos?

9. Demostrar que los tres planos bisectrales de los ángulos diedros de un ángulo triédrico se intersecan en una misma recta.

§ 2. PROBLEMAS PARA LOS LUGARES GEOMÉTRICOS DE LOS PUNTOS Y PARA LA CONSTRUCCIÓN

En Geometría tienen gran importancia los aspectos referentes a la descripción de todo conjunto de puntos que poseen cierta propiedad. Para aclarar estos aspectos, es necesario entender bien la definición del lugar geométrico de los puntos y saber aquellos lugares geométricos que se mencionan en el programa.

Sin embargo, en muchos casos la solución de *los problemas para el lugar geométrico* de los puntos suele basarse en la utilización sabia de algún fenómeno geométrico.

1. *Se da el triángulo ABC; hallar (en el plano de este triángulo) el lugar geométrico de tales puntos que las áreas de los triángulos ABM y BMC sean iguales.*

Señalemos que los dos últimos triángulos tienen un lado BM común (fig. 76); por esta razón sus áreas serán iguales si son iguales también las alturas trazadas a este lado. De este modo, se requiere encontrar tal lugar geométrico de los puntos de M que los puntos A y C equidisten de la recta BM.

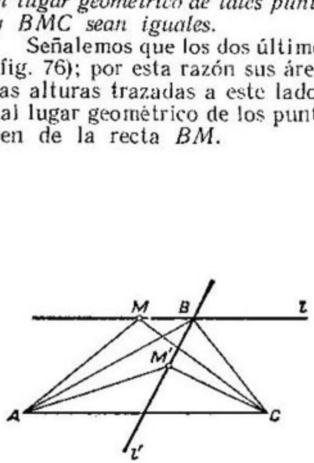


Fig. 76

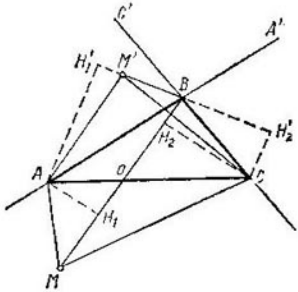


Fig. 77

Interpretado de esta manera, el problema resulta más sencillo. Se puede decir que cualquier recta paralela a la recta AC posee la propiedad de que los puntos A y C equidistan de ésta, y por lo tanto todos los puntos de la recta l, que es paralela a la recta AC y que pasa por el vértice B del triángulo, pertenecen al lugar geométrico de los puntos buscado.

Como vemos ahora, los puntos del plano que poseen la propiedad requerida, pueden hallarse simplemente "adivinándose". No obstante, el razonamiento ilustrado no puede servir de solución, a pesar de que algunos estudiantes, por desgracia, se le recurren.

En efecto, de acuerdo con la definición, *el conjunto de puntos de un plano (o de un espacio, si el problema es estereométrico) que poseen cierta propiedad, se denomina lugar geométrico, si* 1) *cada punto de este conjunto posee la propiedad programada;* 2) *cada punto que no pertenece al conjunto en consideración no posee la propiedad programada.*

Es evidente el hecho de que todos los puntos M de la recta trazada l (fig. 76) poseen la propiedad dada en el problema. Sin embargo, se buscan *todos* los puntos del plano que poseen la propiedad indicada en los datos del problema; no obstante, nosotros no hemos demostrado que entre los demás puntos del plano no tenemos aquéllos, para los cuales esta propiedad se cumple.

Así, nos queda una pregunta: ¿Agota la recta l el lugar geométrico buscado? Resulta que no. Como se sabe, cualquier recta que pase por el punto medio del segmento AC, posee la propiedad de que equidiste de los puntos A y C. Pero tenemos que elegir aquella de las rectas que pasa por el vértice B. Por consiguiente, todos los puntos M' de la recta l', que es mediana del triángulo ABC trazada desde el vértice B (fig. 76), también forman el lugar geométrico buscado. Esta otra "cojetura" ilustra bien que la demostración estricta es inevitable: jamás podemos estar seguros de que hemos adivinado del todo.

He aquí la demostración en que no se emplean ningunas cojeturas previas. Primero, algunos razonamientos para determinar la forma del lugar geométrico buscado. Prolonguemos infinitamente los lados AB y BC del triángulo ABC (fig. 77) y analicemos por separado dos casos posibles.

a) El punto M *que posee la propiedad requerida* se encuentra en el interior del ángulo ABC (o dentro del ángulo $A'BC'$ que es vertical respecto al mismo). Como los triángulos AMB y BMC son equidimensionales, las alturas AH_1 y CH_2 son también iguales, por esta razón son iguales los triángulos rectángulos AOH_1 y COH_2 (O es el punto de intersección del lado AC con el segmento MB o su prolongación; proponemos al lector trazar un dibujo para el caso en que el punto M se encuentra dentro del ángulo $A'BC'$) y, por consiguiente, $AO = OC$. Así, el punto M se halla en la mediana del triángulo ABC trazada desde el vértice B (la mediana se supone prolongada infinitamente).

b) El punto M', *que posee la propiedad requerida,* se encuentra dentro del ángulo ABC' (o en el interior del ángulo CBA' que es vertical respecto a éste). Por ser equidimensionales los triángulos $AM'B$ y $BM'C$, las alturas AH'_1 y CH'_2 son iguales y, por consiguiente, el cuadrilátero $AH'_1\,H'_2\,C$ es rectangular ($AH'_1 \perp H'_1\,H'_2$; $CH'_2 \perp H'_1\,H'_2$; los lados AH'_1 y CH'_2 son iguales y paralelos; proponemos al lector trazar un dibujo para el caso en que el punto M' se encuentra dentro del ángulo CBA'). De este modo, el punto M' se halla en la recta que es paralela a AC y pasa por el punto B.

Es obvio que los puntos del lugar geométrico buscado no pueden encontrarse en las rectas AA' y CC' ya que en este caso uno de los triángulos (AMB ó BMC) se degenera en segmento.

Estos razonamientos demuestran que el lugar geométrico buscado puede componerse sólo de dos rectas: de una mediana (prolongada infinitamente) del triángulo ABC trazada por el vértice B, y de una recta paralela al lado AC y trazada por el punto B (es decir, nos referimos de nuevo a la fig. 76). De hecho, se demostró lo siguiente: si cierto punto M del plano posee la propiedad programada, este punto tiene que hallarse obligatoriamente en la recta l o en la l'; en otros términos, cada punto del plano, que no pertenece a dichas rectas, *no posee* la propiedad dada.

Es muy simple demostrar que *cada* punto de las rectas l y l' pertenece al lugar geométrico buscado. Si M es un punto arbitrario de la recta l (fig. 76), los triángulos ABM y CMB son equidimensionales porque tienen un lado común MB y alturas iguales trazadas a este lado. Si M' es un punto arbitrario de la recta l', en este caso, recurriéndonos a los razonamientos según el punto a), demostraremos que los triángulos AMB y CMB tienen dimensiones iguales.

Por consiguiente, el lugar geométrico de los puntos que se busca se encuentra en las rectas l y l [1].

En lo ulterior necesitaremos (véase el § 8, Parte III) dos ugares geométricos importantes en el espacio.

El lugar geométrico de los puntos en el espacio, equidistantes de las caras de un ángulo diedro, es un plano que divide dicho ángulo en dos ángulos diedros iguales (el lector puede convencerse de la validez de esta afirmación). Este plano que divide el ángulo diedro en dos partes iguales se denomina *plano bisectral* del ángulo diedro (análogamente a la bisectriz del ángulo plano).

A continuación es fácil demostrar que *el lugar geométrico de los puntos en el espacio que equidistan de los dos puntos programados A y B es un plano perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.*

Hoy día están muy de moda *los problemas* de planimetría *para la construcción*, es decir, problemas que requieren construir alguna configuración geométrica usando no más que dos instrumentos, el compás y la regla. Por supuesto, en estos problemas no se trata del trazado más exacto del dibujo en cuestión, sino de la descripción del

---

[1] Sin embargo, hay que decir unas palabras sobre el punto B. Si elegimos el propio punto B en calidad del punto M, entonces los triángulos AMB y CMB se degeneran en segmentos, y, a base de esto, puede excluirse el punto B del lugar geométrico buscado. Sin embargo, si se supone que tal triángulo degenerado en segmento tiene un área igual a cero, en este caso también el punto B, hablando formalmente, poseerá la propiedad requerida en los datos del problema, es decir, los triángulos AMB y CMB, al coincidir los puntos M y B, tienen la misma área, que es igual a cero.

algoritmo y del esquema de métodos que permitan efectuar dicha construcción.

El programa escolar no prevé el conocimiento de métodos generales para la resolución de tales problemas (método de simetría, método de semejanza, etc.); los estudiantes tienen que resolver los problemas para la construcción que se reducen directamente a los métodos principales de construcción enumerados en el programa.

Resolviendo los problemas para la construcción, primero debe hacerse un *análisis*, es decir, hallarse la idea que permita cumplir la construcción. Efectuando el análisis y suponiendo que el problema está resuelto, se traza el dibujo de la configuración buscada y se trata de hallar aquellas dependencias entre los datos del problema y los buscados que permitan aplicar los métodos principales conocidos, para la construcción.

Después que se haya encontrado el plan de la resolución del problema, hay que describir detalladamente *el esquema de métodos para la construcción* de la configuración necesaria. Luego es necesario demostrar que la configuración construida satisface realmente todos los requisitos de los datos del problema. En fin, se necesita analizar el problema, es decir, aclarar, si es posible la construcción, cuántas soluciones tiene el problema, etc.

2. *Sobre uno de los lados de un ángulo agudo dado está marcado el segmento BC. Hallar en el otro lado de dicho ángulo un punto desde el cual el segmento BC se vea al ángulo máximo.*

Empecemos por *el análisis* del problema. Supongamos que el segmento BC se encuentra en el lado MO del ángulo MOP, y que el punto A, dispuesto en el lado OP, es el buscado (fig. 78). Esto significa que para otro punto D cualquiera, que se halle en el lado OP, se cumple la condición: $\angle BAC > \angle BDC$. De esta manera, para resolver el problema tenemos que buscar el método de comparación de los ángulos.

Un buen método de comparación de los ángulos nos dan los teoremas sobre la medición de los ángulos cuyos vértices se encuentran en la circunferencia, fuera o dentro del círculo descrito por ésta. Si trazamos una circunferencia que pase por los puntos A, B y C, el ángulo BAC se medirá como la mitad del arco sobre el cual se apoya, y para otro punto D cualquiera que se disponga en OP y fuera de la circunferencia mencionada, el ángulo BDC se medirá por medio de la semidimensionalidad de los arcos en los que se apoya, es decir, BDC será *menor* que el $\angle BAC$.

Ahora está claro que para resolver el problema tenemos que trazar una circunferencia que pase por los puntos B y C, de modo que sea *tangente* al lado OP del ángulo MOP. En este caso el punto de tangencia será el buscado, puesto que todos los demás puntos del lado OP se encontrarán fuera de la circunferencia trazada.

Para hacer *la construcción* no es necesario trazar la propia circunferencia que pase por los puntos B y C y que sea tangente al lado OP, sino que es suficiente hallar el punto de tangencia A. Con este fin encontraremos la distancia entre este punto y el vértice O del ángulo MOP utilizando la propiedad conocida de la tangente y la secante: $OA^2 = OC \cdot OB$.

Así, para efectuar la construcción debe encontrarse la media geométrica de los dos segmentos conocidos OB y OC, y luego colocar este segmento en el lado OP del ángulo MOP a partir del vértice O. El otro extremo del segmento que se coloca nos da el punto buscado.

Realizando todos los razonamientos en orden inverso, se puede *demostrar* que el punto hallado de esta manera será el buscado. *El análisis* del problema demuestra que el problema es siempre resoluble y que tiene una sola resolución.

3. *Se da el punto M dentro del ángulo A. Se requiere trazar una recta l por el punto M de tal manera que forme con dicho ángulo un triángulo de área mínima.*

En primer lugar, realizaremos *el análisis;* supongamos, con fines de certeza, que el ángulo A es agudo.

Sean PN y RS dos rectas que pasan por el punto M (fig. 79). Comparamos las áreas de los triángulos APN y ARS. Construimos los puntos P_1 y R_1 de tal modo que $P_1M = PM$ y $R_1M = RM$; entonces, pasando del triángulo APN al ARS, disminuimos el área, ya que

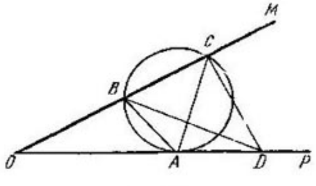


Fig. 78

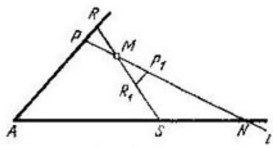


Fig. 79

el área despreciada del triángulo MNS es mayor que la añadida del triángulo PRM que es igual al triángulo P_1R_1M. Es evidente que tal disminución puede hacerse únicamente en el caso en que el punto M divide en dos partes *desiguales* el segmento PN de la recta l, comprendido entre los lados del ángulo.

Así, se debe trazar la recta l por el punto M de tal modo que se cumpla la igualdad $NM = MP$; sólo en este caso resulta imposible disminuir más el área del triángulo ANP. Pero es obvio que en este caso AM es la mediana del triángulo ANP.

Trazando más adelante hasta construir un paralelogramo a base de este triángulo; podemos indicar inmediatamente el método de *construcción* (fig. 80). Trazamos la recta AM más lejos del punto M y marcamos en ella $MB = AM$. Por el punto B trazamos una recta paralela a uno de los lados del ángulo en cuestión, sea AC, hasta que se interseque con su otro lado, AD, en el punto P. La recta buscada l pasa por los puntos P y M.

Para *la demostración* se necesita, de hecho, repetir los razonamientos efectuados durante el análisis. Sea l' una recta arbitraria que pasa por el punto M. Como $\triangle\ MPP' = \triangle\ MNR$ (según el segundo concepto de la igualdad de triángulos), el triángulo APN es equidimensional al cuadrilátero $AP'RN$, cuya área es menor que la del triángulo $AP'N'$.

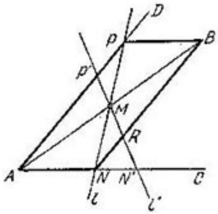


Fig. 80

Si el ángulo A es obtuso, la construcción se efectúa del modo análogo (el lector puede hacerla). *El análisis* del problema no es complejo: es siempre resoluble unívocamente si el ángulo A es menor que el ángulo llano.

Algunas observaciones complementarias sobre la resolución de problemas para la construcción pueden verse en el § 3 de esta Parte.

EJERCICIOS:

1. Hallar el lugar geométrico de los puntos en el plano si se sabe que: a) la diferencia de las distancias de éstos hasta dos rectas L y l de este plano, que se intersecan, es igual (por su valor absoluto) a la magnitud programada $a > 0$; b) la suma de cuadrados de las distancias de los cuales hasta dos puntos A y B de este plano es igual a la magnitud programada a.

2. En una recta se tienen los puntos A y B. Dos circunferencias son tangentes a dicha recta en los puntos A y B respectivamente y tangentes una a la otra en el punto M. Hallar el lugar geométrico de los puntos de M.

3. En un plano se dan tres rectas que se intersecan en pares y no pasan por un punto. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias circunscritas a todos los triángulos posibles cuyos vértices se encuentran en las rectas mencionadas.

4. Hallar en el plano el lugar geométrico de las bases de las perpendiculares trazadas desde el punto A hasta las rectas que pasan por el punto dado B.

5. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de la circunferencia que pasan por el punto A dentro de la circunferencia.

6. Hallar el lugar geométrico de aquellos puntos del plano que las tangentes trazadas de estos puntos a la circunferencia formen entre sí el ángulo α.

7. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos rectilíneos que unen el punto A, dispuesto fuera de la circunferencia, con los puntos de ésta.

8. Se dan dos puntos A y B en un plano. Hallar el lugar geométrico de los puntos de M de este plano, para los cuales $AM \cdot BM \cdot \cos(\angle AMB) = 3/4\, AB^2$.

9. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio equidistantes de los tres puntos A, B, C, si éstos: a) no se disponen en una recta; b) se sitúan en una recta.

10. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que se encuentran a la distancia a de los dos planos Π y π que se intersecan.

11. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de tres planos que se intersecan en pares sin pasar por una misma recta y que son perpendiculares a cierto plano π.

12. Hallar el lugar geométrico de las bases de las perpendiculares bajadas desde el punto A a todas las rectas posibles trazadas en el espacio por el punto fijo B.

13. Hallar el lugar geométrico de las proyecciones del punto A a todos los planos posibles que pasan por la recta l en la que no se encuentra el punto A.

14. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos AB en los cuales los puntos A y B se sitúan en diferentes caras de un ángulo diedro agudo.

15. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio por los cuales es imposible trazar una recta que interseque las rectas L y l que se cruzan.

16. En el plano π se encuentra un cuadrado de lado a. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio alejados de los vértices del cuadrado a la distancia l.

17. Se dan el plano π y los puntos A y B dispuestos a un lado del mismo de tal modo que la recta AB no es paralela al plano π. Se consideran todas las esferas posibles que pasen por los puntos A y B y sean tangentes al plano π. Hallar el lugar geométrico de los puntos de tangencia.

18. Se da un cubo de arista a. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos de longitud l, uno de cuyos extremos se sitúa en la diagonal de la cara superior del cubo y el otro, en la diagonal (no paralela) de la cara inferior del cubo (o en las prolongaciones de estas diagonales).

19. Trazar un segmento rectilíneo $\sqrt[4]{a^4+b^4}$, si se conocen los segmentos a y b.

20. Construir un triángulo con el lado a, la mediana m de otro lado y el radio R de la circunferencia circunscrita.

21. Trazar una circunferencia que sea tangente a la recta l y que pase por los dos puntos A y B situados a un lado de esta recta.

22. Trazar una circunferencia tangente a una circunferencia dada y a una recta dada l en el punto fijo A.

23. Se da un círculo cuyo diámetro es AB. Determinar el lugar del punto C en el diámetro AB de tal modo que la suma de las áreas de los círculos, cuyos diámetros son los segmentos rectilíneos AC y BC, sea igual a 2/3 del área del círculo dado.

24. Se tiene el triángulo ABC. Construir el rectángulo $ABDE$, uno de cuyos lados sea igual al lado AB del triángulo, mientras que su área junto con el área del cuadrado construido en el lado BD sea igual al área del triángulo dado.

25. Se da una pirámide cuya base es un cuadrado y la altura es igual a la arista de la base. Construya un prisma triangular, cuya altura es igual al segmento dado h, que su base sea un triángulo rectángulo isósceles y cuyo volumen sea igual al de la pirámide dada. Describir el método de construcción de la base de dicho prisma con ayuda de un compás y una regla.

§ 3. APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA Y EL ÁLGEBRA EN LA GEOMETRÍA

Algunos estudiantes opinan que hay problemas puramente "algebraicos", "geométricos" y "trigonométricos", cuyos métodos de resolución no tienen nada común. Por esta causa tratan de obtener la solución de los problemas de Geometría empleando medios "puramente geométricos".

Entre tanto, esta opinión, que provoca la desmembración artificial de las matemáticas elementales, es absolutamente errónea. Para resolver muchos problemas conviene aplicar todo el caudal de conocimientos de las diversas partes de las matemáticas elementales [1]. En algunos casos la aplicación de los métodos o fenómenos trigonométricos o algebraicos para la solución de los problemas de Geometría resulta inevitable, ya que éstos pueden carecer de otras resoluciones "puramente geométricas".

En tales problemas la Geometría, la Trigonometría y el Algebra han de actuar como "un frente único". Esta es la razón, por la cual los estudiantes, que saben combinar los fenómenos de las diversas ramas de la Geometría, Trigonometría y Algebra y dominan activamente todo el curso de matemáticas de la escuela, pueden resolver con éxito estos problemas.

Es sabido que es muy útil la aplicación de la Trigonometría a la resolución de los llamados "problemas de cálculo" de Geometría. Con razón se incluye en el cuestionario de los exámenes un punto especial "Aplicación de la Trigonometría a resolución de los problemas de Geometría". Si no existieran relaciones trigonométricas entre los lados y ángulos de diversas figuras, no podríamos resolver muchos problemas.

Sin embargo, el uso de la Trigonometría en la resolución de los problemas de Geometría no se reduce sólo a la resolución de triángulos y a la simplificación de las fórmulas obtenidas, ya que sus posibilidades son mucho más amplias. En particular, resulta a veces muy útil la idea de *hallar el ángulo partiendo de las relaciones trigonométricas*. Por desgracia, este método de solución de los problemas de Geometría es prácticamente desconocido para muchos estudiantes; por esta causa lo ilustraremos con dos ejemplos.

1. *Se toma un punto M dentro del ángulo agudo α. Las bases P y Q de las perpendiculares trazadas desde el punto M a los lados del ángulo distan del vértice O del ángulo a las magnitudes $OP = p$, $OQ = q$. Hallar los ángulos en que la recta OM divide el ángulo α.*

Designemos la distancia OM (desconocida para nosotros) por medio de x y los ángulos agudos POM y QOM en que la recta OM divide el ángulo α, mediante φ_1 y φ_2 respectivamente (fig. 81). La magnitud del ángulo φ_1 puede ser expresada valiéndonos del triángulo rectángulo MPO por p y x:

$$\cos\varphi_1 = \frac{p}{x}, \text{ es decir, } \varphi_1 = \operatorname{arc}\cos\frac{p}{x}.$$

En este caso del triángulo rectángulo MQO, tomando en consideración que $\varphi_2 = \alpha - \varphi_1$, obtenemos:

$$\frac{q}{x} = \cos\varphi_2 = \cos(\alpha - \varphi_1) = \cos\alpha\cos\left(\operatorname{arc}\cos\frac{p}{x}\right) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc}\cos\frac{p}{x}\right).$$

---

[1] Recordemos que en el problema 19 del § 8, Parte I, hemos indicado la solución de dicho problema algebraico con el uso de ideas geométricas.

Calculando las expresiones obtenidas (véase § 5, Parte II), hallamos que

$$q = p\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\sqrt{x^2 - p^2}.$$

De esta ecuación se podría determinar x y luego, de los triángulos rectángulos MPO y MQO hallar los $\cos\varphi_1$ y $\cos\varphi_2$. Pero es menos

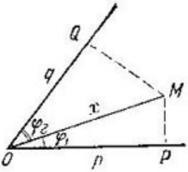


Fig. 81

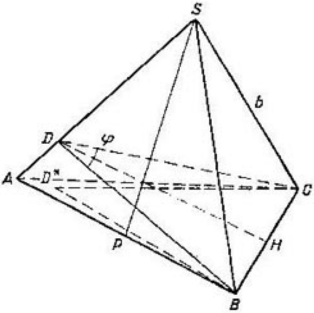


Fig. 82

complicado proceder de otro modo. Señalemos que $\sqrt{x^2 - p^2} = MP$ (del triángulo rectángulo MPO), y por eso

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{MP}{OP} = \frac{\sqrt{x^2 - p^2}}{p} = \frac{q - p\cos\alpha}{p\operatorname{sen}\alpha}.$$

Así obtenemos definitivamente

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{q - p\cos\alpha}{p\operatorname{sen}\alpha}, \quad \varphi_2 = \alpha - \varphi_1{}^{1)}.$$

2. *La arista lateral de una pirámide triangular regular es igual a b, el ángulo entre las caras laterales es igual a φ. Hallar la magnitud del lado de la base.*

Sea la pirámide $SABC$ regular; $AS = BS = CS = b$ (fig. 82). Tracemos desde los puntos B y C las alturas BD_1 y CD_2 de los triángulos ASB y ASC. Demostremos que les servirá de base un punto común $D_1 = D_2 = D$. En efecto, $\triangle SBD_1 = \triangle SCD_2$, y por lo tanto las distancias entre el vértice S y la base de las alturas trazadas al lado AS en cada uno de estos triángulos serán iguales.

De aquí se deduce que BDC es un ángulo lineal de un ángulo diedro entre las dos caras, es decir, $\angle BDC = \varphi$.

---

1) El lector puede convencerse, al hacer cálculos, de que $\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{p - q\cos\alpha}{q\operatorname{sen}\alpha}$.

Tracemos la apotema SP de la pirámide y la altura DH del triángulo isósceles BDC. En este caso es evidente que $AB = 2AP = 2b \cos (DAP)$, que nos permite determinar el ángulo DAP. Por ser agudo este ángulo (como un ángulo a la base de la cara lateral de una pirámide triangular regular), refiriéndonos al triángulo BAD, podemos anotar que

$$\angle DAP = \operatorname{arcsen} \frac{BD}{AB}.$$

A continuación, del triángulo BDH obtenemos:

$$BD = \frac{BH}{\operatorname{sen}(\varphi/2)} = \frac{AB}{2\operatorname{sen}(\varphi/2)}.$$

Por consiguiente,

$$AB = 2b \cos\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}(\varphi/2)}\right)\right].$$

Simplificando esta expresión (véase § 5, Parte II), encontramos

$$AB = b\sqrt{4 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\varphi/2)}}. \tag{1}$$

A base de la respuesta obtenida (1) conviene hacer la observación siguiente. Por lo común, se trata de reducir la respuesta en los problemas de Geometría a la llamada forma "cómoda para la logaritmación". Es fácil representar el segundo miembro de la igualdad (1) en la forma:

$$AB = \frac{2b}{\operatorname{sen}(\varphi/2)} \sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}, \tag{2}$$

pero esta representación no es obligatoria.

A propósito, la tradición de dar la respuesta "en forma cómoda para la logaritmación", en muchos casos resulta inútil para la anotación más simplificada de la respuesta. En contraste con la opinión conocida, tampoco es la más cómoda para el cálculo con valores concretos de las magnitudes dadas en el problema. No es difícil convencerse de que, al efectuar tales cálculos, la respuesta se obtiene más rápida y simplemente valiéndonos de la fórmula (1) en comparación con la fórmula (2).

Al resolver estos problemas, muchos estudiantes no sólo recurren a argumentos y cálculos necesarios sino también tratan de analizar con más detalles la fórmula obtenida. Este análisis, como regla, consiste en la búsqueda de su esfera de definición.

Se procede más o menos de la forma siguiente. Es obvio que la fórmula (1) tiene el sentido únicamente si se observa la condición

$$4 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\varphi/2)} > 0. \tag{3}$$

Puesto que el ángulo φ entre las caras laterales (según los razonamientos geométricos evidentes) debe ser comprendido en los límites de 0° a 180°, en este caso $0° < \varphi/2 < 90°$, entonces sen $(\varphi/2) > 0$. Por esta razón la desigualdad (3) puede escribirse en la forma de sen $(\varphi/2) > 1/2$, de donde obtenemos que la fórmula (1) tiene sentido para $60° < \varphi < 180°$.

Es fácil convencerse que dicha condición se cumple para cualquier pirámide triangular regular. En efecto, según la conocida propiedad de la perpendicular y las oblicuas, $BD < BA$ (fig. 82). Por eso, si se traza un triángulo isósceles BD^*C con los lados BC, $BD^* = BD$, $CD^* = CD$ (igual al triángulo BDC) en el plano de la base ABC de la

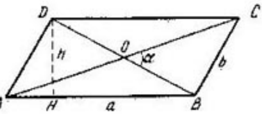


Fig. 83

pirámide, el punto D^* se hallará *dentro* del triángulo ABC. De aquí, después de un simple cálculo de los ángulos, concluimos que $\angle BDC = \angle BD^*C > \angle BAC = 60°$.

Por consiguiente, *en la pirámide triangular regular el ángulo diedro a la arista lateral es siempre mayor de* 60°. Esto significa que la fórmula (1) es siempre válida para cualquier pirámide triangular regular.

Cabe señalar que este análisis de la respuesta no es un elemento obligatorio de la resolución del problema (si, claro está, esta condición no se estipula especialmente en el problema).

No obstante, muchos estudiantes realizan este análisis. A menudo se comete un error lógico: se acepta como cierto que la configuración de que se trata en el problema, existe precisamente con aquellos valores de las letras con los cuales tiene sentido la fórmula definitiva. En realidad, el análisis de las condiciones de la existencia de la configuración geométrica *no es*, de ningún modo, *equivalente* al análisis simple de la respuesta obtenida.

Con el fin de aclarar esta distinción, examinaremos el problema siguiente.

3. *En el paralelogramo $ABCD$ el lado mayor $AB = a$ y el menor $BC = b$, el ángulo agudo entre las diagonales es α. Hallar la distancia entre los lados paralelos AB y DC.*

Compongamos dos expresiones distintas para el área S del paralelogramo (fig. 83). Por una parte,

$$S = 4S_{\triangle BOC} = 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \operatorname{sen} \alpha,$$

donde α es el ángulo agudo entre las diagonales. Para determinar el producto $OB \cdot OC$ apliquemos el teorema de los cosenos al triángulo BOC:

$$b^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos \alpha$$

y la propiedad conocida del paralelogramo

$$OB^2+OC^2=1/4\,(DB^2+AC^2)=1/2\,(a^2+b^2).$$

Obtenemos definitivamente $S=1/2\,(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha$.

Por otra parte, $S=AB\cdot DH$, donde $DH=h$ es la distancia buscada (la altura del paralelogramo). Igualando las dos expresiones para el área S, encontramos que

$$h=\frac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\alpha. \tag{4}$$

Si buscáramos la esfera de la definición de esta fórmula, veríamos que su segundo miembro tiene sentido, por ejemplo, para todos los valores de $a>0$, $0<b<a$ y $0^\circ<\alpha<90^\circ$. Sin embargo ¿se deduce de aquí que la configuración geométrica en cuestión existe para todos los valores de las letras? Es decir ¿puede construirse un paralelogramo con los lados a y b y el ángulo agudo α entre las diagonales, cualesquiera que sean los valores $a>0$, $0<b<a$ y $0^\circ<\alpha<90^\circ$?

Aplicando a la fórmula (4) los valores, digamos, $a=3$, $b=1$, y $\alpha=45^\circ$, encontraremos que $h=4/3$. Si meditamos un poco, este resultado nos puede parecer algo extraño. En efecto, si examinamos el triángulo rectangular AHD (fig. 83) su hipotenusa $AD=1$ debe ser más corta que el cateto $DH=4/3$. Esto sólo puede significar que no existe el paralelogramo con los valores de a, b y α dados.

Es fácil convencerse directamente de lo expuesto. Como el área del paralelogramo con los lados a y b no supera el área del rectángulo con las mismas longitudes de los lados, debe cumplirse la desigualdad $1/2\,(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha\leqslant ab$, que puede apuntarse también en la forma siguiente:

$$0<\alpha\leqslant\operatorname{arc\,tg}\frac{2ab}{a^2-b^2}. \tag{5}$$

En otras palabras, *los valores a, b y α no deben ser cualesquiera, independientemente una de otra, ya que han de satisfacer la desigualdad* (5).

De este modo, son posibles los casos en que la configuración geométrica del problema existe no para todos los valores de las letras que abarca la definición de la respuesta. Por lo tanto, el análisis de un problema de Geometría, es decir, la aclaración de las condiciones con las cuales existe la configuración, es una cosa bastante compleja. Por eso en todos los problemas de Geometría sólo se necesita *realizar su resolución, suponiendo que exista la configuración geométrica de que se trata en el problema* (salvo, como es natural, el caso en que se estipula especialmente la necesidad de efectuar el análisis de esta índole).

Resolviendo los problemas de Geometría, los estudiantes se encuentran a veces con relaciones de forma extraña que se obtienen como resultado de la aplicación de las fórmulas trigonométricas conocidas. Estas "extrañezas", que son difíciles de razonar e interpretar debidamente provocan dudas en los estudiantes.

Entre tanto, es muy importante entender el sentido verdadero de estas relaciones de forma no común que surgen de súbito. El asunto consiste en que a menudo las propias fórmulas "piensan" por nosotros, son más "cautelosas", tomando en consideración los casos que no hemos prestado la atención debida.

Aquí está, por ejemplo, un problema en que las fórmulas tendrán en cuenta la condición que no se utiliza en nuestra resolución y que muchos estudiantes no la notan.

4. *En un triángulo acutángulo ABC con los ángulos α y β y los vértices A y B respectivamente está inscrita la circunferencia de radio r. En paralelo con BC se ha trazado una tangente a esta circunferencia, que interseca los lados AB y AC del triángulo en los puntos K y M, respectivamente. Hallar el área del trapecio $BCMK$.*

De acuerdo con la fórmula para el área del trapecio tenemos que hallar las bases BC y MK y su altura (fig. 84). Es evidente que la altura del trapecio equivale al diámetro $2r$ de la circunferencia inscrita.

La primera etapa de la solución consiste en la búsqueda de la base BC del trapecio, que es el lado del triángulo dado. Si desde el centro O

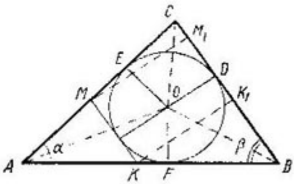


Fig. 84

de la circunferencia inscrita, es decir, desde el punto de intersección de las bisectrices CO y BO trazamos una perpendicular OD al lado BC, en este caso $OD = r$. Entonces de los triángulos rectángulos BOD y COD obtendremos respectivamente

$$BD = r \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}, \quad CD = r \operatorname{cotg} \frac{\pi-\alpha-\beta}{2} = r \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2},$$

y, por consiguiente,

$$BC = r\left(\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}\right). \tag{6}$$

La segunda etapa de la resolución es el proceso de hallar la base MK del trapecio. Tracemos las perpendiculares MM_1 y KK_1 desde los puntos M y K hasta el lado BC; es evidente que $MM_1 = KK_1 = 2r$. Puesto que

$$MK = M_1K_1 = BC - BK_1 - CM_1, \tag{7}$$

es suficiente encontrar los segmentos rectilíneos BK_1 y CM_1. Es posible efectuar esto valiéndonos de los triángulos rectángulos BKK_1 y CMM_1 respectivamente:

$$BK_1 = 2r\operatorname{cotg}\beta; \quad CM_1 = 2r\operatorname{cotg}(\pi - \alpha - \beta) = -2r\operatorname{cotg}(\alpha + \beta). \qquad (8)$$

El signo negativo aparecido en la última fórmula suele sorprender a los estudiantes. ¿Qué sentido geométrico tiene este signo? Naturalmente, no significa ninguna "longitud negativa". Aun más, es este signo negativo aparecido automáticamente el que asegura el valor positivo para el largo del segmento CM_1. Siendo acutángulo según los datos del problema el triángulo ABC, por eso $\alpha + \beta > \pi/2$, es decir, $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) < 0$. De este modo, la fórmula toma en consideración la suposición indicada en los datos del problema sobre el triángulo ABC, que hemos olvidado estipular o utilizar evidentemente.

¿A qué se debe la aparición del signo negativo? ¿De qué modo fue tomado en consideración la condición de que el triángulo es acutángulo? Examinemos una vez más con atención todos los razonamientos y cálculos realizados. Desde luego, al trazar la fig. 84 antes de empezar la resolución, hemos dibujado intencionalmente el triángulo ABC como acutángulo, de acuerdo con los datos del problema. Pero ¿dónde lo usamos después? Claro está que lo hemos aprovechado al bajar la perpendicular MM_1 y tomando por cierto que el punto M_1 se sitúa en el lado BC, ya que sólo en este caso es válida la igualdad (7). Si el ángulo ACB fuera obtuso, la base de la perpendicular M_1 se hallaría en la prolongación del lado BC tras el punto C, y la fórmula (7) tendría la forma $MK = M_1K_1 = BC - BK_1 + CM_1$ (el lector puede convencerse de esto trazando el dibujo correspondiente).

Por consiguiente, no hay nada sorprendente en la aparición del signo negativo en la fórmula para CM_1: la fórmula toma en consideración aquello que hemos aceptado como cierto sin estipular o argumentar.

Para cumplir la solución del problema nos quedan por realizar algunos cálculos. Al sustituir los términos de las expresiones (6) y (8) en la (7) determinamos la base MK del trapecio, después de lo cual el área S del trapecio $BCMK$ se halla mediante la fórmula bien conocida

$$S = 2r^2\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\beta} + \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\right]. \qquad (9)$$

Conviene recordar que en los problemas de Geometría la respuesta puede obtenerse de distintas formas, en muchos casos no semejantes; esto depende de la idea en la cual se basa la solución o simplemente del camino tomado para las transformaciones.

Por ejemplo, si la base MK se busca de otra manera, la respuesta se obtiene de una forma diferente que en la (9). En efecto, $\triangle ABC \backsim \triangle AKM$ (fig. 84) y por eso, $BC : MK = H : h$; donde H y h son las alturas de los triángulos ABC y AKM respectivamente, bajadas desde el vértice común A. Como $h = H - 2r$, de esta proporción obtenemos $MK = BC - (2r \cdot BC/H)$. Puesto que el área del triángulo ABC es $1/2\ H \cdot BC = pr$, donde p es el semiperímetro (véase la fórmula (4) del § 1, Parte III), entonces $H = 2pr/BC$, y solamente nos queda por determinar p. Trazando la bisectriz AO y las perpendiculares OE y OF a los lados del triángulo ABC, refiriéndonos al triángulo AOE, encontramos $AE = r \operatorname{cotg}(\alpha/2)$ y por tanto (de acuerdo con las tangentes a la circunferencia)

$$p = 1/2\,(AB + BC + CA) = AE + BD + DC.$$

De este modo se determina la base MK del trapecio y luego también su área

$$S = r^2\left(\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left[1 + \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}\right]. \quad (10)$$

Claro está que no importa en qué forma se da la respuesta, a pesar de que se desea que se presente en la forma más sencilla posible. Todas estas formas de respuesta pueden ser transformadas una en otra, lo que demuestra su equivalencia y ausencia de errores en cada una de

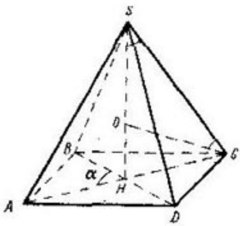


Fig. 85

las soluciones (el propio lector puede hallar el método de transformar la fórmula (10) en la fórmula (9)). Por eso no hay que tener prisa en considerar como errónea la resolución que conduce a la expresión definitiva, distinta de la respuesta dada para el problema.

En el problema que sigue la fórmula nos "avisa" de que en distintas pirámides el centro de la esfera circunscrita puede situarse tanto dentro de la pirámide como fuera de ésta (o en el plano de su cara). Este fenómeno general (véase el § 8, Parte III) es bien conocido; sin embargo, muchos estudiantes, al empezar la resolución de problemas, lo olvidan y no examinan todas las configuraciones posibles en el caso general.

5. *Un rectángulo de ángulo α entre las diagonales sirve de base de la pirámide; todas las aristas laterales forman con el plano de la base un mismo ángulo φ. Determinar la distancia entre el centro de la esfera circunscrita y el plano de la base de la pirámide y hallar el volumen de la pirámide si el radio de la esfera circunscrita a ésta es igual a R.*

Sea dada la pirámide $SABCD$ (fig. 85), su base es un rectángulo. Tracemos la altura de la pirámide SH; en este caso según los datos $\angle HAS = \angle HBS = \angle HCS = \angle HDS = \varphi$, por eso (ya que $\triangle ASH = \triangle BSH = \ldots$) todas las aristas laterales son iguales y H es el punto de intersección de las diagonales del rectángulo. Como el centro O de la esfera circunscrita debe equidistar de todos los vértices, se encuentra en la perpendicular al plano $ABCD$ situada en el centro del rectángulo, es decir, en la altura SH.

Examinemos los triángulos CHS y COS. Puesto que $\angle CSH = 90° - \varphi$ y el triángulo COS es isósceles, por la propiedad del ángulo externo tenemos $\angle COH = 180° - 2\varphi$. Resolviendo el triángulo COH hallamos la distancia del centro O al plano de la base:

$$OH = R\cos(180° - 2\varphi) = -R\cos 2\varphi. \tag{11}$$

El signo negativo aparecido aquí merece la atención particular. ¿Qué significa? El asunto consiste en que, al trazar la fig. 85 hemos supuesto que el centro de la esfera circunscrita está situada en el interior de la pirámide y efectuábamos la resolución con esta suposición no evidente (los datos del problema no contienen tal suposición). No obstante, el centro de la esfera circunscrita no debe estar siempre dentro de la pirámide, y la fórmula nos recuerda esto.

Precisamente, el centro de la esfera circunscrita se ubica dentro de la pirámide si la altura de ésta supera la mitad de la diagonal del rectángulo (dentro del segmento SH se hallará el punto O que equidista de C y S), es decir, si $\varphi > 45°$. Pero en este caso $\cos 2\varphi < 0$ y,

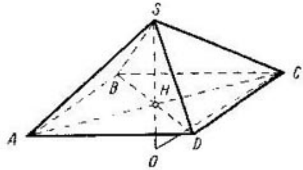


Fig. 86

por consiguiente [véase (11)], $OH > 0$. Si el centro de la esfera circunscrita se sitúa *en la base* de la pirámide coincidiendo con el punto H, la altura de la pirámide es igual a la mitad de la diagonal del rectángulo; entonces $\varphi = 45°$ y por lo tanto $OH = 0$. En fin, si el centro de la esfera circunscrita está *fuera* de la pirámide (fig. 86), $\varphi < 45°$ y no puede buscarse OH valiéndonos de la fórmula (11). De esas consideraciones se obtiene que $\angle COH = 2\varphi$, de donde se deduce que la distancia entre el punto O y el plano de la base OH es igual a $R\cos 2\varphi$ (la magnitud positiva)[1].

[1] No es difícil comprender que la distancia entre el centro O de la esfera circunscrita y el plano de la base $ABCD$ de la pirámide que se considera es igual a $R \times |\cos 2\varphi|$, independientemente de la disposición del centro O.

Pasemos al cálculo del volumen. Del triángulo COH hallamos que $HC = R$ sen $(180° - 2\varphi) = R$ sen 2φ es la igualdad válida para las figs. 85 y 86. Por esta razón el área de la base es:

$$S_{ABCD} = 4S_{\triangle DHC} = 2R^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi \operatorname{sen} \alpha;$$

y el ángulo α puede ser agudo u obtuso. Con el fin de calcular la altura de la pirámide examinemos tres casos. Si $\varphi > 45°$, es decir, el centro O se encuentra dentro de la pirámide (fig. 85), entonces

$$SH = SO + OH = R - R\cos 2\varphi = 2R \operatorname{sen}^2 \varphi;$$

si $\varphi < 45°$, es decir, el centro O se halla fuera de la pirámide (fig. 86), entonces

$$SH = SO - OH = R - R\cos 2\varphi = 2R \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

Pero con $\varphi = 45°$, $SH = SO = R = 3R$ sen^2 $45°$.

Así, cualquiera que sea el valor del ángulo φ, $0° < \varphi < 90°$, llegamos al mismo resultado:

$$V = 4/3\, R^3 \operatorname{sen}^2 2\varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \alpha.$$

Los métodos algebraicos tienen gran importancia para la resolución de los problemas de Geometría. El Algebra, en muchos casos junto con la Trigonometría, permite resolver una gran cantidad de problemas complejos.

La esencia del acercamiento algebraico a los problemas de Geometría consiste en que se componga de consideraciones geométricas una ecuación para cierta magnitud y después se resuelva o se investigue por medios algebraicos. Naturalmente, queda todavía por determinar una u otra interpretación geométrica del resultado algebraico obtenido.

Las relaciones métricas en el triángulo y en el círculo, las fórmulas para la resolución de triángulos rectangulares, los teoremas de senos y cosenos, etc., presentan grandes posibilidades para el uso del Algebra en la Geometría.

Cabe señalar que los problemas a resolver por el método algebraico requieren con frecuencia cálculos bastante prolongados. Por eso los cálculos y respuestas voluminosos no deben ser motivo de asombro. Por lo general, los cálculos necesarios en tales problemas son sencillos desde el pundo de vista lógico y accesibles para todo aquel que conoce las fórmulas fundamentales de la Trigonometría y el Algebra, que conoce la técnica de transformaciones algebraicas y trigonométricas y se ha acostumbrado a cumplir los cálculos puntual y atentamente.

6. *En el triángulo ABC el ángulo A equivale a α y el lado que se le opone es igual a a. Hallar los dos lados restantes si se sabe que el lado a es la media geométrica de los radios de los círculos inscrito y circunscrito de dicho triángulo.*

Reduzcamos la resolución del problema al sistema algebraico. Con este fin compongamos la cantidad necesaria de ecuaciones independientes. Designemos por b y c las longitudes de los lados del triángulo ABC opuestos respectivamente a los ángulos B y C. Las magnitudes b y c son las incógnitas que nos interesan.

Según el teorema de los cosenos, la primera ecuación será:

$$b^2+c^2-2bc\cos\alpha=a^2. \tag{12}$$

Para obtener la segunda ecuación apliquemos la relación de los datos del problema: $a=\sqrt{Rr}$, donde R y r son los radios de los círculos circunscrito e inscrito respectivamente. Recordando las expresiones conocidas para estos radios [fórmulas (3), (4) del § 1, Parte III] y para el área del triángulo, podemos anotar una cadena de igualdades

$$a^2=rR=\frac{2S}{a+b+c}\cdot\frac{a}{2\operatorname{sen}A}=\frac{a}{(a+b+c)\operatorname{sen}A}\cdot\frac{1}{2}bc\operatorname{sen}A=\frac{abc}{2(a+b+c)},$$

de donde encontramos la segunda ecuación:

$$bc-2a(b+c)=2a^2. \tag{13}$$

Así, hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones (12) y (13) con dos incógnitas b y c. Ahora nos queda resolver este sistema que es un problema puramente algebraico.

Si escribimos de nuevo la ecuación (12) en la forma $(b+c)^2-$ $-2bc(1+\cos\alpha)=a^2$ y sustituimos aquí la expresión para bc de la ecuación (13), obtenemos la ecuación cuadrática con respecto a $b+c$:

$$(b+c)^2-8a\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot(b+c)-\left(8a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+a^2\right)=0, \tag{14}$$

de donde

$$b+c=a\left(1+8\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) \tag{15}$$

(omitimos la otra raíz, la negativa, de la ecuación (14), ya que carece de sentido geométrico). Ahora de la ecuación (13) determinamos que

$$bc=4a^2\left(1+4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right). \tag{16}$$

De las relaciones (15) y (16) es obvio que b y c son raíces de la ecuación cuadrática

$$z^2-a\left(1+8\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)z+4a^2\left(1+4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=0.$$

Resolviendo esta ecuación hallamos

$$z_{1,2}=\frac{a}{2}\left[5+4\cos\alpha\pm\sqrt{16\cos^2\alpha+8\cos\alpha-23}\right]. \tag{17}$$

Ahora para b puede tomarse, por ejemplo, el signo "más" y para c, el signo "menos"; otra combinación de los signos proporciona de hecho o el mismo triángulo pero con otra designación de los lados. Hemos cumplido la resolución ya que hemos hallado las longitudes requeridas b y c de los lados del triángulo. A pesar de que el problema no requiere ningunos análisis complementarios, algunos estudiantes aclaran las condiciones con las cuales las fórmulas (17) tienen sentido geométrico.

Es evidente que estas fórmulas tienen sentido geométrico únicamente en el caso en que bajo la raíz se encuentra un número no negativo y, además, $z_1>0$, $z_2>0$. El trinomio $16x^2+8x-23$ (sus raíces se determinan fácilmente) no es negativo para $x\leqslant(-1-\sqrt{24})/4$, ni para $x\geqslant(\sqrt{24}-1)/4$. Enunciando aquí la condición para el ángulo α los estudiantes suelen cometer varios errores que prueban su incapacidad para resolver las desigualdades trigonométricas. En realidad, no es negativa la expresión que se halla bajo la radical en (17) si

$$0<\alpha\leqslant\arccos\frac{\sqrt{24}-1}{4} \tag{18}$$

(no se olvide que α es un ángulo del triángulo y por lo tanto, solamente nos interesan los valores $0<\alpha<\pi$). Después es fácil convencerse que para los valores de α indicados en (18) las dos raíces (17) son positivas, es decir, tienen sentido geométrico [1].

7. *Se tienen dos circunferencias concéntricas de radios r y R ($R>r$). Hallar el lado del cuadrado cuyos dos vértices se encuentran en la circunferencia de radio r y los otros dos, en la circunferencia de radio R. ¿Con qué relación entre r y R:* a) *es posible la solución*; b) *hay una sola solución?*

Señalemos, ante todo, que la configuración geométrica a que hacen referencia en los datos del problema no existe con cualesquier radios de dichas circunferencias. En efecto, si R es "considerablemente mayor" de r, es fácil imaginar que no puede existir un cuadrado cuyos dos vértices se encuentren sobre una circunferencia y los otros dos, en la otra. Además, está claro, que para ciertos valores de R y r pueden existir dos cuadrados [2] dispuestos del modo requerido (fig. 87). Por fin, no se puede garantizar que es imposible un caso en que haya incluso más de dos cuadrados de esta índole.

De los razonamientos mencionados se deduce que la resolución no puede comenzarse por la ejecución del dibujo. En primer lugar, al cumplir el dibujo nos limitaremos al caso en que la configuración *existe* y no podremos decir nada cuando es imposible. En segundo lugar, ya sabemos que la configuración, en términos generales, no es única

[1] Subrayemos (compárense los problemas 2 y 3) que hemos aclarado sólo las condiciones con las cuales las fórmulas (17) *pueden tener* sentido geométrico, pero queda pendiente la cuestión de si *existe* o no en realidad una configuración geométrica para todas las α que satisfacen la condición (18).

[2] Se tiene en cuenta que existen dos cuadrados con lados *diferentes*. Carece de sentido distinguir los cuadrados que satisfacen los datos del problema y cuyos lados tienen la misma longitud.

y por esta razón tenemos que trazar *todas* las posibilidades, pero no sabemos exactamente cuántas son estas posibilidades.

Por lo tanto elegimos otro camino de solución que no usa ningún dibujo de configuración en concreto sino se reduce a construcciones geométricas. Es absolutamente obvio que en caso de existir un cuadrado que satisfaga los datos del problema, uno de sus lados se encuentra en la cuerda de la circunferencia mayor que interseca la circunferencia menor (por ejemplo, de tal cuerda puede servir la prolongación del lado del cuadrado uno de cuyos extremos se sitúa en la circunferencia mayor y el otro, en la menor). Y al contrario, si podemos demostrar que en ninguna cuerda de la circunferencia mayor, que interseca la circunferencia menor, no puede hallarse el lado del cuadrado requerido, esto significara que (con R y r dados) la configuración buscada es imposible.

De este modo, tenemos que obtener las condiciones *necesarias* y *suficientes* de que en cierta cuerda de la circunferencia mayor, que interseca la circunferencia menor, se encuentra uno de los lados del cuadrado que satisface los datos del problema. Sea BC (fig. 88) una cuerda arbitraria de la circunferencia mayor, que interseca la circunferencia menor en cierto punto A. Esta cuerda se determina unívocamente por la longitud h de la perpendicular OP bajada a la misma desde el centro O de las circunferencias.

Designemos por x la longitud del segmento AC y por y, la del segmento AB. Es evidente que el lado del cuadrado que nos interesa puede encontrarse en la cuerda BC en el caso y sólo en el caso en que $x = 2h$

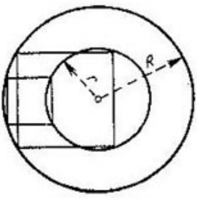


Fig. 87

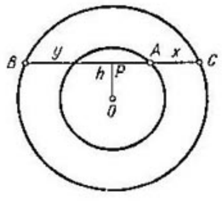


Fig. 88

o $y = 2h$. Por consiguiente, si (con R y r dados) se halla siquiera un valor de h que satisfaga la condición $x = 2h$ o $y = 2h$, entonces la configuración requerida es posible; si no existe tal valor de h (con R y r dados) el problema no tiene solucón.

Puesto que

$$x = CP - AP = \sqrt{R^2 - h^2} - \sqrt{r^2 - h^2},$$
$$y = BP + PA = \sqrt{R^2 - h^2} + \sqrt{r^2 - h^2},$$

la condición obtenida, necesaria y suficiente, para resolver el problema, puede enunciarse del modo siguiente: la configuración necesaria para nosotros tiene lugar cuando los valores h (positivos) son tales que satisfacen por lo menos a una de las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\sqrt{R^2-h^2}-\sqrt{r^2-h^2}=2h, \\ &\sqrt{R^2-h^2}+\sqrt{r^2-h^2}=2h, \end{aligned} \tag{19}$$

y no tiene lugar para otro valor cualquiera de h. En particular, si ninguna de las ecuaciones (19) tiene raíces positivas, entonces no existe la configuración requerida [1].

Las ecuaciones irracionales (19) se resuelven fácilmente en paralelo. Su RVA (recinto de valores admisibles) (véase § 7, Parte I) se compone de tales valores de h que $h \leqslant r$ (ya que $R > r$). De la condición $R > r$ se deduce que $\sqrt{R^2-h^2} > \sqrt{r^2-h^2}$, de modo que los dos miembros de ambas ecuaciones no son negativos. Por lo tanto, elevándolos al cuadrado obtendremos, después de las transformaciones evidentes, dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -2\sqrt{(R^2-h^2)(r^2-h^2)}&=4h^2-(R^2+r^2), \\ 2\sqrt{(R^2-h^2)(r^2-h^2)}&=4h^2-(R^2+r^2), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

las cuales, de acuerdo con el RVA son equivalentes a las ecuaciones correspondientes (19). Al elevar al cuadrado cada una de las ecuaciones (20) llegaremos en ambos casos, después de algunas transformaciones sencillas, *a la misma* ecuación:

$$32h^4-8(R^2+r^2)h^2+(R^2-r^2)^2=0. \tag{21}$$

Ahora, en principio, tenemos que hallar las raíces de esta ecuación bicuadrada y, de conformidad con la metodología general para resolver las ecuaciones irracionales, seleccionar aquéllas que satisfacen a la primera ecuación (20); éstas son las raíces para las cuales $h \leqslant r$ y $4h^2-(R^2+r^2) \leqslant 0$ y las que satisfacen a la segunda ecuación (20) y que son raíces para las cuales $h \leqslant r$ y $4h^2-(R^2+r^2) \geqslant 0$.

Resulta que esta selección bastante larga puede evitarse si se toma en consideración la argumentación evidente: no nos interesa en absoluto a qué ecuación (20) pertenece tal o cual raíz de la ecuación (21), ya que esta raíz en cualquier caso nos lleva a la configuración necesaria. Por esto no hay necesidad de efectuar selección alguna, y nuestro problema tiene tantas soluciones como raíces positivas tiene la ecuación bicuadrada (21), que satisfacen a la condición $h \leqslant r$.

Examinemos y resolvamos la ecuación bicuadrada (21). Si el discriminante $D=16\,(6R^2r^2-R^4-r^4)<0$, en este caso la ecuación

[1] Toda raíz positiva de la primera ecuación (19) corresponde a tal posición del cuadrado, en la cual éste no contiene en su interior el centro O, mientras que cualquier raíz positiva de la segunda ecuación (19) corresponde a aquella posición del cuadrado en que éste tiene el centro O en su interior.

(21) no tiene raíces reales y no puede existir la configuración que nos interesa.

Aclaremos, con cuál relación entre R y r sucede este fenómeno; con este fin debe determinarse con cuál relación entre R y r está cumplida la desigualdad $6R^2r^2 - R^4 - r^4 < 0$. Designando R^2/r^2 por ρ reduciremos esta desigualdad a la forma de $\rho^2 - 6\rho + 1 > 0$, de donde es obvio que ésta tiene lugar siendo $\rho < 3 - 2\sqrt{2}$ y para $\rho > 3 + 2\sqrt{2}$. Debido a que nos interesan solamente los valores $\rho > 1$ (ya que $R > r$ según los datos del problema), nos queda solamente $\rho > 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$. Así pues, *si* $R > (1 + \sqrt{2})r$, *resulta imposible la configuración geométrica de que se trata en los datos del problema*, es decir, *éste no tiene soluciones.*

Del modo análogo se demuestra que la desigualdad $D \geqslant 0$ tiene lugar para $r < R \leqslant (1 + \sqrt{2})\,r$, siendo la igualdad $D = 0$ obtenida para $R = (1 + \sqrt{2})\,r$. Designando h^2 por z y reduciendo de esta manera la ecuación (21) a la cuadrática respecto a z, obtenemos:

$$z_{1,2} = \frac{(R^2 + r^2) \pm \sqrt{6R^2r^2 - R^4 - r^4}}{8}, \tag{22}$$

y del teorema de Viéte se deduce que las dos raíces mencionadas son positivas (para $D = 0$ estas raíces coinciden).

Antes de continuar calculando las propias raíces de la ecuación bicuadrada (21) comprobemos si integran los RVA de las ecuaciones iniciales (19). Para este propósito aclaremos si tienen lugar las desigualdades $z_1 \leqslant r^2$, $z_2 \leqslant r^2$, puesto que $0 < z_2 \leqslant z_1$, entonces es suficiente comprobar la desigualdad $z_1 \leqslant r^2$, o sea,

$$\frac{R^2 + r^2 + \sqrt{6R^2r^2 - R^4 - r^4}}{8} \leqslant r^2,$$

o bien

$$\sqrt{6R^2r^2 - R^4 - r^4} \leqslant 7r^2 - R^2. \tag{23}$$

Como en el caso considerado $D \geqslant 0$, es decir, $R \leqslant (1 + \sqrt{2})\,r$, entonces $7r^2 - R^2 \geqslant 7r^2 - (1 + \sqrt{2})^2\, r^2 > 0$ y por ser así, elevando la desigualdad (23) al cuadrado, llegaremos, después de transformaciones no complejas, a la desigualdad equipotencial $2(5r^2 - R^2)^2 \geqslant 0$ la cual, por lo visto, es válida. De esta manera, las raíces de la ecuación bicuadrada (21) (para $D \geqslant 0$) integran los RVA de las ecuaciones (19).

Teniendo en cuenta que solamente nos interesan las raíces positivas de la ecuación (21), hallamos de la (22) que *para* $r < R < (1 + \sqrt{2})\,r$ *el problema tiene dos soluciones que corresponden a los valores*

$$h_{1,2} = \sqrt{\frac{(R^2 + r^2) \pm \sqrt{6R^2r^2 - R^4 - r^4}}{8}},$$

y para $R=(1+\sqrt{2})r$ *tiene una solución única que corresponde al valor*

$$h=\sqrt{\frac{R^2+r^2}{8}}.$$

En este caso, si hay dos soluciones, los lados de los cuadrados son iguales a $2h_1$ y $2h_2$ y si hay una sola, el lado del cuadrado equivale a $2h$ [1].

La Trigonometría y el Algebra son también de uso amplio en la resolución de *los problemas de Geometría para los valores máximo y mínimo*. En estos problemas se examina, habitualmente, un cuerpo geométrico (o una figura) y se requiere determinar sus dimensiones de tal manera que una magnitud relacionada con el cuerpo en cuestión adopte el valor máximo (o mínimo). Para la solución algebraica del

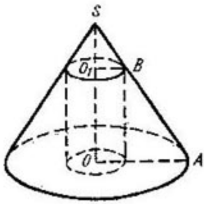


Fig. 89

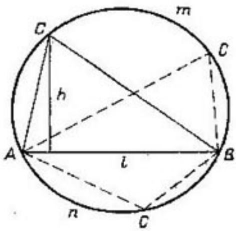


Fig. 90

problema, como regla, se escribe una *función* que enlaza la magnitud que nos interesa, con las dimensiones del cuerpo, y luego se investiga dicha función. De este modo el problema de Geometría se reduce a uno de Algebra, es decir, al estudio de las propiedades de las funciones.

8. *El radio de la base de un cono circular recto es igual a R y su altura equivale a H. ¿Cuál de los cilindros inscritos en este cono tiene la mayor superficie lateral?*

Supongamos que el cilindro con radio r de la base y altura h está inscrito en el cono (véase § 8, Parte III). De la semejanza de los triángulos AOS y BO_1S (fig. 89) se deduce que $r=R(H-h)/H$. El área lateral del cilindro $s=2\pi rh$, es decir,

$$s=\frac{2\pi R}{H}h(H-h).$$

[1] Señalemos que el camino omitido de la solución *por separado* de cada una de las ecuaciones irracioneles (19) nos ofrecería un resultado más interesante desde el punto de vista geométrico. Precisamente, para $r<R<r\sqrt{5}$ los dos cuadrados existentes no contienen el centro O; para $r\sqrt{5}<R<r(1+\sqrt{2})$ uno de los cuadrados contiene el centro y el otro no lo contiene; para $R=r\sqrt{5}$ un cuadrado no contiene el centro, mientras que el lado del otro pasa justamente por este centro.

Es ésta la función que enlaza la magnitud s, que nos interesa, con la altura de cilindro h conocida por nosotros. De acuerdo con las consideraciones geométricas la variable independiente h cambia en el intervalo de $0<h<H$.

Ahora tenemos que hallar el valor máximo de esta función en el segmento indicado de la variación del argumento h. Es un polinomio de segunda potencia, por esto procedemos de modo igual a cuando se suele hallar el valor máximo (o mínimo) del trinomio cuadrático. Precisamente, eliminando el cuadrado exacto anotemos de nuevo la fórmula para s en la forma

$$s=\frac{\pi RH}{H}-\frac{2\pi R}{H}\left(h-\frac{H}{2}\right)^2.$$

En la expresión ilustrada se ve que la función $s=s(h)$ adquiere el valor máximo $1/2\,\pi RH$ para $h=1/2\,H$. Puesto que el valor $h=1/2$ H se encuentra en el intervalo $0<h<H$, por consiguiente, el valor máximo de la superficie lateral $s_{\max}=1/2\,\pi RH$ se obtiene en el caso en que la altura del cilindro inscrito es igual a la mitad de la altura del cono.

9. *En la circunferencia de radio R se dan los puntos A y B que distan a l. ¿ Qué valor máximo puede tener la suma AC^2+BC^2 si el punto C se encuentra en dicha circunferencia?*

Sea C un punto arbitrario de la circunferencia en la cual se dan los puntos A y B (fig. 90). Si designamos el ángulo ACB por α, tendremos según el teorema de los cosenos del triángulo ABC:

$$AC^2+BC^2=l^2+2AC\cdot BC\cos\alpha.$$

Por consiguiente, hay que determinar la posición del punto C en la circunferencia en la cual el producto $AC\cdot BC$ cos α obtiene el valor *máximo* posible.

La cuerda AB divide la circunferencia en dos arcos: el arco AmB, que es mayor que la semicircunferencia, y el arco AnB, que es menor respecto a ésta [1]. Es fácil convencerse que para cualquier posición del punto C en el arco AmB [2] el ángulo α tiene el mismo valor comprendido en los límites de 0° a 90° (puesto que para todo punto C el ángulo ABC es inscrito y se apoya contra el arco AnB, menor que la semicircunferencia), y para cualquier posición del punto C en el arco AnB el ángulo α tiene el mismo valor en los límites de 90° a 180°. Puesto que el coseno de un ángulo obtuso es negativo, nos pueden interesar sólo los puntos C en el arco AmB: en este caso el producto $AC\cdot BC$ cos α es *positivo*.

[1] El caso en que AB es el diámetro de la circunferencia, es decir, cuando $l=2R$, el lector puede examinarlo sin ningunas dificultades. Si $l>2R$, entonces resulta imposible la configuración de que se trata en el problema.

[2] Salvo los extremos del arco que son los propios puntos A y B.

Como ya hemos señalado que para cualquier punto C en el arco AmB el ángulo α tiene *un mismo* valor, a continuación determinaremos la posición del punto C (sobre este arco) en la que el producto $AC\cdot BC$ sea máximo. Utilizando la fórmula $S=1/2\ AC\cdot BC$ sen α para el área S del triángulo ABC podemos escribir la igualdad $AC\times\times BC=2S/\text{sen}\,\alpha$. De aquí se deduce que el producto $AC\cdot BC$ adquiere el valor máximo con tal posición del punto C en el arco AmB en la cual el triángulo ABC tiene el área máxima posible.

Sin embargo, de acuerdo con la fórmula conocida, $S=1/2\ lh$, donde h es la longitud de la perpendicular bajada desde el punto C a la cuerda AB. Por lo tanto, entre todos los triángulos posibles ABC de vértice C sobre el arco AmB tendrá la mayor área aquel triángulo en el cual esta perpendicular tenga la longitud máxima. Pero la perpendicular tendrá la longitud máxima en el caso en que el punto medio del arco AmB se elija en calidad del punto C.

De este modo, la suma AC^2+BC^2 adquiere el valor máximo si en calidad de C se toma *el punto medio del mayor* de los dos arcos en que los puntos A y B dividen la circunferencia; este valor máximo es igual a $4R^2+2R\sqrt{4R^2-l^2}$.

10. *Se quiere hacer una cometa en forma de un prisma recto cuya base es un triángulo rectángulo con una hipotenusa de* 50 cm. *El área de la superficie lateral del prisma es de* 0,96 m².

¿Qué longitud han de tener los lados del triángulo de la base para que la suma de las longitudes de las aristas del prisma sea la mínima?

Designemos los catetos de la base del prisma por x e y, y su arista lateral, por z. Por los datos del problema componemos dos relaciones entre estas dimensiones del prisma:

$$\begin{cases} x^2+y^2=0{,}25; \\ (x+y+0{,}5)\,z=0{,}96. \end{cases} \tag{24}$$

Nos interesa el valor mínimo de la suma $l=2(x+y+0{,}5)+3z$ de todas las aristas del prisma.

La magnitud l es la función de las tres variables x, y, z dependientes unas de otras debido a las ecuaciones (24). Sustituyendo la suma $x+y+0{,}5$ por su expresión por medio de z obtenida de la segunda ecuación (24) representamos a l como función de una sola variable

$$l=\frac{1{,}92}{z}+3z. \tag{25}$$

Determinemos el valor mínimo de esta función. Aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica (véase el § 9, Parte I), puede apuntarse que para cualesquier $z>0$,

$$l=\frac{1{,}92}{z}+3z\geqslant 2\sqrt{\frac{1{,}92}{z}\cdot 3z}=4{,}8.$$

Es decir, el valor mínimo de la función (25) es 4,8; ésta obtiene este valor mínimo cuando $1{,}92/z = 3z$, esto es, siendo $z = 0{,}8$ (solamente nos interesan los valores *positivos* de z).

Este lugar contiene una sutileza lógica. Hemos demostrado que *la función* (25) como la función de la variable z adquiere su valor mínimo 4,8 cuando $z = 0{,}8$. Pero para estar seguros de que es el valor mínimo de *la magnitud geométrica*, o sea, de la suma de las aristas del prisma, tenemos que convencernos de que *existe* un prisma que satisface los datos del problema y cuya arista lateral es $z = 0{,}8$.

En otras palabras, se requiere aclarar también si el sistema (24) es resoluble para $z = 0{,}8$. Si tiene solución, entonces el prisma correspondiente (o prismas, si tiene varias soluciones) es precisamente la solución del problema. Pero si el sistema (24) para $z = 0{,}8$ no tiene soluciones, la suma de las aristas laterales no puede ser igual a 4,8 y tendremos que realizar razonamientos complementarios.

Así, al sustituir $z = 0{,}8$ en el sistema (24), obtenemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}25, \\ x + y = 0{,}7, \end{cases}$$

de donde $x_1 = 0{,}4$, $y_1 = 0{,}3$; $x_2 = 0{,}3$; $y_2 = 0{,}4$. Estas dos soluciones corresponden geométricamente a un mismo prisma [1].

De este modo, la suma de las longitudes de todas las aristas del prisma será la mínima, si los catetos del triángulo de la base son iguales a 30 cm y 40 cm.

Al hacer uso amplio de la Trigonometría y el Álgebra en la solución de los "problemas de cálculo" geométricos, en algunos casos los estudiantes no aplican los métodos algebraicos y trigonométricos para efectuar la demostración de los fenómenos geométricos, para hallar los lugares geométricos, para cumplir unas u otras construcciones. Entre tanto, es difícil sobreestimar la importancia de estos métodos para todos los problemas en cuestión.

Por ejemplo, he aquí un problema en el cual la demostración de la afirmación que nos interesa se obtiene puramente del modo analítico, sin ningunos razonamientos geométricos. Estos ejemplos en que la demostración más simple se obtiene por un cálculo directo, se puede darlos tantos como se quiera.

11. *Por el centro de un triángulo regular se ha trazado una recta arbitraria en el plano de este triángulo. Hay que demostrar que la suma*

[1] No se debe creer que la observación señalada más arriba, acerca de la sutileza lógica, fue superflua ya que todo resultó muy sencillo. Si en los datos del problema la longitud de la hipotenusa fuera igual, supongamos, a 40 cm, el sistema correspondiente

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}16, \\ x + y = 0{,}7 \end{cases}$$

no tendría soluciones reales. Sin embargo, esto no significa que en tal caso no existe el prisma que satisface los datos del problema. Para resolver este problema complejo es necesario, entre todas las z con las cuales el sistema (24) tiene una soulción, hallar tal valor al cual corresponde el valor mínimo posible de función (25).

de los cuadrados de las distancias desde los vértices del triángulo hasta esta recta no depende de la selección de la recta.

Supongamos que la recta l pasa por el punto O, que es el centro del triángulo regular ABC (fig. 91). Bajemos perpendiculares desde los vértices A, B y C a la recta l; sus bases se designan por M, N y P respectivamente. Unamos el punto O con los vértices del triángulo ABC y designemos el ángulo BOP por φ; en este caso $\angle AOM = \angle AOB - \angle BOM = 120° - (180° - \varphi) = \varphi - 60°$ y $\angle COP = 120° - \varphi$. Luego, sea $OA = OB = OC = R$; entonces $BN = R$ sen φ, $AM = R \times$ $\times$ sen $(\varphi - 60°)$, $CP = R$ sen $(120° - \varphi) = R$ sen $(\varphi + 60°)$. Es fácil comprobar ahora que

$$AM^2 + BN^2 + CP^2 = R^2 [\text{sen}^2 \varphi + \text{sen}^2 (\varphi - 60°) + \text{sen}^2 (\varphi + 60°)] = 3/2\, R^2 = 1/2\, a^2,$$

donde a es el lado del triángulo regular.

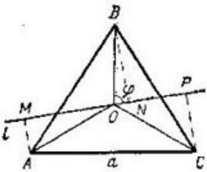


Fig. 91

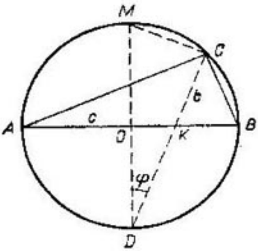


Fig. 92

En conclusión, damos un ejemplo de la aplicación de la Trigonometría y el Álgebra para la solución de *los problemas de construcción*. Algunos estudiantes consideran los problemas de construcción como rompecabezas complicados. En efecto, en el proceso de la resolución de muchos de estos problemas por los medios de una sola Geometría surgen grandes dificultades. Pero el empleo de la Trigonometría y el Álgebra en la solución de estos problemas facilita el proceso.

12. *Construir un triángulo rectángulo valiéndonos de la hipotenusa c y la bisectriz b del ángulo recto.*

Supongamos que el triángulo ABC es el buscado (fig. 92). Circunscribámosle una circunferencia: su diámetro es igual a c. Es fácil demostrar que el punto de intersección D de la prolongación de la bisectriz CK con la circunferencia es el extremo del diámetro DM que es perpendicular a AB. Claro está, el problema quedará resuelto cuando se conozca el segmento CD; calculemos este último.

Designando el ángulo CDM por φ podemos escribir, según el triángulo rectángulo MDC, que $CD = c$ cos φ, y de acuerdo con el triángulo DKO, que $KD = c/(2\cos\varphi)$ ya que $DM = 2DO = c$. Luego componemos la ecuación cuadrática

$$c\cos\varphi - \frac{c}{2\cos\varphi} = b,$$

una sola raíz de la cual

$$\cos\varphi = \frac{b+\sqrt{b^2+2c^2}}{2c}$$

tiene sentido geométrico. De aquí

$$CD = c\cos\varphi = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2+2c^2}}{2}.$$

Así, la construcción está puesta en claro. En el segmento $AB = c$, como en el diámetro, trazamos la circunferencia (O es su centro) y hallamos tal punto D que $DO \perp AB$. A continuación construimos por separado el segmento $a = CD$. Con este fin, primero construimos el segmento $c\sqrt{2}$ como la media geométrica de los segmentos c y $2c$[1]. Después construimos el segmento $x = \sqrt{b^2+(c\sqrt{2})^2}$ que es la hipotenusa del triángulo con los catetos b y $c\sqrt{2}$. Finalmente, $a = 1/2(b+x)$. Por medio del compás, cuya abertura es igual al segmento a, y tomando como centro el punto D trazamos una marca, obteniendo así el punto C, que es el vértice del ángulo recto del triángulo buscado.

EJERCICIOS:

1. Sean b y c dos lados de un triángulo y l la longitud de la bisectriz del ángulo entre éstos. Calcular el tercer lado del triángulo.

2. La altura h de un cilindro es igual al diámetro de la circunferencia de la base. Un punto de la circunferencia superior está unido con otro de la inferior; la recta que une estos puntos forma con el plano de la base del cilindro el ángulo α. Determinar la distancia más corta entre dicha recta y el eje del cilindro.

3. Se conoce que en los ángulos del triángulo ABC $\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C = 1:2:3$. Hallar la relación de los senos de los ángulos.

4. En el triángulo regular ABC cada lado está dividido en tres partes iguales: el lado AB por los puntos D y E (de manera que $AD = DE = EB$), el lado BC por puntos F y G (de modo que $BF = FG = GC$), el lado CA por los puntos H e I (así que $CH = HI = IA$). Con las letras L, M y N se designan respectivamente los puntos de intersección de los pares de rectas BI y CD, AF y CE, AG y BH. Hallar la relación de las áreas de los triángulos LMN y ABC.

5. El volumen de una pirámide n-angular regular es igual a v y el lado de su base es igual a a. Determinar el ángulo de inclinación de la arista lateral de la pirámide respecto a la base.

---

[1] Conviene tener presente que si se dan los segmentos a y ka, donde k es el coeficiente numérico, entonces, para construir el segmento $x = a\sqrt{k}$ es suficiente construir la media geométrica de los segmentos dados $x = \sqrt{a\cdot ka} = a\sqrt{k}$. A propósito, este método permite construir segmentos con la longitud de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, etc. si se da la unidad de longitud.

6. En un paralelogramo se dan los lados a y b. Determinar la relación entre los volúmenes de los "cuerpos" obtenidos por el giro de este paralelogramo alrededor de sus lados a y b respectivamente.

7. En un triángulo se da la base a y los ángulos α y $\alpha + 90°$ adyacentes a ésta. Determinar el volumen del "cuerpo" formado por el giro de este triángulo alrededor de la altura bajada al lado a.

8. El área del triángulo ABC satisface a la relación $S = a^2 - (b - c)^2$, donde a, b y c son los lados del triángulo opuestos a los ángulos A, B y C respectivamente. Hallar el ángulo A.

9. Dados los lados b y c del triángulo y el ángulo A entre éstos. El triángulo gira alrededor de un eje que no lo atraviesa, pero pasa por el vértice A y forma con los lados b y c ángulos iguales. Hallar el volumen del "cuerpo" formado por el giro.

10. El radio del sector es igual a R, el radio de la circunferencia inscrita en este sector es igual a r. Calcular el área del sector.

11. Se da un triángulo cuya base es a y el ángulo del vértice es igual a α. Se tiene una circunferencia que pasa por el centro del círculo inscrito en este triángulo y por los extremos de la base. Hallar el radio de la circunferencia.

12. La base de una pirámide es un cuadrado. Dos caras laterales son perpendiculares al plano de la base y las otras dos forman con ésta los ángulos iguales a α. Calcular el ángulo diedro formado por las dos últimas caras laterales.

13. En un triángulo rectángulo con catetos b y c está inscrito un cuadrado que junto con el triángulo tiene un ángulo recto común (es decir, dos lados del cuadrado se encuentran en los catetos mientras que un vértice, lo está en la hipotenusa). Hallar el área del cuadrado.

14. En un triángulo isósceles el ángulo de la base es α. La altura bajada a la base es en el valor m mayor que el radio del círculo inscrito. Determinar la base del triángulo y el radio del círculo circunscrito.

15. Dos cuerdas de un círculo de radio R se intersecan bajo un ángulo recto. Los segmentos de una cuerda se relacionan uno a otro como $4 : 5$ y los de la otra, como $5 : 16$. Hallar las longitudes de los cuatro arcos en los cuales los extremos de estas cuerdas dividen la circunferencia.

16. En una circunferencia están inscritos un triángulo isósceles y un trapecio. Los lados laterales del triángulo son paralelos a los lados laterales del trapecio. Una de las bases del trapecio es el diámetro de la circunferencia. Calcular la altura del trapecio siendo su línea media igual a l y el área del triángulo igual a S.

17. A una circunferencia de radio r, desde un punto exterior A están trazadas una tangente AP y una secante AQ que pasa por el centro de la circunferencia, siendo $AQ = 2AP$. Hallar el radio de otra circunferencia construida de tal modo que sus tangentes sean la secante, la tangente dada (fuera del segmento AP) y el radio de la circunferencia dada trazado al punto P.

18. En una circunferencia de radio R, por el punto M del diámetro está trazada la cuerda AB bajo un ángulo φ respecto al diámetro, siendo $BM : AM = p : q$. Por el punto B está trazada la cuerda BC que es perpendicular a dicho diámetro y el punto C está unido con el punto A. Hallar el área del triángulo ABC.

19. Se da una circunferencia de radio 1 y el centro en el punto O, y una recta tangente a esta circunferencia en el punto E. En la circunferencia se toma un punto M. Hallar el radio de la circunferencia tangente a la circunferencia dada en el punto M y a la recta dada si el ángulo EOM es φ para $0° < \varphi < 90°$.

20. La distancia entre las rectas paralelas es igual a 1. El punto A se encuentra entre estas rectas a una distancia a de una de estas. Hallar la longitud del lado del triángulo equilátero ABC cuyo vértice B se sitúa en una de las rectas paralelas y el vértice C, en la otra.

21. Un trapecio isósceles con los ángulos de la base iguales a 60° tiene tal forma que se puede inscribirle dos circunferencias tangentes una a otra, cada una de las cuales es tangente a su vez a las bases del trapecio y a uno de sus lados laterales. El lado lateral del trapecio es igual a 2. Hallar el área del trapecio.

22. En un trapecio con las bases a y b, por el punto de intersección de las diagonales está trazada una recta paralela a las bases. Hallar el segmento de dicha recta comprendido entre los lados laterales del trapecio.

23. Sean α, β, γ los ángulos del triángulo ABC. A', B', C' son puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos internos del triángulo ABC con la circunferencia circunscrita a este triángulo. Hallar la relación entre las áreas del triángulo ABC y del triángulo $A'B'C'$.

24. Se dan las longitudes de las alturas $AA' = h_a$ y $BB' = h_b$ del triángulo ABC y la longitud $CD = l$ de la bisectriz del ángulo C. Hallar el ángulo C.

25. En un triángulo isósceles está inscrito un cuadrado de área de una unidad cuyo lado se encuentra en la base del triángulo. Hallar el área del triángulo si se sabe que los centros de gravedad del triángulo y del cuadrado coinciden.

26. Calcular el área de la parte común de dos rombos, en el primero de los cuales las diagonales son iguales a 2 y 3, mientras que el segundo se obtiene al girar el primero 90° alrededor de su centro.

27. En un triángulo isósceles se da el lado lateral b y el ángulo α de la base. Calcular la distancia entre el centro de la circunferencia inscrita en este triángulo y el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

28. Desde el punto A dispuesto fuera de la circunferencia del radio r, está trazada una secante que no pasa por el centro O de la circunferencia. Sean B y C los puntos en que dicha secante atraviesa la circunferencia. Hallar la magnitud $\operatorname{tg}(1/2\angle AOB) \times \operatorname{tg}(1/2 \angle AOC)$ si $OA = a$.

29. En un sector circular limitado por los radios OA y OB con el ángulo central α ($\alpha < \pi/2$) está inscrito un cuadrado de tal modo que sus dos vértices adyacentes se encuentran en el radio OA y el tercer vértice, en el radio OB, mientras que el cuarto vértice se halla en el arco AB. Calcular la relación de las áreas del cuadrado y del sector.

30. Dos esferas iguales son tangentes una a otra y a las caras de un ángulo diedro. La tercera esfera de menor radio es también tangente a las caras de dicho ángulo diedro y a las dos esferas. Se da la relación m entre el radio de la esfera menor y el de una de las esferas iguales. Hallar la magnitud del ángulo diedro. ¿En qué límites puede variar m?

31. El ángulo de la base del triángulo isósceles ABC es igual a α ($\alpha > 45°$) y el área es igual a S. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son las bases de las alturas del triángulo ABC.

32. En el triángulo ABC $\angle A = \angle B = \alpha$, $AB = a$; AH es la altura, BE es la bisectriz (el punto H se encuentra en el lado BC, el punto E, en el AC). Los puntos H y E están unidos por un segmento. Hallar el área del triángulo CHE.

33. Dentro del ángulo AOB se toma el punto M; $\angle MOA = \alpha$, $\angle MOB = \beta$, $OM = a$ ($\alpha + \beta < \pi$). Hallar el radio de la circunferencia que pasa por el punto M y forma las cuerdas de $2a$ de longitud en los lados OA y OB del ángulo dado.

34. Se da el ángulo AOB igual a α ($\alpha < \pi$). En el lado OA se toma el punto C y en el lado OB, el punto D, siendo $OC = a \neq 0$, $OD = b \neq 0$. Se tiene una circunferencia que es tangente al lado OA en el punto C y que pasa por el punto D. Supongamos que dicha circunferencia interseca otra vez el lado OB en el punto E. Calcular el radio r de la circunferencia construida y la longitud de la cuerda DE.

35. De una roca de granito se necesita tallar un pedestal en forma de paralelepípedo rectangular cuya altura ha de ser igual a la diagonal de la base y el área de la base debe ser de 4 m^2. ¿Con qué lados de la base se obtendrá la mínima superficie total del pedestal?

36. Se requiere hacer una caja en forma de un paralelepípedo rectangular con el área de la base igual a 1 cm^2. La suma de las longitudes de todas las aristas debe constituir 20 cm. ¿Con qué dimensiones de la caja será máxima su superficie total?

37. En una hoja cuadrática de madera contrachapada con un lado igual a 10 unidades de longitud está cortada una abertura en forma de rectángulo cuyo diagonal es igual a 5 unidades de longitud. El borde de la abertura está revestido con un marco hecho de alambre fino. La unidad del área (es decir, el área del cuadrado con el lado igual a la unidad de longitud) de la madera contrachapada pesa 2 g, la unidad de longitud del alambre pesa 7 g. ¿Con cuáles lados del rectángulo se obtendrá el mayor peso de la hoja con la abertura revestida?

38. En el triángulo ABC, del vértice A está trazada una recta que interseca el lado BC en el punto D, que se encuentra entre los puntos B y C siendo $CD : BC = \alpha$ (donde $\alpha < 1/2$). En el lado BC, entre los puntos B y D se toma el punto E y por éste se ha trazado una recta paralela al lado AC y que interseca el lado AB en el punto F. Hallar la relación entre las áreas del trapecio $ACEF$ y del triángulo ADC si se sabe que $CD = DE$.

39. En el lado AB del triángulo ABC entre los puntos A y B se toma el punto D tal modo que $AD : AB = \alpha$ (donde $\alpha < 1$); en el lado BC entre los puntos B y C se toma el punto E de manera que $BE : BC = \beta$ (donde $\beta < 1$). Por el punto E se ha trazado una recta que es paralela al lado AC e interseca el lado AB en el punto F. Hallar la relación entre las áreas de los triángulos BDE y BEF.

40. Mostrar las formas posibles de los triángulos en los que los lados constituyen una progresión geométrica y los ángulos, una progresión aritmética.

41. Serán suficientes 4000 azulejos de 10 cm $\times$ 10 cm para revestir una piscina de forma romboidal, con un área de 450 m^2 y una altura del bordo de 0,5 m?

42. Una pirámide tiene por base un rectángulo, todas las aristas laterales son iguales y la altura de la pirámide es igual a $\sqrt{2}$ cm. Por una de las aristas de la pirámide se mueve un escarabajo con una velocidad de 1 cm/s. Calcular, si le bastarán 2 segundos para bajar desde el vértice de la pirámide por la arista lateral hasta el vértice de la base si se sabe que el escarabajo cubre el perímetro de la base durante 8 s.

43. Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

44. En el triángulo ABC están trazadas la bisectriz AD del ángulo BAC y la CF del ángulo ACB (el punto D está en el lado BC; el punto F, en el lado AB). Hallar la relación entre las áreas de los triángulos ABC y AFD si se sabe que $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.

45. En un está círculo inscrito un triángulo isósceles ABC en el cual $AB = BC$ y $\angle ABC = \alpha$. Desde el vértice A se ha trazado la bisectriz del ángulo BAC, que interseca el lado BC en el punto D y la circunferencia, en el punto E. El vértice B está unido con el punto E por medio de un segmento rectilíneo. Hallar la relación entre las áreas de los triángulos ABE y BDE.

46. En un trapecio $ABCD$ los ángulos a la base mayor a son iguales a α y β; la altura del trapecio es h. Sean O_1, O_2, O_3, O_4 los centros de las circunferencias circunscritas respectivamente a los triángulos ABC, BCD, CDA y DAB. Calcular el área del cuadrilátero $O_1O_2O_3O_4$.

47. En un triángulo rectángulo la relación entre el producto de las longitudes de las bisectrices de los ángulos internos agudos y el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a 1/2. Calcular los ángulos agudos del triángulo.

48. De un extremo del diámetro de una esfera se ha trazado una cuerda de tal modo que la superficie formada por la rotación de la cuerda alrededor del diámetro divide el volumen de la esfera en dos partes iguales. Determinar el ángulo entre la cuerda y el diámetro.

49. En un cuadrilátero cóncavo $ABCD$ la bisectriz del ángulo ABC interseca el lado AD en el punto M, mientras que la perpendicular bajada desde el vértice A al lado BC lo interseca en el punto N de tal manera que $BN = NC$ y $AM = 2 \cdot MD$. Calcular los lados y el área S del cuadrilátero $ABCD$ siendo su perímetro igual a $5 + \sqrt{3}$, $\angle BAD = 90°$ y $\angle ABC = 60°$.

50. En una pirámide de base cuadrangular $OABCD$ el trapecio $ABCD$ sirve de base y las caras laterales OAD y OBC son perpendiculares al plano de la base. Si se sabe que $AB = 3$, $CD = 5$, el área de la cara OAB es igual a 9 y el área de la cara OCD es igual a 20, hallar el volumen de la pirámide.

§ 4. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

Esta parte de la estereometría se considera como inicial y por lo tanto es de suma importancia para el aprendizaje exitoso de los apartados ulteriores y, en general, para el desarrollo de la imaginación espacial. Los teoremas que se demuestran aquí no son verdaderamente complejos, pero requieren cierta cultura lógica, es decir, la capacidad de reducir estrictamente la demostración de cualquier teorema al empleo de los axiomas enumerados en el principio y de los teoremas antes demostrados, basándose en las definiciones dadas. A su vez esto requiere un conocimiento muy preciso de los teoremas y definiciones iniciales. Algunos estudiantes manifiestan cierta negligencia respecto a estas cuestiones al suponer que la intuición geométrica les ayudará a encontrar definiciones y enunciaciones de axiomas justas. Como resultado, en el mejor caso se dan formulaciones equivalentes, pero esto provoca complicaciones inesperadas en las enunciaciones y demostraciones de los teoremas.

En el estudio de este párrafo debe prestarse atención a *la comprensión exacta y memorización firme* de las definiciones. El paralelismo y la perpendicularidad de las rectas y los planos, el ángulo entre las rectas que se cruzan y la distancia entre éstas, el ángulo entre una recta y un plano, el ángulo entre dos planos, todos estos conceptos deben saberse muy bien.

Con esto, claro está, no se debe llegar a los extremos. Primero, no hace falta "empollar" las enunciaciones de las definiciones sin comprender su sentido geométrico y sin ver detrás de éstas la configuración geométrica. Segundo, que es lo más común para los estudiantes (y por eso más peligroso), no se debe reducir únicamente a las imágenes geométricas olvidándose de las definiciones exactas.

Por ejemplo, cada uno se imagina qué son las rectas paralelas en el espacio. Sin embargo, muchos empiezan a demostrar la afirmación "evidente por completo" que por dos rectas paralelas puede trazarse un plano, olvidándose de que la existencia de tal plano integra la propia *definición* de las rectas paralelas.

Otro ejemplo de igual índole es la demostración de *la existencia* de las rectas que se cruzan. En este caso, muchos estudiantes se limitan a indicar ... el suelo y el techo. Naturalmente, está bien conocer dónde "en la vida" hay rectas cruzadas, pero esto no elimina la necesidad de demostrar estrictamente su existencia.

Tomemos tres puntos A, B, C cualesquiera y un cuarto punto D fuera del plano determinado por los mismos. En este caso las rectas AB y CD se cruzan. En efecto, si se encontraran en el mismo plano, todos los puntos estarían en este plano; pero esto está en contradicción con la elección del punto D (fig. 93).

Hay también casos en que los estudiantes, sin saber exactamente la definición, recurren a analogías erróneas y, como resultado, llegan a "invenciones" fantásticas al estilo de "una recta es paralela al plano si es paralela a cualquier recta situada en dicho plano"; "una recta es perpendicular al plano si es perpendicular a cualquier recta de este plano"; "se denomina ángulo entre la recta y el plano a tal ángulo que la recta en cuestión lo forma con las rectas del plano dado", etc. Es suficiente imaginarse el sentido geométrico de estas definiciones para ver su carácter absurdo.

Al mismo tiempo, la definición no debe "empollarse" palabra por palabra, letra por letra, y puede apartarse de la enunciación dada en el manual. Pero esta separación no ha de ir demasiado lejos. Por ejemplo, no son raros los casos en que los estudiantes emplean *el criterio* de la perpendicularidad de la recta y el plano en calidad de *definición* de la recta y el plano. Pero no siempre entienden que con este nuevo concepto *la definición* anterior se hace *teorema* que debe demostrarse. En este caso "la invención" de definiciones conlleva más y más complicaciones.

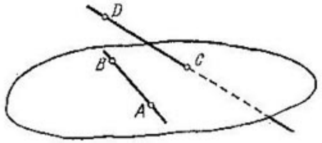


Fig. 93

Los estudiantes cometen muchos errores en la formulación *incompleta* de las definiciones y, sobre todo, de los teoremas. He aquí un ejemplo típico de la respuesta a la solicitud de enunciar el criterio del paralelismo de dos planos: "Si dos rectas dispuestas en un plano son paralelas respectivamente a dos rectas situadas en otro plano, estos planos son paralelos". Está omitida una sola palabra: se trata de dos rectas que *se intersecan*, y con esta interpretación el teorema ya no es justo, la respuesta no puede ser considerada como exacta.

Uno de los conceptos más importantes de este apartado es el *ángulo entre las rectas que se cruzan*. Recordémoslo. Para construir el ángulo entre las rectas que se cruzan se procede del modo siguiente: se toma un punto arbitrario del espacio y por el punto se trazan dos rectas paralelas a las rectas dadas. El ángulo entre las rectas construidas que se intersecan es, según la definición, el ángulo entre las rectas que se cruzan.

Esta definición puede causar una pregunta natural: ¿si no depende el ángulo entre las rectas que se cruzan del punto que hemos elegido como su vértice? Resulta que la elección del punto no influye realmente en la magnitud del ángulo: para razonar esta afirmación hay que referirse al indicio conocido del paralelismo de dos planos y al teorema sobre ángulos con lados paralelos en el espacio.

El concepto del ángulo entre las rectas cruzadas, si se aplica sistemáticamente, permite simplificar muchos teoremas y definiciones. Por ejemplo, pueden determinarse en seguida *las rectas perpendiculares* como rectas, el ángulo entre las cuales es recto, independientemente de que si están o no están en el mismo plano. A su vez, esta definición simplifica la solución de los problemas.

Es fácil convencerse de que *una recta perpendicular al plano es también perpendicular a cualquier recta situada en este plano*, incluso a la que no pasa por el punto de intersección de la recta dada con el plano. Esto se deduce directamente de la definición de la perpendicular al plano y de la definición de las rectas perpendiculares.

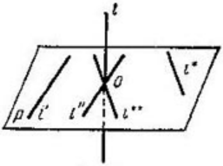


Fig. 94

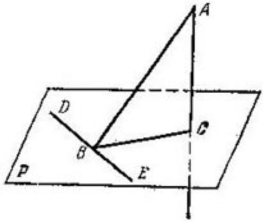


Fig. 95

A consecuencia de lo expuesto, es de gran interés el llamado *criterio reforzado de la perpendicularidad de una recta a un plano: si una recta es perpendicular a dos rectas no paralelas cualesquiera (que se intersecan) dispuestas en cierto plano, dicha recta es perpendicular al mismo plano.*

Esta enunciación, en contraste con la ordinaria, no requiere que dos rectas pasen explícitamente por el punto de intersección de dicha recta con el plano. Este detalle, por insignificante que parezca, desempeña un papel esencial en la resolución de los problemas.

La demostración del criterio reforzado es muy simple (fig. 94). Si la recta dada l es perpendicular a dos rectas que se intersecan l' y l^* del plano P, es también perpendicular a las rectas l'' y l^{**} paralelas a éstas, trazadas por el punto O de su intersección con el plano P. Por consiguiente, la recta l según el criterio de perpendicularidad de una recta y un plano es perpendicular respecto de todo el plano P. Es lo que tuvimos que demostrar [1].

Este criterio formulado permite, reducir a pocas palabras la demostración del llamado *teorema de las tres perpendiculares* que, propiamente dicho, es su caso particular. En efecto (fig. 95), supongamos

[1] Naturalmente, la perpendicularidad de una recta a dos rectas *paralelas* en un plano no implica la perpendicularidad de esta recta al propio plano (dese un ejemplo).

que la recta AC es perpendicular al plano P, AB es una oblicua y BC es la proyección de la oblicua en el plano P. Si la recta DE está trazada en el plano P perpendicularmente a la oblicua AB, en este caso DE es perpendicular al plano ACB (puesto que $DE \perp AC$ y $DE \perp AB$), por esta razón DE es perpendicular a cualquier recta de este plano, en particular, a la proyección BC de la oblicua. Y al contrario, si la recta DE está trazada en el plano P, perpendicularmente a la proyección BC, de nuevo la recta DE es perpendicular al plano ACB y, por lo tanto, $DE \perp AB$.

Además, señalemos, que el empleo del concepto de ángulo entre dos rectas que se cruzan permite en el teorema de tres perpendiculares no suponer que una recta dispuesta en el plano dado pasa explícitamente por la base de la oblicua.

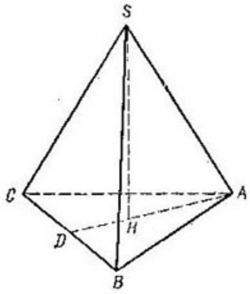


Fig. 96

Los conceptos que consideramos son particularmente importantes para imaginar como se debe a los fenómenos geométricos en el proceso de la resolución de los diversos problemas de las pirámides. En particular, es de gran utilidad *el teorema* siguiente que trata de una pirámide de base triangular arbitraria (fig. 96): *la altura SH de la pirámide $SABC$ pasa por la altura AD de la base en el caso, y sólo en el caso, en que la arista lateral SA es perpendicular a la arista de la base BC*. Es fácil ver que esta afirmación es simplemente otra enunciación del mismo teorema sobre tres perpendiculares: SH y SA son respectivamente la perpendicular y la oblicua respecto del plano de la base ABC, mientras que BC es una tercera recta.

El problema siguiente, que es muy difícil para los estudiantes, se resuelve de inmediato con la ayuda de este teorema.

1. *En una pirámide de base triangular, la altura trazada desde el vértice cae en el punto de intersección de las alturas del triángulo dispuesto en la base. Demostrar que esta misma propiedad poseen también todas las alturas de la pirámide bajadas desde los vértices de la base sobre las caras laterales.*

En realidad, si la altura de la pirámide pasa por todas las alturas de la base, cada arista lateral de la pirámide es perpendicular a la arista opuesta de la base. Pero de acuerdo con el mismo teorema, con la excepción de que "en el sentido contrario", cualquier altura de la pirámide posee dicha propiedad.

Del mismo teorema se deduce que, en particular, las aristas laterales de una pirámide regular de base triangular son perpendiculares a las aristas opuestas de la base. Esta afirmación puede ser útil, por ejemplo, para la construcción de un ángulo lineal de un ángulo diedro de una arista lateral de la pirámide. A menudo los estudiantes

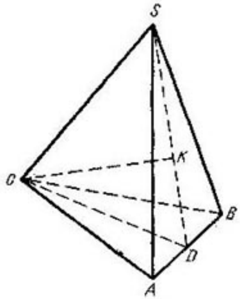


Fig. 97

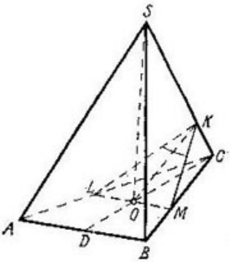


Fig. 98

ofrecen la construcción siguiente: "Tracemos por el lado de la base un plano perpendicular a la arista lateral, en este caso el ángulo obtenido en el corte es el requerido". En principio el razonamiento es justo, pero carece de un detalle bastante esencial: ¿por qué puede trazarse tal plano? En efecto, en el caso en que se cruzan cualesquier rectas no puede, hablando en términos generales, trazarse tal plano, ya que esto es posible en el caso, y sólo en el caso, en que las rectas son perpendiculares (el lector puede demostrarlo). Por esta razón, en lo que se refiere a la pirámide *regular* de base triangular, dicha construcción es realmente posible.

Un error más, por ser típico, merece también nuestra atención. Después de bajar la perpendicular desde el vértice de la base triangular de la pirámide regular a la cara lateral, algunos estudiantes juzgan sin duda alguna, que dicha altura incide en la altura de la cara lateral. Naturalmente, esta afirmación resulta justa, pero requiere pruebas. Es fácil observar que se deduce del teorema recién enunciado por nosotros, así como del resultado del problema 1. Sin embargo, resolviendo el problema en que se emplea esta afirmación, conviene no fiarse del teorema mencionado (y, aun más, del problema 1), sino dar una demostración independiente.

Un camino "frontal", más privado de perspectivas, es el de la demostración de dicha afirmación: trazar la altura SD de la cara lateral ASB de la pirámide regular $SABC$; bajar la altura CK de la pirámide desde el vértice C de la base a la cara ASB y demostrar que SD y CK se intersecan (fig. 97). Por desgracia, muchos estudiantes tratan de razonar de este modo, mientras que hay otro método mucho más simple.

Sean $SABC$ la pirámide regular y CK la perpendicular bajada desde el vértice C a la cara ASB (fig. 97). Uniendo el punto K con el punto D que es el punto medio de la arista AB, tenemos que la recta DC es perpendicular a la recta AB como mediana del triángulo equilátero ABC. La recta CK es perpendicular al plano ASB y, por consiguiente, a cualquier recta en este plano, en particular, a la arista AB. Esto significa que la arista AB es perpendicular al plano DCK por ser perpendicular a las dos rectas que se intersecan, CD y CK, situadas en este plano. Por lo tanto, la recta AB es perpendicular a cualquier recta en el plano DCK, en particular, a la recta DK.

En resumen, $DK \perp AB$, y como D es el punto medio de la base AB del triángulo isósceles ASB, el punto K se encuentra en la altura SD de este triángulo.

El criterio de la perpendicularidad presenta buenos resultados para muchos problemas, en que para los ángulos diedros dados se requiere construir ángulos lineales.

2. *Desde la base de la altura de una pirámide regular de base triangular está bajada la perpendicular a la arista lateral, igual a p. Hallar el volumen de la pirámide si el ángulo diedro entre sus caras laterales es igual a 2α.*

Supongamos que $SABC$ es la pirámide dada (fig. 98), OK es la perpendicular en cuestión cuya longitud es igual a p y que el ángulo diedro a la arista SC es igual a 2α.

Primero construyamos el ángulo lineal del ángulo diedro. Tomemos, naturalmente, por el vértice del ángulo lineal el punto K; a continuación, desde el punto K en los planos de las caras ASC y BSC tracemos las perpendiculares KL y KM a la arista SC.

Al tratarse de esto último, muchos estudiantes son víctimas de errores. Unos consideran que dichas perpendiculares pasarán inevitablemente por los puntos A y B, los otros, que L y M son los puntos medios de los lados AC y BC del triángulo ABC. Pero no es justa ninguna de las suposiciones. En realidad, es válido lo siguiente.

El plano en el cual se encuentran KL y KM ha de ser perpendicular a la arista SC (por ser $SC \perp KL$ y $SC \perp KM$). Para hallar dicho plano, perpendicular a SC, basta con hallar dos rectas no paralelas, perpendiculares a SC. Una de estas rectas es OK, ya que según los datos $OK \perp SC$. En calidad de la otra recta de este tipo podemos tomar la arista AB. En efecto, SO es perpendicular al plano ABC, SC es la oblicua y CO es su proyección; pero $AB \perp CO$ y, por lo tanto, según el teorema de las tres perpendiculares, $AB \perp SC$.

Así, están halladas las dos rectas, OK y AB que son perpendiculares a SC. Pero no se intersecan sino se cruzan. Sin embargo, hay una solución: tracemos por el punto O la recta LM paralela a AB. En este caso LM es también perpendicular a SC y LM ya se interseca con OK. Por consiguiente, SC es perpendicular al plano en el cual se encuentran estas rectas, es decir, al plano del triángulo KLM. En tal caso, $SC \perp$ $\perp KL$ y $SC \perp KM$, o sea, $\angle LKM$ es el ángulo lineal del ángulo diedro junto a la arista SC. De este modo, $\angle LKM = 2\alpha$, estando situados los puntos L y M de las perpendiculares KL y KM a la arista SC en los lados AC y BC del triángulo ABC de tal manera, que LM, que pasa por el centro del triángulo ABC, es paralelo al lado AB.

Nos quedan solamente los cálculos. Después de demostrar que $\angle OKM = \angle OKL = \alpha$, hallamos que $OM = p \operatorname{tg} \alpha$ y por eso (por medio del triángulo rectángulo OCM) tenemos $OC = p\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$. Pero OC es el radio del círculo circunscrito al triángulo regular ABC; por lo tanto, $AB = 3p \operatorname{tg} \alpha$ y el área $S_{\triangle ABC}$ de la base de la pirámide se determina directamente.

Por otra parte, si KOC es un triángulo rectángulo,

$$\operatorname{sen}(\angle OCK) = \frac{OK}{OC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{cotg} \alpha;$$

puesto que $\angle KOS = \angle OCK$ (como ángulos agudos con lados perpendiculares), la altura de la pirámide

$$SO = \frac{p}{\cos(\angle OCK)} = \frac{p\sqrt{3}}{\sqrt{3 - \operatorname{cotg}^2 \alpha}}.$$

De este modo, el volumen buscado

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{9}{4} p^3 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{3 - \operatorname{cotg}^2 \alpha}}.$$

3. *Un triángulo regular con el lado a sirve de base de una pirámide. Una de las caras de la pirámide es perpendicular al plano de la base. Esta cara es un triángulo isósceles con el lado lateral $b \neq a$. Hallar el área de tal sección de la pirámide que sea un cuadrado.*

Sea $KLMN$ el cuadrado de que se trata en los datos del problema (fig. 99). Hasta ahora no hacemos ningunas suposiciones acerca de cuál cara lateral: ASB o BSC o ASC, es perpendicular al plano de la base.

Puesto que $KN \parallel LM$, KN es paralela al plano de la base ABC, por lo tanto el plano ASB que pasa por la recta KN interseca el plano ABC por la arista AB que es paralela a KN. De modo análogo se demuestra que $SC \parallel KL$.

De aquí se deduce, primero, que el plano de la sección es paralelo a las aristas AB y SC que se cruzan y, segundo, que estas aristas deben ser perpendiculares entre sí ya que el ángulo (recto) LKN del cuadrado $KLMN$ es el ángulo comprendido entre estas rectas que se cruzan.

Señalemos ahora que la pirámide $SABC$ posee sólo un par de aristas que se cruzan y son perpendiculares entre sí. Demostrémoslo con la ayuda de otro dibujo (fig. 100).

Supongamos que $SPQR$ es la pirámide en cuestión cuya cara PSQ es perpendicular a la base PQR. Tracemos la altura ST de la pirámide; por lo visto, ST se encuentra en el plano de la cara PSQ y sirve simultáneamente de altura para el triángulo isósceles PSQ y, por consiguiente, de su mediana, de modo que la recta RT es la altura del

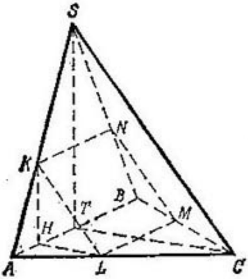


Fig. 99

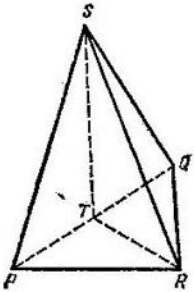


Fig. 100

triángulo regular PQR. De acuerdo con el teorema acerca de tres perpendiculares, la oblicua SR es perpendicular a PQ, a la recta perpendicular a su proyección PT. Por otro lado, una recta en el plano PQR, siendo perpendicular a la arista SQ, debe ser también perpendicular a su proyección PQ; pero PR no posee tal propiedad y por esta razón las aristas SQ y PR no son perpendiculares. De modo análogo, las aristas SP y QR tampoco son perpendiculares. Así, sólo las aristas SR y PQ, son mutuamente perpendiculares, es decir, la arista lateral que no se encuentra en la cara perpendicular a la base, y la arista del ángulo diedro recto.

Refiriéndonos a la fig. 99 concluimos que AB es la arista del ángulo diedro recto, es decir, la cara ASB es perpendicular al plano de la base.

Con el fin de realizar los cálculos tracemos $KH \perp AB$ y unamos el punto H con L. La recta KH es perpendicular a la HL como una recta situada en uno de los planos mutuamente perpendiculares y que es perpendicular a la línea de su intersección. Además, tracemos la altura ST del triángulo isósceles ASB y la altura CT de la base

ABC. Designemos por x el lado del cuadrado $KLMN$. En este caso

$$ST=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}},\quad AT=\frac{a}{2},\quad AH=\frac{a-x}{2}.$$

Puesto que $\triangle AKH \backsim \triangle AST$ y $\triangle ALH \backsim \triangle ACT$,

$$KH=\frac{a-x}{a}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}},\quad HL=\frac{a-x}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}},$$

y de acuerdo con el teorema de Pitágoras referente al triángulo rectángulo KHL

$$x^2=\left(\frac{a-x}{a}\right)^2\left(\frac{a^2}{2}+b^2\right).$$

De aquí, después de extraer la raíz (teniendo en cuenta que $a>x$) y cumplir las transformaciones necesarias, hallamos el lado del cuadrado x y, luego, su área:

$$S=\left(\frac{a\sqrt{2a^2+4b^2}}{2a+\sqrt{2a^2+4b^2}}\right)^2.$$

En los problemas de estereometría tiene gran importancia para su solución un dibujo bien hecho. Si éste está ejecutado como es debido, la solución resulta a menudo "visible" geométricamente.

Sin embargo, la presentación plana de las configuraciones espaciales es siempre posible únicamente con cierta desfiguración, por esta razón, por preciso que sea el dibujo, es necesario también comprender correctamente marcando en especial, por ejemplo, los ángulos rectos que en el dibujo se observan como agudos, las rectas que se cruzan que en el dibujo se presentan por líneas que se intersecan, etc.

Tenemos que argumentar de modo rigurosamente lógico cualquier fenómeno, por evidente que sea en el dibujo, para evitar errores provocados por las peculiaridades de la presentación plana de las configuraciones espaciales. Esto es importante sobre todo cuando se trata de los problemas a demostrar. En estos problemas, son precisamente estas peculiaridades de presentación (desfiguraciones de ángulos, etc.) que ponen a la sombra el cuadro verdadero y dificultan la demostración.

4. *En el espacio se dan dos rayos Ax y By que no se encuentran en un plano y forman entre sí un ángulo de 90°; su perpendicular común es AB. En los rayos Ax y By se encuentran los puntos M y P, respectivamente, de tal manera que $2AM\cdot BP=AB^2$. Demostrar que la distancia entre el punto medio O del segmento AB y la recta MP constituye $AB/2$.*

Supongamos que Ax y By son los rayos de que se trata en el problema (fig. 101); en nuestro dibujo se representan en forma de dos rayos de las rectas que se intersecan, pero tendremos en memoria que es una ilusión del dibujo: estos rayos no se encuentran en un plano.

En muchos problemas en que se trata de las rectas que se cruzan, es útil la construcción siguiente. Tracemos el rayo $Bz \parallel Ax$ por el punto B, y marquemos el segmento $BN = AM$. Sobre la base de la definición del ángulo entre las rectas AM y BP que se cruzan, tenemos: $\angle PBN = 90°$, es decir, el triángulo PBN es rectángulo con la hipotenusa PN. Debe subrayarse especialmente este concepto, ya que algunos estudiantes resolviendo este problema cedieron a la ilusión del dibujo y tomaron por recto el ángulo BPN.

De acuerdo con el teorema de Pitágoras y valiéndonos del triángulo rectángulo, se obtiene que $PN^2 = BN^2 + BP^2 = u^2 + v^2$ (véanse las designaciones en la fig. 101). Luego, la recta MN es perpendicular al plano yBz y, por lo tanto, valiéndonos del triángulo rectángulo PNM se obtiene que $PM^2 = 4h^2 + u^2 + v^2$. Pero según los datos, $(2h)^2 = 2uv$; por consiguiente, $PM^2 = (u+v)^2$, es decir, $PM = u + v$.

Tracemos la altura OT del triángulo POM; la longitud de dicha altura es la distancia que estamos buscando. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos PTO y MTO puede anotarse la igualdad $b^2 - PT^2 = c^2 - (u + v - PT)^2$. Tomando en consideración

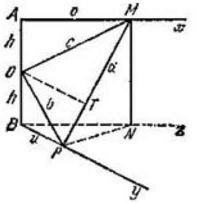


Fig. 101

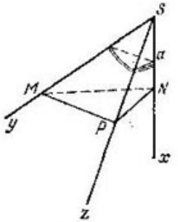


Fig. 102

que $b^2 = u^2 + h^2$ (valiéndonos del triángulo rectángulo OBP) y $c^2 = v^2 + h^2$ (refiriéndonos al triángulo rectángulo OAM), obtenemos la igualdad $2u(u+v) = 2 \cdot PT \cdot (u+v)$, o $PT = u$. Por consiguiente, $OT^2 = b^2 - PT^2 = h^2$, es decir, $OT = h = AB/2$.

Hay muchos problemas en los que se necesita calcular los ángulos poliedros. Estos problemas suelen implicar ciertas dificultades relacionadas con la representación geométrica incompleta y con la incapacidad de trazar un dibujo adecuado. Mientras tanto, todos los elementos de un ángulo triedro se determinan sin dificultades algunas con la ayuda de la Trigonometría, partiendo de consideraciones geométricas simples.

5. *Sean los ángulos agudos A, B, C ángulos planos de un ángulo triedro. Demostrar que* $\cos C = \cos A \cdot \cos B$, *en caso de ser recto el ángulo diedro opuesto al ángulo plano C.*

Supongamos que $Sxyz$ es el triángulo triedro (fig. 102) en el cual $\angle xSy = A$, $\angle zSx = B$, $\angle ySz = C$, y el plano de la cara zSx es perpendicular al plano de la cara ySx. Tracemos el plano MNP

perpendicularmente a Sx; en este caso $MN \perp Sx$, $PN \perp Sx$, $\angle MNP = 90°$. Señalemos que los demás ángulos del triángulo MNP, es decir, $\angle PMN$ y $\angle MPN$ *no son* ángulos lineales de los ángulos diedros de las aristas Sy y Sz.

Al designar por a la longitud del segmento SN, obtendremos de acuerdo con los triángulos rectángulos PSN y MSN que

$$PN = a \operatorname{tg} B, \quad MN = a \operatorname{tg} A,$$
$$PS = \frac{a}{\cos B}, \quad MS = \frac{a}{\cos A}.$$

Recurriendo a dos métodos (sobre la base del triángulo rectángulo MNP y del oblicuángulo MSP) calculemos ahora la longitud del segmento MP e igualemos los resultados

$$a^2 \operatorname{tg}^2 B + a^2 \operatorname{tg}^2 A = \frac{a^2}{\cos^2 B} + \frac{a^2}{\cos^2 A} - \frac{2a^2 \cos C}{\cos B \cos A}.$$

Al reducir por a^2 y efectuar las transformaciones evidentes, llegaremos a la relación requerida por los datos del problema.

Señalemos que tanto la fig. 102 como la solución recién efectuada se cumplieron con la suposición de que todos los ángulos A, B, C son *agudos*. Sin embargo, la fórmula que hemos obtenido es válida sin

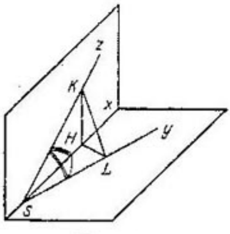


Fig. 103

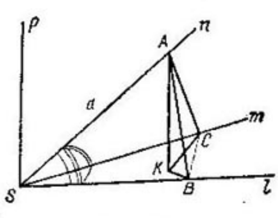


Fig. 104

dicha suposición complementaria. Ofrecemos al estudiante examinar todos los casos posibles y argumentar esta fórmula.

Cabe señalar que en caso de dibujar este ángulo triedro en una forma mucho mejor que en la fig. 102 y no con el vértice hacia arriba (es extraño, pero los estudiantes suelen hacerlo de este modo), la solución se cumpliría de modo más simple. En efecto, es razonable trazar el ángulo diedro recto de la manera que se usa para la representación del par de planos perpendiculares recíprocamente (fig. 103).

Sea Sx la arista del ángulo diedro recto, las aristas Sy y Sz se encuentran en diferentes planos de dicho ángulo. Desde un punto K cualquiera de la arista Sz bajamos las perpendiculares KH y KL, respectivamente, a las rectas Sx y Sy. Puesto que el ángulo diedro de la arista Sx es recto, la recta KH es perpendicular a todo el plano xSy y, en particular, $KH \perp SL$. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de las tres perpendiculares, $HL \perp SL$.

Ahora, valiéndonos del triángulo rectángulo KLS se obtiene $SL = SK \cos C$ y de los triángulos rectángulos SLH y SHK tenemos que $SL = SH \cos A = SK \cos B \cos A$. Comparando estas dos expresiones para SL nos convencemos de que la igualdad requerida es válida.

6. *Los ángulos planos de un ángulo triedro son iguales a 45°, 45° y 60°. Por su vértice se ha trazado una recta que es perpendicular a una de las caras, cuyo ángulo plano es igual a 45°. Hallar el ángulo entre esta recta y la arista del ángulo triedro que no se encuentra en la cara mencionada.*

Al construir el dibujo, evitemos otra vez el método habitual: en los datos del problema se trata de la perpendicular a dos rectas, es decir, al plano determinado por éstas, conviene representar este plano horizontalmente y la perpendicular, verticalmente.

Así, pues, sean S el vértice del ángulo triedro (fig. 104) de donde salen las aristas Sl y Sm que forman el ángulo de 45°; Sp, la perpendicular a dichas rectas; Sn, la tercera arista del ángulo triedro siendo $\angle nSm = 45°$ y $\angle nSl = 60°$.

Tomemos un segmento SA de cierta longitud a en la recta Sn y desde el punto A bajemos la perpendicular AK al plano mSl y las perpendiculares AB y AC a las rectas Sl y Sm respectivamente. Después de unir los puntos B y C con el punto K, según el teorema de las tres perpendiculares obtenemos que BK y CK son perpendiculares respectivamente a las rectas Sl y Sm.

A base de los triángulos rectángulos ACS y ABS encontramos fácilmente que $SC = a\sqrt{2}/2$, $SB = a/2$. Sin embargo, si unimos los puntos B y C y examinamos el triángulo CBS, según el teorema de los cosenos se determina que $CB = a/2$, es decir, $CB = SB$. Puesto que $\angle CSB = 45°$, en este caso el triángulo isósceles CBS tiene en su vértice B un ángulo *recto*. Pero ya hemos señalado que $\angle KBS = 90°$, de modo que hemos llegado a una contradicción inesperada.

Los estudiantes resuelven esta contradicción con gran dificultad pese a que el problema no es tan complejo. De los razonamientos efectuados se deduce que la configuración ilustrada en la fig. 104 no tiene lugar en la realidad (véase § 2, Parte III): el punto K, de verdad, ha de encontrarse en la recta CB (fig. 105).

No obstante, colocando el punto K en el segmento CB, encontraremos inmediatamente otra contradicción: como $CK \perp Sm$ y $BK \perp Sl$, resulta que en el triángulo SBC hay dos ángulos rectos. ¿De qué modo podemos resolver esta contradicción? Con este fin, partiendo de los triángulos rectángulos ACS y ABS hallamos que $AC = a\sqrt{2}/2$, $AB = a\sqrt{3}/2$. Recordando que $CB = a/2$ es fácil determinar que según el teorema, que es inverso al de Pitágoras, el triángulo ABC es rectangular, con el ángulo recto ACB.

Así, pues, tampoco tiene lugar la configuración ilustrada en la fig. 105: los puntos K y C coinciden, es decir, la perpendicular AC a la recta Sm es simultáneamente perpendicular a todo el plano mSl.

Pero es evidente en este caso que $AC \parallel Sp$, es decir, las rectas Sp y AC se sitúan en un mismo plano. Dado que $\angle ASC = 45°$, el ángulo buscado entre las rectas Sp y Sn, es decir, el ángulo nSp es igual a 45°.

Señalemos que al disponer de una imaginación geométrica bastante desarrollada, el estudiante puede hallar una solución muy breve de este problema, puramente geométrica, que no requiere cálculos. Examinemos un cubo (fig. 106). Si se toma en consideración que el ángulo triedro $SABC$ es el ángulo triedro de que se trata en los datos

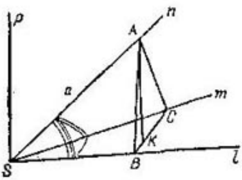


Fig. 105

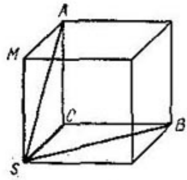


Fig. 106

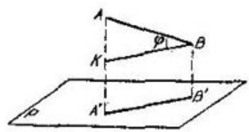


Fig. 107

del problema y que la arista SM del cubo es la perpendicular a la cara BSC, es evidente que el ángulo MSA de 45° es el ángulo que se busca.

Para concluir el párrafo, nos detendremos en el concepto de *proyección ortogonal*.

En particular, *si el segmento AB dispuesto en el espacio se proyecta ortogonalmente sobre cierto plano P, la longitud de la proyección $A'B'$ está ligada con la longitud del segmento AB mediante la relación*

$$A'B' = AB\cos\varphi, \qquad (1)$$

donde φ es *el ángulo entre la recta AB y el plano P*[1] (fig. 107). Si por el punto B trazamos la recta BK paralela a la proyección $A'B'$, esta fórmula se deduce del triángulo rectángulo AKB, ya que el ángulo ABK se encuentra entre la recta AB y el plano P.

La fórmula (1) muestra que la longitud de la proyección del segmento nunca puede sobrepasar la longitud del propio segmento y que es igual a su longitud si el segmento es paralelo al plano en que se proyecta. En cambio, si el segmento es perpendicular a dicho plano, su proyección es un punto.

[1] Si la recta y el plano son paralelos, el ángulo entre éstos se considera (según la definición) igual a cero.

A menudo es útil la proposición que describe la relación entre las áreas de una figura plana y de su proyección ortogonal. Precisamente, *si S es el área de un polígono plano y S_{pr} es el área de su proyección sobre cierto plano P,*

$$S_{pr} = S\cos\alpha, \tag{2}$$

donde α es el ángulo entre el plano P y el plano del polígono en cuestión[1].

Demostremos primero esta fórmula para el triángulo (fig. 108). Vamos a suponer que el triángulo ABC se proyecta ortogonalmente sobre el plano P; entonces obtenemos el triángulo $A'B'C'$. (Si un segmento sirve como proyección, esto significa que el plano del triángulo ABC es perpendicular al plano P y la fórmula que se demuestra será evidente si se toma en consideración que el área del triángulo, degenerado en el segmento, es igual a cero.) Supongamos que de los tres vértices del triángulo ABC el vértice B posee la propiedad de que $AA' > BB' > CC'$. (Proponemos al estudiante analizar el caso de $AA' = BB' \neq CC'$; si $AA' = BB' = CC'$, el plano del triángulo ABC es paralelo al plano P).

Tracemos por el punto B el plano P_1 paralelo al plano P; la proyección del triángulo ABC sobre el plano P_1 es el triángulo $A''BC''$, igual

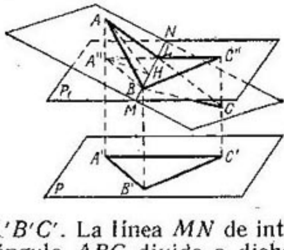


Fig. 108

al triángulo $A'B'C'$. La línea MN de intersección del plano P_1 con el plano del triángulo ABC divide a dicho triángulo en dos: $\triangle ABL$ y $\triangle BLC$.

Bajamos en el plano del triángulo ABC una perpendicular AH desde el punto A al lado BL; en este caso, según el teorema de las tres perpendiculares $A''H \perp BL$ y, por lo tanto,

$$S_{ABL} = 1/2BL\cdot AH; \quad S_{A''BL} = 1/2BL\cdot A''H.$$

Pero, el ángulo entre la recta AH y el plano P_1 es igual al ángulo α entre el plano del triángulo ABC y el plano P_1 (o el plano P). Por esta razón $A''H = AH\cdot\cos\alpha$ y, por lo tanto,

$$S_{A''BL} = 1/2BL\cdot A''H = 1/2BL\cdot AH\cdot\cos\alpha = S_{ABL}\cdot\cos\alpha.$$

[1] El ángulo entre dos planos (que se intersecan mutuamente) se mide por el ángulo lineal de uno de los ángulos diedros formados por estos planos. Si los planos son paralelos, el ángulo entre éstos se considera (según la definición) igual a cero.

El razonamiento es exactamente análogo para los triángulos BCL y $BC''L$; de este modo,

$$S_{\text{pr}} = S_{A'B'C'} = S_{A''BC''} = S_{ABC} \cdot \cos\alpha = S \cdot \cos\alpha.$$

Si la figura que se proyecta es un polígono, en tal caso, dividiendo éste y su proyección en triángulos y sumando los resultados para cada par de triángulos, llegaremos a la fórmula que se demuestra.

Conviene utilizar la fórmula (2) para calcular las áreas de las secciones de diversos cuerpos, superficies laterales, ángulos entre los planos, etc. Por ejemplo, si se conocen el área s de la base de una pirámide n-angular *regular* y el ángulo α de la inclinación de la cara lateral respecto al plano de la base, entonces la superficie lateral

$$S = \frac{s}{\cos\alpha}.$$

En lo que se refiere a una pirámide truncada, s será la diferencia de las áreas de las bases mayor y menor. No es difícil darse cuenta de que este hecho es válido también para cualquier pirámide irregular siempre que todas sus caras laterales estén inclinadas al plano de la base bajo *el mismo* ángulo, el ángulo α.

EJERCICIOS:

1. Sea $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cubo ($ABCD$ es el cuadrado de la base inferior; AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 son las aristas laterales). Hallar la magnitud del ángulo entre las rectas: a) AA_1 y B_1D; b) AD_1 y D_1C; c) AD_1 y B_1D. Hallar la distancia entre las rectas: d) AA_1 y B_1D; e) AD_1 y DC_1, si la arista del cubo es igual a a.

2. Determinar el ángulo entre las aristas que se cruzan y el ángulo diedro entre las caras de un tetraedro regular. Hallar la distancia entre las aristas que se cruzan, si el lado del tetraedro es a.

3. ¿Es válida la afirmación de que siendo L y l rectas que se cruzan, por la recta L se puede trazar sólo un plano, paralelo a la recta l? Aclarar, si es justa tal demostración de la afirmación. Tomemos el punto A en la recta L y por este punto tracemos una recta L^* paralela a la recta l. El plano π que pasa las rectas L y L^* que se cortan es, por lo visto, paralelo a la recta l. Puesto que por el punto A puede trazarse una sola recta L^* paralela a la recta l y como puede trazarse sólo un plano por las rectas L y L^* que se cortan, entonces por la recta L puede trazarse sólo un plano paralelo a la recta l.

4. Si L y l son dos rectas que se cruzan, ¿es siempre posible construir un plano que contenga la recta L y que sea perpendicular a l?

5. ¿Existe siempre una recta que es perpendicular a tres rectas dadas que se cruzan en pares?

6. ¿Existe siempre una recta que interseca las tres rectas dadas que se cruzan en pares?

7. ¿Existen en el espacio cuatro rectas que se cruzan y que son mutuamente perpendiculares en pares?

8. En un cubo de arista a se ha trazado una perpendicular común para dos diagonales que se cruzan y que pertenecen a las caras contiguas. Hallar la longitud de los segmentos en los cuales la perpendicular divide dichas diagonales de las caras.

9. Si una recta forma ángulos iguales con cada una de las tres rectas no paralelas en pares, situadas en un plano, dicha recta es perpendicular a éste. Demuéstrelo,

10. ¿Pueden ser perpendiculares al plano de la base dos caras laterales no contiguas de una pirámide de base poligonal?

11. ¿En qué límites puede cambiar la magnitud del ángulo plano formado como resultado de la sección del ángulo diedro dado por planos cualesquiera posibles que cortan la arista del ángulo diedro?

12. Supongamos que A, B, C, D son cuatro puntos arbitrarios del espacio. Demostrar que los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD, DA se encuentran en un mismo plano. ¿De qué forma se obtendrá la figura si se unen entre sí consecutivamente los puntos medios de estos segmentos?

13. Demostrar que las cuatro alturas del tetraedro regular se intersecan en un mismo punto.

14. La recta AB es paralela al plano π. La recta CD interseca la recta AB bajo un ángulo agudo α y forma con el plano π el ángulo φ. Determinar el ángulo entre el plano π y el plano en que se hallan las rectas AB y CD.

15. El plano que corta una de las aristas del tetraedro regular divide su volumen en una relación de 3 : 5. Hallar los tangentes de los ángulos en los que dicho plano divide el ángulo diedro del tetraedro.

16. En una pirámide triangular regular el lado de la base equivale a y las aristas laterales son iguales a b. Determinar el ángulo diedro de la arista lateral.

17. Un triángulo rectángulo está dispuesto de tal modo que su hipotenusa se encuentra en el plano π y los catetos forman con este plano los ángulos α y β respectivamente. Hallar el ángulo entre el plano del triángulo y el plano π.

18. Desde un punto de la arista de un ángulo diedro α $(0 < \alpha < 90°)$ salen dos rayos dispuestos en diferentes caras. Uno de los rayos es perpendicular a la arista del ángulo diedro y el otro forma con la arista el ángulo agudo β. Hallar el ángulo entre los rayos.

19. Los segmentos de dos rectas comprendidos entre planos paralelos están dispuestos en una relación de 2 : 3 y sus ángulos con uno de los planos, en una relación de 2 : 1 respectivamente. Determinar estos ángulos.

20. Los ángulos planos de un ángulo triedro son iguales a α, β y γ. Se toma un punto a la distancia 1 desde el vértice del ángulo triedro en la arista a la cual son contiguos los ángulos planos β y γ. Determinar la distancia entre este punto y el plano del ángulo α.

21. En una esfera cuyo radio es R se toma el punto M y por éste se trazan tres cuerdas MP; MQ y MR iguales entre sí, de tal modo que $\angle PMQ = \angle QMR = \angle RMP = \alpha$. Hallar la longitud de las cuerdas.

22. En un triángulo rectángulo, por la bisectriz del ángulo recto, está trazado un plano que constituye con el plano del triángulo un ángulo α. ¿Qué ángulos forma el plano con los catetos del triángulo?

23. Una recta tangente a un cono, junto con la generatriz de éste forma un ángulo agudo α en el punto de tangencia y está inclinada respecto del plano de la base del cono a un ángulo β. Determinar el ángulo entre la generatriz y el plano de la base del cono.

24. La altura de una pirámide triangular $ABCD$, bajada desde al vértice D pasa por el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC. Se sabe, además, que $DB = b$, $DC = c$, $\angle BDC = 90°$. Hallar la relación entre las áreas de las caras ADB y ADC.

25. El segmento AB de la longitud a y el CD de la longitud b se encuentran en dos rectas que se cruzan, cuyo ángulo es α. Las bases O y O' de la perpendicular común de la longitud c a dichas rectas dividen los segmentos AB y CD de tal manera que $OA : OB = 2 : 3$ y $CO' : O'D = 3 : 2$. Hallar las longitudes de los segmentos BD y BC.

26. Sea $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un paralelepípedo recto ($ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ son paralelogramos, mientras que las aristas laterales AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 son paralelas entre sí y perpendiculares al plano de estos paralelogramos), en el cual $AD_1 = A_1D = a$, $BA_1 = AB_1 = b$, $AC = c$, $BD = d$. Calcular el ángulo diedro entre las caras AA_1B_1B y AA_1D_1D.

27. Dentro de un ángulo triedro, cuyos ángulos planos son iguales a α, pasa una recta de igual inclinación a sus aristas. Hallar el ángulo de inclinación de dicha recta respecto a cada arista del ángulo triedro.

28. En el plano P se da el triángulo equilátero ABC de lado a. En la perpendicular al plano P se toma el segmento $AS = a$ en el punto A. Hallar la tangente del ángulo agudo entre las rectas AB y SC y la distancia mínima entre éstas.

29. Desde la base de la altura de una pirámide triangular regular se ha bajado una perpendicular a la cara lateral igual a a. Hallar el volumen de la pirámide si el ángulo plano al vértice de la pirámide es α.

30. Desde la base de la altura de una pirámide triangular regular se ha bajado una perpendicular a la arista lateral igual a p. Hallar el volumen de la pirámide si el ángulo diedro entre la cara lateral y la base de la pirámide es igual a α.

31. Determinar el volumen del paralelepípedo siendo todas sus aristas iguales a 1 y los ángulos planos a uno de los vértices $\varphi < 90°$.

32. Determinar el seno del ángulo entre dos alturas bajadas desde dos vértices de un tetraedro regular a las caras opuestas.

33. En el ángulo triedro $OABC$ el ángulo entre las caras OAB y OBC es recto, mientras que la magnitud de cada uno de los ángulos diedros restantes es igual a γ. Hallar la magnitud del ángulo plano AOC.

34. El ángulo entre dos rectas que se cruzan es igual a 60°. El punto A se encuentra en una recta y el punto B en la otra, siendo iguales las distancias desde cada uno de los puntos hasta la perpendicular común de las rectas que se cruzan y también iguales a la distancia entre las rectas. Hallar el ángulo entre la perpendicular común y la recta AB. Préstese atención a la posibilidad de resolver el problema no unívocamente.

35. El segmento AB se sitúa en la arista de un ángulo diedro, M es el punto de una de las caras del ángulo, estando dispuesto aquél a una distancia l de la arista. La perpendicular bajada desde el punto M hasta la otra cara del ángulo diedro se observa desde el punto A bajo el ángulo α y desde el punto B, bajo el ángulo β. La distancia entre el centro de gravedad del triángulo ABM y la otra cara del ángulo diedro es igual a m. Hallar la longitud del segmento AB. Préstese atención a la posibilidad de una solución no unívoca del problema.

36. Tres conos circulares rectos iguales con el ángulo α $(\alpha \leqslant 2\pi/3)$ tienen en la sección axial un vértice común y son tangentes uno a otro exteriormente por las generatrices l_1, l_2, l_3. Hallar el ángulo entre l_1 y l_2.

§ 5. DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS

La experiencia de los exámenes enseña que las demostraciones geométricas son las que implican mayores dificultades a los estudiantes. Los diversos problemas a demostrar suelen considerarse bastante complejos y más difíciles que los de cálculo.

Las demostraciones geométricas son difíciles, ante todo, porque requieren un razonamiento lógico y la expresión exacta de los pensamientos, la comprensión clara de lo que se da y lo que se necesita demostrar. Precisamente, la ausencia de hábitos en la realización de las deducciones lógicas explica los errores en la solución de problemas para la demostración. Al examinar las "demostraciones" de algunos estudiantes el profesor puede ver la idea bastante vaga de éstos sobre qué significa demostrar uno u otro concepto.

La habilidad de pensar lógicamente, fundamentar con exactitud los conceptos geométricos pueden adquirirse sólo por medio de la práctica, resolviendo muchos problemas. Se sabe que es imposible par una "receta" general de cómo puede hallarse la demostración de una u otra afirmación, cómo se debe resolver un problema concreto para la demostración. Sin proponernos el objetivo de ilustrar todos los métodos posibles de demostraciones y enumerar los errores cometidos por los estudiantes, aquí damos algunos ejemplos de razonamientos y analizamos los más típicos y característicos.

Al comenzar a demostrar un concepto geométrico, a resolver un problema para la demostración debe hallarse ante todo, la idea, con la cual se logra construir el argumento estricto de la afirmación que nos interesa. Con este fin es necesario manifestar cierta ingeniosidad: "notar" la aplicabilidad de varios teoremas ya conocidos según el curso, buscar diversas construcciones complementarias y advertir cierta propiedad específica de la configuración geométrica en cuestión [1].

Esta "búsqueda de la solución" no debe exponerse en la solución limpia. Esta última ha de representarse como una demostración estricta en la cual no importa de qué modo nos las hemos arreglado para efectuar los razonamientos de una u otra manera. Pero en cambio, en la solución limpia se requiere fundamentar todos los razonamientos correcta y lógicamente, de forma exhaustiva.

Analicemos algunos ejemplos acerca del modo de la búsqueda de aproximaciones a la solución de los problemas de Geometría para la demostración.

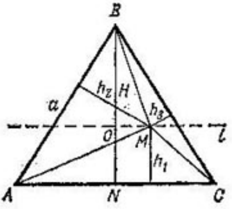


Fig. 109

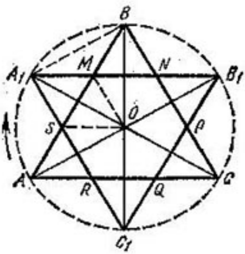


Fig. 110

1. *Por el centro de un triángulo regular se ha trazado una recta, paralela a la base. En la recta, dentro del triángulo, se ha tomado un punto arbitrario M. Demostrar que la distancia entre el punto M y la base del triángulo es la media aritmética de las distancias desde el punto M hasta los lados laterales del triángulo.*

[1] Aquí puede recurrirse a cierta analogía con el método de agrupación que es de amplio uso en Algebra. En general, es difícil decir algo definido acerca de qué modo puede hallarse la agrupación que nos conduzca al objetivo. No obstante, si se dispone del hábito suficiente para la solución de los problemas, esta agrupación se localiza con mayor o menor rapidez, después de algunas apreciaciones y tentativas.

Primero tratemos de hallar la idea de la demostración. Sean h_1 la distancia entre el punto M y la base AC; h_2 y h_3, las distancias entre el mismo punto y los lados laterales AB y BC (fig. 109).

Se necesita obtener la igualdad $h_1 = 1/2\,(h_2 + h_3)$. Como la distancia entre la recta l y la base AC es igual a una tercera parte de la altura H del triángulo, en este caso $h_1 = 1/3\,H$. Por lo tanto es suficiente demostrar que $h_2 + h_3 = 2/3\,H$. Es fácil entender que en lugar de lo expuesto puede demostrarse la igualdad $h_1 + h_2 + h_3 = H$. Puesto que cada uno de los segmentos h_1, h_2 y h_3 es perpendicular al lado correspondiente del triángulo, sería lógico tratarse de demostrar la última igualdad utilizando los razonamientos relacionados con la medición de las áreas.

Ahora cumplimos una demostración estricta. Unamos el punto M con los vértices del triángulo. En este caso $S_{ABC} = S_{AMB} + S_{MBC} + S_{CMA}$ o, lo que es lo mismo, $1/2\,aH = 1/2\,ah_2 + 1/2\,ah_3 + 1/2\,ah_1$ donde a es la longitud del lado del triángulo. De aquí se deduce que $h_1 + h_2 + h_3 = H$. Por otro lado, $h_1 = ON = 1/3\,H$, ya que O es el centro del triángulo regular y el punto de intersección de las medianas. Por eso $h_2 + h_3 = H - h_1 = 2/3\,H$. Por consiguiente, en efecto, $h_2 + h_3 = 2h_1$, es decir, h_1 es la media aritmética de los segmentos h_2 y h_3.

He aquí otro problema de planimetría para la demostración, cuya dificultad principal reside, probablemente, en que la afirmación que se demuestra resulta nada más que evidente valiéndonos del dibujo y por lo tanto no está claro, de qué modo puede argumentarse estrictamente.

2. *Un triángulo equilátero se ha girado 60° alrededor del centro. Demostrar que el hexágono obtenido en la intersección de sus posiciones anterior y posterior es regular.*

Sea ABC el triángulo dado (fig. 110). Después del giro a 60° el punto A se trasladó al punto A_1; el punto B, al B_1; el punto C, al C_1. De acuerdo con los datos, $\angle AOA_1 = \angle BOB_1 = \angle COC_1 = 60°$. Pero, por otro lado, $\angle AOC = \angle AOB = \angle BOC = 120°$ y, por lo tanto, $\angle AOA_1 = \angle A_1OB = \angle BOB_1 = \angle B_1OC = \angle COC_1 = \angle C_1OA = 60°$. Además, todos los segmentos OA, OA_1, OB, OB_1, OC, OC_1 son de igual longitud. De los dos hechos se deduce que los puntos A, A_1, B, B_1, C, C_1 son los vértices del hexágono regular inscrito en la circunferencia con el centro en el punto O. Luego, por ser $\angle AOA_1 + \angle A_1OB + \angle BOB_1 = 180°$, los radios AO y OB_1 constituyen una recta. Esta última AB_1 es secante para el par de rectas A_1B_1 y AC, siendo iguales los ángulos alternos A_1B_1A y B_1AC (precisamente $\angle A_1B_1A = 30°$ como un ángulo inscrito que se apoya en el arco AA_1 cuyo ángulo central A_1OA es igual a 60°; de manera análoga, $\angle B_1AC = 30°$). Por consiguiente, $A_1B_1 \parallel AC$. De modo análogo se demuestra que $BC \parallel A_1C_1$ y $B_1C_1 \parallel BA$.

Pero en este caso $MN \parallel AC$, así que $\triangle MBN \backsim \triangle ABC$, de donde se desprende que el triángulo MBN es equilátero. De modo análogo puede demostrarse que los triángulos pequeños restantes con los vértices B_1, C, C_1, A, A_1 son equiláteros.

Tracemos el segmento A_1B. El ángulo A_1BA está inscrito en la circunferencia y se apoya en un arco de 60°. El ángulo B_1A_1B está también inscrito en la circunferencia apoyándose también en un arco de 60°. Por consiguiente, $\angle A_1BM = \angle MA_1B$. Por lo tanto, el triángulo A_1MB es isósceles: $A_1M = BM$. Pero los triángulos A_1SM y BMN son equiláteros y de esta igualdad se concluye que $SM = MN$. De forma igual se demuestran las igualdades $MN = NP = PQ = QR = RS$ de todos los demás lados del hexágono $MNPQRS$. Finalmente, todos los ángulos de este hexágono son contiguos a los ángulos de 60°, es decir, todos son iguales a 120°. Esto significa que en el hexágono $MNPQRS$ todos los lados y los ángulos son iguales, es decir, éste es regular.

Se puede ofrecer otra demostración empezando, como se dice, del otro lado.

Dividamos los lados del triángulo ABC en tres partes iguales. El hexágono obtenido $MNPQRS$ es, por lo visto, regular, ya que es fácil deducir de la semejanza de los triángulos que todos sus lados son iguales a $1/3\ AB$ y que todos los ángulos son de 120°.

Nos queda por demostrar que es precisamente este hexágono que se obtiene en la intersección del triángulo ABC y del triángulo "girado". Con este fin prolonguemos los lados MN, RS y PQ del hexágono hasta que se intersequen mutuamente en pares, y analicemos el triángulo formado $A_1B_1C_1$. Es obvio que $\angle A_1MS = 60°$ (siendo contiguo al ángulo SMN de 120°) y que $\angle A_1SM = 60°$. Por eso $\angle SA_1M = 60°$ y, de modo similar, $\angle NB_1P = \angle QC_1R = 60°$. Por lo tanto, el triángulo $A_1B_1C_1$ es equilátero.

Analicemos el cuadrilátero A_1MOS. Sus ángulos opuestos son iguales por pares ($\angle SA_1M = \angle MOS = 60°$, $\angle A_1SO = \angle A_1MO = 120°$). Por consiguiente, A_1MOS es un paralelogramo o, lo que es más exacto, un rombo, ya que $OS = OM$. Por esto A_1O es la bisectriz del ángulo SA_1M y, de modo análogo, B_1O es la bisectriz del ángulo NB_1P. De aquí se deduce que O es el centro del triángulo $A_1B_1C_1$. Además, $A_1B_1 = A_1M + MN + NB_1 = SM + MN + NP = AB$, es decir, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales.

Por fin, $\angle A_1OS = 30°$ (por ser A_1O la bisectriz del ángulo MOS) y, análogamente, $\angle AOS = 30°$, de donde $\angle AOA_1 = 60°$.

De este modo, los triángulos equiláteros ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales, tienen un centro común y los vértices del segundo se obtienen a consecuencia del giro a 60° de los vértices del primero. Por lo tanto, el triángulo $A_1B_1C_1$ es la segunda posición del triángulo dado de que se trata en el problema, mientras que $MNPQRS$ es el hexágono regular que nos interesa.

Si en el problema anterior es del todo evidente la afirmación que se demuestra, en el problema que sigue nos encontramos, en cambio, con una condición bastante voluminosa, con muchas construcciones y con la conclusión que no se deduce del dibujo. No obstante, si se analiza con atención el problema, resultará que no hay nada complejo en las construcciones porque la demostración de la afirmación es muy natural.

3. *Los ángulos C, A, B del triángulo ABC forman (en el orden indicado) una progresión geométrica con la razón 2. Supongamos que O es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, K es el centro de la circunferencia que es tangente al lado AC y a las prolongaciones de los lados BC y BA fuera de los puntos C y A; L es el centro de la circunferencia que es tangente al lado BC y a las prolongaciones de los lados AC y AB del triángulo fuera de los puntos C y B. Demostrar que son semejantes los triángulos ABC y OKL.*

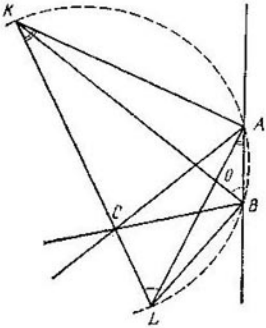


Fig. 111

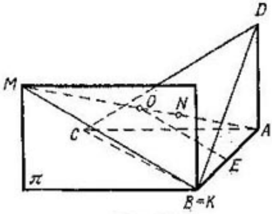


Fig. 112

De los datos del problema se deduce que en el triángulo ABC (fig. 111) tienen lugar las relaciones: $\angle CAB = 2 \angle BCA$, $\angle CBA = 2 \angle CAB$. Es evidente que el punto K equidista de las rectas AC, AB y CB y que por eso es el punto de intersección de las bisectrices BK y AK. Análogamente, AL y BL, así como AO y BO son bisectrices de los ángulos respectivos. En este caso los ángulos LAK y LBK son rectos (como ángulos entre las bisectrices de los ángulos contiguos).

Por eso, si construimos una circunferencia usando KL como diámetro, los puntos A y B se hallarán sobre la misma. Pero los ángulos KLA y KBA se apoyarán en el arco AK; por lo tanto, éstos son iguales. De manera análoga, $\angle LKB = \angle LAB$. Pero $\angle KBA = 1/2 \angle CBA = \angle CAB$ y $\angle LAB = 1/2 \angle CAB = \angle BCA$, de modo que $\angle KLA = \angle CAB$, $\angle LKB = \angle BCA$.

Por consiguiente, $\triangle ABC \backsim \triangle OKL$ (porque tienen dos ángulos respectivamente iguales).

Sin duda alguna, los problemas estereométricos para la demostración son más difíciles que los planimétricos. Esto se explica, ante todo, por la necesidad de imaginarse bien las configuraciones espaciales que a menudo son difíciles de representar claramente en el dibujo plano (véase § 6, Parte III sobre este asunto). Aún más difícil es "encontrar" una construcción adicional que facilitaría la solución de los problemas estereométricos. Incluso el nivel lógico de los razonamientos en las demostraciones en el espacio es mucho más alto que en la demostración de las afirmaciones planimétricas.

4. *En una pirámide de base triangular todos los ángulos planos del vértice son rectos. Demostrar que el vértice de la pirámide, el punto de intersección de las medianas de la base y el centro de la esfera circunscrita a la pirámide se encuentran en una misma recta.*

Designemos por A el vértice de la pirámide en cuestión y por BCD la base de ésta (fig. 112).

Con el fin de resolver el problema conviene representar la pirámide $ABCD$ no del modo ordinario, sino colocada en una de las caras laterales, por ejemplo, en la cara CAB. Según los datos del problema, $\angle BAD = \angle DAC = \angle CAB = 90°$.

Como se sabe, el centro de la esfera circunscrita a la pirámide es el punto de intersección de todos los planos que pasan por los puntos medios de las aristas de la pirámide perpendicularmente a dichas aristas (véase § 8, Parte III). De aquí se deduce, en particular, que *las rectas que unen el centro O de la esfera circunscrita a la pirámide $ABCD$ con los puntos medios de las aristas AB, AC y AD, son respectivamente perpendiculares a estas aristas.*

Unimos el centro O con el vértice A. Necesitamos demostrar que el punto N de intersección de la recta OA con el plano de la base BCD es el punto de intersección de las medianas del triángulo BCD. Con este propósito tendremos que efectuar construcciones adicionales en el espacio, fuera de la pirámide en cuestión.

En la recta AO, fuera del punto O, fijamos un punto M tal que $AM = 2AO$. Trazamos por este punto un plano π, perpendicular a la arista AB. Sea K el punto de intersección del plano π y de la arista AB; en este caso $MK \perp AB$. Supongamos que E es el punto medio del segmento AB; como ya hemos mencionado, $OE \perp AB$. Los triángulos rectángulos AEO y AKM que se encuentran en un mismo plano (trazado por las líneas rectas AB y AM que se intersecan) tienen un ángulo común al vértice A y por eso son semejantes. De su semejanza se deduce que $AK = 2AE$, es decir, $AK = AB$. Esto quiere decir que los puntos K y B coinciden.

Así, pues, *el plano π que pasa por el punto M perpendicularmente a la arista AB interseca a ésta en el punto B.* De modo análogo se demuestra que los planos que pasan por el punto M y son perpendiculares a las aristas AC y AD, intersecan éstas en los puntos C y D respectivamente. Pero en este caso, al intersecarse estos tres planos con los planos ABC, ABD y ACD de las caras laterales de la pirámide se forma un *paralelepípedo rectangular* $ABA_1CDB_1MC_1$ con la diagonal AM (fig. 113).

Nos queda aclarar, en qué punto la diagonal AM del paralelepípedo interseca el punto del triángulo BCD. La diagonal AM se ubica en el plano $ADMA_1$. Este interseca el segmento BC en su punto medio S (ya que al intersecarse las diagonales del paralelogramo ABA_1C, se dividen en mitades). Por eso, el plano $ADMA_1$ interseca el plano BCD por la recta que une el punto D con el punto medio S del segmento BC, es decir, por la mediana SD del triángulo BCD. Esto significa que el punto de intersección N de la diagonal AM con el plano de la base

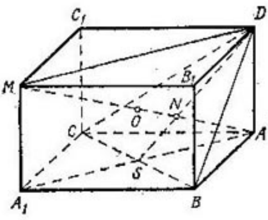


Fig. 113

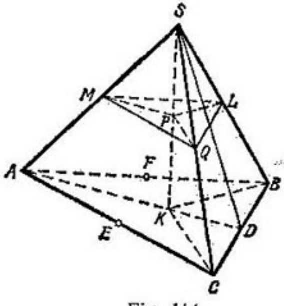


Fig. 114

BCD de la pirámide se encuentra en la mediana del triángulo BCD trazada desde el vértice D hasta el lado BC.

De manera análoga se demuestra (examinando el plano BMC_1A no representado en la fig. 113) que el punto N de intersección de la diagonal AM con el plano del triángulo BCD se halla en la mediana de este triángulo trazada desde el vértice B hasta el lado CD.

Por lo tanto, el punto de intersección de la recta OA con el plano de la base BCD de la pirámide $ABCD$ es efectivamente el punto de intersección de las medianas del triángulo BCD [1].

Uno de los errores más difundidos entre los estudiantes consiste en que *las demostraciones son incompletas y las argumentaciones lógicas son*

[1] Señalemos que al cumplir las construcciones en las figs. 112 y 113, suponíamos que el centro O de la esfera circunscrita se sitúa fuera de la pirámide, es decir, se halla en la recta AM más lejos del punto A que el punto N. Se podría demostrar estrictamente este fenómeno *(siendo rectos los ángulos del vértice de una pirámide de base triangular, el centro de la esfera circunscrita se encuentra fuera de la pirámide, al otro lado del plano de la base)*; sin embargo, esto no es necesario para resolver nuestro problema ya que en ningún lugar de la demostración hemos utilizado el orden de la disposición de los puntos A, N, O y M en la diagonal AM.

insuficientes. A menudo demuestran menos de lo que se requiere, hacen conclusiones sin suficientes argumentos. Precisamente, errores de este tipo suelen cometerse en la solución del problema que sigue.

5. *La superficie lateral de una pirámide de base triangular es igual a s y el perímetro de la base es igual a $3a$. Una esfera es tangente a los tres lados de la base en sus puntos medios e interseca las aristas laterales en sus puntos medios. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar el radio de la esfera.*

Señalemos, ante todo, que la esfera de referencia es "atravesada" por las aristas laterales de la pirámide en los puntos medios de éstas. Entre tanto, a pesar de la claridad del enunciado de los datos del problema, algunos estudiantes consideran que la esfera es *tangente* a las aristas laterales de la pirámide en los puntos medios de éstas. De este modo el problema propuesto se sustituye por otro. Así, la negligencia en la lectura de los datos o la incomprensión de éstos sirve de causa para los errores.

Para algunos resulta difícil dibujar la esfera mencionada en los datos y representar la figura necesaria. De hecho, es suficiente imaginar la esfera sin trazarla en el dibujo (véase § 8, Parte III).

Después de hacer estas observaciones preliminares, vamos a demostrar que la pirámide de que se trata en los datos es regular (designémosla por $SABC$, fig. 114). La esfera es tangente a los lados de la base AB, BC y CA, en sus puntos medios F, D y E. De acuerdo con la propiedad de las tangentes a la esfera, trazadas desde un punto, $AF = AE$, $BF = BD$, $CE = CD$. Pero según los datos $AE = EC$, $CD = DB$, $AF = FB$, y por eso está claro que la base de la pirámide es un triángulo regular.

Cortando la esfera, el plano de la base ABC forma una circunferencia que resulta inscrita en este triángulo regular. Es evidente que el centro de esta circunferencia, el punto K, coincide con el centro del triángulo regular ABC.

Supongamos que M, L, Q son los puntos medios de las aristas laterales AS, BS y CS de la pirámide. Algunos estudiantes escriben de inmediato que el plano trazado por estos puntos es paralelo a la base ABC, sin juzgar que es necesario argumentar esta confirmación. Pero, ¿por qué han de ser paralelos estos planos? Puesto que MQ es la línea media del triángulo ASC, en este caso $MQ \parallel AC$, por las mismas razones $QL \parallel CB$. Precisamente de aquí, conforme al principio de paralelismo de dos planos, se deduce nuestra afirmación.

De acuerdo con la propiedad de secciones paralelas en la pirámide, el triángulo MLQ es también regular, por ser semejante al triángulo regular ABC. Al cortar la esfera, el plano del triángulo MLQ forma una circunferencia circunscrita alrededor de este triángulo, y su centro coincide con el centro del triángulo regular MLQ.

Muchos estudiantes, al designar este centro con la letra P, trazan una recta por los puntos S, P y K diciendo que esta recta es la altura de la pirámide. Sin embargo, todavía no tenemos razón para tal conclusión, ya que no hemos demostrado que estos tres puntos se encuentran en una misma recta y que esta recta es perpendicular al plano de la base.

A fin de cumplir una demostración rigurosa actuemos del modo siguiente. Tracemos la recta SK por el vértice de la pirámide y el centro de la base; supongamos que esta recta interseca el plano MLQ en cierto punto P. Unamos este punto con los vértices del triángulo MLQ, y el punto K, con los vértices del triángulo ABC. Las rectas PL y KB son paralelas (como líneas de intersección de dos planos paralelos MLQ y ABC con el plano KSB) y por eso $\triangle KSB \sim \triangle PSL$, por consiguiente, $PL = \frac{1}{2} KB$. De manera análoga se demuestra que $PQ = \frac{1}{2} KC$, $PM = \frac{1}{2} KA$. Siendo $KB = KC = KA$, el P es el punto

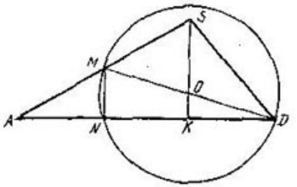


Fig. 115

de intersección de la recta KS con el plano MLQ, que equidista de los tres vértices del triángulo MLQ y por esta razón es el centro de la circunferencia circunscrita. Así queda probado que el vértice S y los centros P y K de los triángulos MLQ y ABC se hallan en una misma recta.

Esta recta une los centros de las dos circunferencias formadas mediante la sección de la esfera por dos planos paralelos. Como se sabe, tal recta es perpendicular a estos planos y pasa por el centro de la esfera. Por lo tanto, la recta SK es perpendicular al plano ABC, es decir, es la altura de la pirámide. Simultáneamente hemos demostrado que el centro de la esfera a la que se hace referencia en los datos del problema, se encuentra en la altura de la pirámide.

Así, la base de la pirámide $SABC$ es un triángulo regular y la altura de la pirámide SK pasa por el centro K de la base. De acuerdo con la definición esto significa que la pirámide $SABC$ es regular.

Para calcular el radio buscado de la esfera conviene trazar por separado un dibujo en el plano del triángulo ASD (fig. 115). Sea el punto O, que se halla en la altura SK, el centro de la esfera. Claro está que los segmentos OM y OD son iguales al radio r de la esfera.

Muchos estudiantes suponen que MOD es el diámetro de la esfera; en esta afirmación se basa la solución ulterior. Pero dicha afirmación todavía no está fundamentada, ya que no se deduce de los razonamientos anteriores y necesita una demostración especial.

Designemos por N el punto de intersección de la circunferencia cortada de la esfera por el plano ASD, con la recta AD. Puesto que $KD = \frac{1}{3} AD$ (el punto K es el centro del triángulo regular ABC) y $NK = KD$ (ya que el punto K es la base de la perpendicular bajada desde el centro O a la cuerda ND), entonces $AN = NK = KD$. Pero en tal caso MN es la línea media del triángulo ASK. Por consiguiente, $MN \parallel SK$, es decir, $\angle MND = 90°$. De aquí se deduce que MD, por ser la cuerda en la cual se apoya el ángulo recto inscrito, es el diámetro de la circunferencia.

Ahora no es difícil realizar los cálculos ulteriores. Después de obtener mediante la fórmula para la superficie lateral de la pirámide la longitud de su apotema SD, hay que hallar la altura de la pirámide con la ayuda del triángulo rectangular SKD y, luego, aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo MND. Con ello se obtiene definitivamente que

$$r = \frac{\sqrt{16s^2 + 45a^4}}{24a}.$$

Valiéndonos del ejemplo del problema examinado se puede concluir que es necesario demostrar minuciosamente cada uno de los conceptos geométricos que nos interesa, al practicar construcciones complementarias necesarias y aplicar los teoremas del curso de Geometría. Por lo general, todos estos conceptos no son tan evidentes como para dejarlos sin la argumentación debida. Ninguno de estos conceptos puede considerarse determinado del modo lógicamente estricto si no se tienen tales argumentaciones, tampoco puede tomarse por exhaustiva la solución de problemas que no contiene estas argumentaciones.

Muchos estudiantes preguntan, ¿si es necesario expresar por completo las enunciaciones de los teoremas y axiomas utilizados para la demostración? El estudiante puede elegir lo que prefiera: escribir toda la enunciación del teorema necesario para la argumentación o hacer una breve referencia sobre el mismo. Lo que importa es que los conceptos geométricos de las afirmaciones y construcciones estén descritos claramente y argumentados de una forma convincente y correcta.

Al hablar de la necesidad de dar demostraciones lógicamente estrictas de las afirmaciones geométricas, hay que señalar que en muchos casos los estudiantes en vez de argumentar estrictamente uno u otro concepto, recurren a las expresiones, por ejemplo, "es absolutamente evidente del dibujo", "del dibujo se deduce de forma clara que...", etc. Se debe recordar que la demostración geométrica ha de deducir el concepto requerido no de la "evidencia" que con frecuencia suele ser ilusoria, sino de los axiomas de Geometría, de las definiciones y teoremas conocidos en el programa de la secundaria.

He aquí un ejemplo en que casi todos los estudiantes obtuvieron respuestas correctas, pero que muchos de ellos cometieron errores de carácter lógico.

6. *Se da un cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ en que AA_1, BB_1, CC_1 y DD_1 son aristas laterales. Hallar el área del hexágono obtenido por la sección del cubo por un plano que pasa por el centro del cubo y los puntos medios de las aristas AB y BC. La arista del cubo es igual a* 1.

Puesto que en los datos del problema está indicada la forma de la sección, no es difícil imaginarse el hexágono. Por lo visto, esta es la razón por la cual muchos estudiantes comprendieron que el hexágono es regular y propusieron, por ejemplo, la solución siguiente:

"Sean K y L los puntos medios de las aristas AB y BC. Debido a la simetría, la sección pasa por los puntos P y N que son los puntos medios de las aristas A_1D_1 y D_1C_1. Es evidente que la sección atraviesa también los puntos M y Q que son los puntos medios de las aristas CC_1 y AA_1. Valiéndonos de los triángulos KBL, LCM, etc., según el teorema de Pitágoras se determinan fácilmente los lados del hexágono: $KL = LM = MN = NP = PQ = QK = \sqrt{1/2}$. Como todos los lados del hexágono son iguales, el hexágono es regular y, según la conocida longitud del lado se determina su área. Esta es igual a $3\sqrt{3}/4$".

La respuesta obtenida es correcta, pero esta argumentación no puede considerarse como *la solución completa* ya que contiene muchas afirmaciones geométricas no fundamentadas e incluso hay una errónea: no es obligatoriamente regular el hexágono cuyos lados son iguales. Se sabe que en la definición del hexágono regular, además de la condición de la igualdad de los lados, hay otra condición, la igualdad de los ángulos, que no se deduce de la igualdad de los lados. Sin embargo, en la "solución" mencionada no está argumentada la igualdad de los ángulos del hexágono que es una sección, por lo tanto la conclusión acerca de que el hexágono es regular resulta lógicamente falsa.

Ilustremos una de las soluciones completas posibles (utilizando el método general desarrollado en § 7, Parte III).

Supongamos que el punto O es el centro del cubo en cuestión (fig. 116). Este punto se encuentra en la intersección de las diagonales BD_1 y A_1C del cubo (éstas no están trazadas en el dibujo): el plano que pasa por las dos diagonales corta el cubo formando el rectángulo BA_1D_1C. Este plano, junto con el plano de la sección que nos interesa, tiene dos puntos comunes: O y el punto medio L de la arista BC; por esto su línea de intersección es la recta OL. Pero en el rectángulo BA_1D_1C el punto O es el centro de simetría, por eso LO interseca el lado A_1D_1 en su punto medio. Por consiguiente, queda demostrado que P es el punto medio de la arista A_1D_1 y pertenece a la sección que se considera.

Razonamientos del mismo tipo demuestran que el punto medio N de la arista D_1C_1 también pertenece a la sección que se considera.

La recta KL situada en el plano de la cara $ABCD$ (perteneciente también a la sección) interseca las prolongaciones de las aristas AD y CD en los puntos R y F respectivamente. Unimos con recta los puntos N y F que se encuentran en el plano de la cara CC_1D_1D a diferentes lados respecto del segmento CC_1; esta recta cruzará el segmento CC en cierto punto M que también pertenece a la sección. De modo análogo nos convencemos de que la sección pasa por cierto punto Q en la arista AA_1. Por fin, está claro, que las rectas NF y RP que pertenecen al plano de la sección y son líneas de intersección de este plano con los planos de las caras CC_1D_1D y AA_1D_1D respectivamente, se intersecan en cierto punto E situado en la línea de intersección de los planos de las caras mencionadas, es decir, en la recta DD_1.

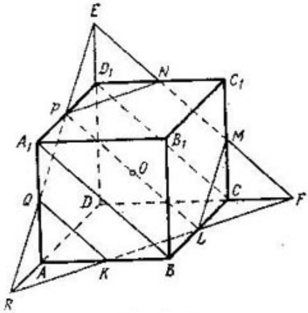


Fig. 116

Se han establecido los puntos de intersección del corte buscado con todas las aristas del cubo. Demostremos también que Q y M son los puntos medios de las aristas correspondientes. Comparando los triángulos rectángulos RAK, KBL y LCF nos convencemos de que son iguales y por eso $RA=FC=\frac{1}{2}AB$. Comparando los triángulos rectángulos RAQ, QA_1P y PD_1E podemos ver que son iguales (por ejemplo, $\triangle RAQ = \triangle QA_1P$, ya que $\angle RQA = \angle A_1QP$ por ser verticales, mientras que $RA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}A_1D_1 = A_1P$, puesto que P es el punto medio de la arista); pero en este caso, Q es el punto medio de la arista AA_1 y $D_1E = \frac{1}{2}AA_1$. Del mismo modo se demuestra también que M es el punto medio de la arista CC_1.

Así, queda demostrado que la sección $KLMNPQ$ pasa por los puntos medios de las aristas AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 y A_1A del cubo. Es evidente que cada uno de los lados del hexágono es igual a la mitad de la diagonal de la cara del cubo, es decir, todos los lados del hexágono son iguales.

Nos queda por demostrar, si todos los ángulos del hexágono son iguales; en caso positivo será demostrado que el hexágono obtenido en la sección es regular. De la igualdad de los triángulos rectángulos RAK, RAQ y QAK se deduce que el triángulo RKQ es equilátero; por consiguiente, $\angle RKQ = 60°$ y por eso $\angle QKL = 120°$. Del modo análogo nos convencemos de que los demás ángulos del hexágono son iguales a $120°$.

Ahora, para terminar la resolución, con plena razón puede recurrirse al enunciado del área del hexágono regular, valiéndonos de la longitud de su lado.

En algunos casos los estudiantes tratan de argumentar los conceptos estereométricos refiriéndose a afirmaciones análogas que son válidas para la planimetría. Por ejemplo, al resolver el problema 5 hemos aprovechado el teorema: *si desde un punto cualquiera tomado fuera de una esfera sólida se trazan tangentes a ésta, en este caso los segmentos de*

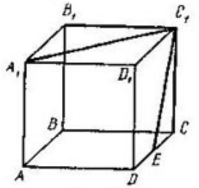


Fig. 117

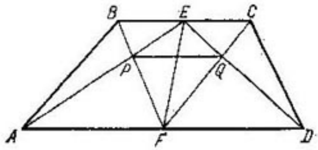


Fig. 118

cada tangente comprendidos entre este punto y el punto de tangencia son iguales entre sí. Algunos estudiantes consideran el teorema como válido para la estereometría por la simple razón de que "la propiedad análoga de las tangentes tiene lugar en el plano".

Sin embargo, la analogía entre las afirmaciones referentes al plano y al espacio no puede considerarse como una demostración; cada afirmación "espacial" debe argumentarse estrictamente. En particular, la propiedad recién enunciada de las tangentes a la esfera requiere una demostración especial (el propio lector puede realizarla).

Conviene tener en cuenta, que la analogía entre las afirmaciones planimétricas y las estereométricas puede incluso llevar a conclusiones erróneas. Como se sabe, en el plano dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son iguales entre sí. Pero *¿serán iguales dos ángulos agudos planos, dispuestos en el espacio, cuyos lados son respectivamente perpendiculares?* Es fácil trazar un dibujo que ilustre que tales ángulos no son obligatoriamente iguales (en la fig. 117 se muestra un cubo; aunque $B_1C_1 \perp C_1E$ y $A_1C_1 \perp C_1C$, pero los ángulos $B_1C_1A_1$ y CC_1E no son iguales entre sí).

Los estudiantes, al cumplir las demostraciones geométricas, sustituyen a veces las afirmaciones directas por las inversas. Por ejemplo, vamos a suponer, que en el proceso de razonamientos es preciso argumentar cierto concepto, es decir, *demostrar un teorema* (o *hacer referencia* a un teorema correspondiente del programa de la secundaria) *que afirma la validez del concepto que nos interesa*, partiendo de lo que está dado o ya se conoce. No obstante, con frecuencia, en vez de este teorema directo se hace referencia a la afirmación *inversa*, es decir, a la que *es válida en el supuesto de que tenga lugar el concepto que nos interesa.*

Claro está que esto es un grave error lógico; con este método de razonamiento el concepto que nos interesa no puede considerarse como demostrado. Las raíces de este error radican, por lo visto, en que no se comprende claramente qué *está dado* en cada etapa de la demostración que se considera y qué *se necesita argumentar*. Por lo tanto, si en el proceso de la demostración surge la necesidad de referirse a una u otra afirmación, se recomienda recordar su enunciación *exacta* y luego hay que convencerse de que están satisfechas las suposiciones con las cuales dicha afirmación queda demostrada.

Precisamente, el error lógico mencionado no permitió a muchos estudiantes resolver el problema que sigue.

7. *En el trapecio $ABCD$, E es el punto medio de la base BC, y F, el punto medio de la base AD. Designemos por P el punto de intersección de los segmentos BF y AE y por Q, el punto de intersección de los segmentos ED y CF. Demostrar que el segmento PQ es paralelo a las bases del trapecio.*

Como $\angle BEP = \angle PAF$ y $\angle PBE = \angle PFA$ (fig. 118), entonces $\triangle BPE \backsim \triangle APF$ y por eso

$$\frac{EP}{AP}=\frac{BE}{AF}.$$

Se puede demostrar de modo análogo que $\triangle EQC \backsim \triangle FQD$, de donde se deduce la igualdad

$$\frac{EQ}{QD}=\frac{EC}{FD}.$$

De acuerdo con los datos, $BE = EC$ y $AF = FD$. Por eso los miembros de la derecha de las dos proporciones escritas son iguales; pero en tal caso son iguales también los miembros de la izquierda:

$$\frac{AP}{EP}=\frac{DQ}{EQ}.$$

Componiendo la proporción derivada

$$\frac{AP+EP}{EP}=\frac{DQ+EQ}{EQ},$$

llegamos a la igualdad

$$\frac{AE}{EP}=\frac{DE}{EQ}. \qquad (1)$$

Por consiguiente, los triángulos AED y PEQ son semejantes, ya que tienen un ángulo común, E, y los lados son proporcionales respectivamente.

Aquí es donde muchos estudiantes suelen hacer la conclusión siguiente: "Puesto que $\triangle AED \backsim \triangle PEQ$, por lo tanto $PQ \parallel AD$ ya que la recta que es paralela a la base del triángulo separa de éste un triángulo semejante al de origen". Entre tanto, la aplicación de este teorema es aquí *inadmisible*: en éste *se supone* que la recta es paralela a la base del triángulo y *se demuestra* que en este caso el triángulo separado es semejante al dado. Pero en nuestro caso la situación es precisamente inversa: sabemos que $\triangle AED \sim \triangle PEQ$ y tenemos que demostrar que $PQ \parallel AD$. El carácter erróneo, desde el punto de vista lógico, de la conclusión que acabamos de hacer es evidente.

Para que esta conclusión sea argumentada lógicamente, tendríamos que referirnos a la afirmación *inversa* del teorema mencionado: "Si una recta interseca los lados laterales de un triángulo, separando un triángulo semejante al dado, esta recta es paralela a la base". Sin em-

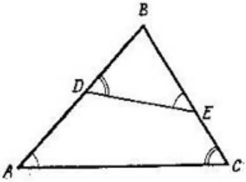


Fig. 119

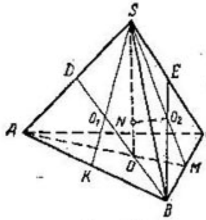


Fig. 120

bargo, esta afirmación *es errónea* (véase, por ejemplo, la fig. 119: en ésta $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ puesto que $\angle BED = \angle BAC$, $\angle BDE = \angle BCA$, pero DE no es paralela a AC). Se ve que el concepto de paralelismo de las rectas PQ y AD necesita una argumentación estricta.

Esta argumentación puede cumplirse del modo siguiente. En los triángulos semejantes los ángulos correspondientes son iguales; por eso, valiéndonos de la proporción (1) puede deducirse que $\angle EPQ = \angle EAD$. Pero estos ángulos se corresponden si la secante EA corta a las rectas PQ y AD; de aquí se deduce, según el criterio de paralelismo, que $PQ \parallel AD$.

Aquí hay otro problema en cuya resolución muchos estudiantes no realizan las demostraciones necesarias o las realizan con graves errores lógicos.

8. *Una esfera de radio r es tangente a las caras laterales de una pirámide de base triangular en los puntos de intersección de las alturas de éstas. La suma de los tres ángulos planos al vértice de la pirámide es igual a 3α. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar la longitud de la arista lateral de la pirámide.*

Primero nos detendremos en demostrar la suposición de que la pirámide $SABC$ es regular (fig. 120). Sean O_1 el punto de intersección de las alturas SK y BD de la cara lateral BSA y O_2, de las alturas SM y BE de la cara lateral BSC.

De acuerdo con los datos del problema, la esfera es tangente a los planos BSA y BSC en los puntos O_1 y O_2 respectivamente. Esto significa que cualquier recta que pase por el punto O_1 (u O_2) y que se sitúe en el plano BSA (respectivamente, en el plano BSC) es tangente a la esfera. En particular, las rectas SK, BD, SM, BE son tangentes a la esfera. Pero, en este caso, $SO_1 = SO_2$ y $BO_1 = BO_2$ de acuerdo con la propiedad de las tangentes a la esfera, trazadas de un mismo punto.

Al examinar los triángulos SBO_1 y SBO_2 nos convencemos de que tienen tres lados iguales en pares. De la igualdad de los triángulos se deduce que $\angle BSO_1 = \angle BSO_2$; $\angle SBO_1 = \angle SBO_2$.

Ahora es evidente que $\triangle BSE = \triangle BSD$ (son rectángulos, tienen una hipotenusa común BS y ángulos agudos iguales); $\triangle SBM = \triangle SBK$ (por las mismas razones). De la igualdad de estos triángulos deducimos que $\angle BSD = \angle BSE$; $\angle SBM = \angle SBK$.

Finalmente, examinaremos los triángulos ASB y BSC. Estos son iguales ya que tienen el lado común BS y dos ángulos, contiguos a éste, de dos en dos iguales. De aquí se deduce que $AB = BC$ y $AS = CS$.

Aplicando argumentaciones análogas para las caras laterales ASB y ASC, obtendremos las igualdades $AB = AC$ y $BS = CS$. De este modo demostramos que en la pirámide dada las aristas laterales son iguales entre sí, al igual que los lados de la base.

Al cumplir estos razonamientos, muchos estudiantes llegan a la conclusión siguiente: "Por lo tanto, la pirámide es regular, puesto que en la pirámide de base triangular, regular, las aristas laterales son iguales y la base es un triángulo regular". La afirmación de que en la pirámide de base triangular regular las aristas laterales son iguales y que su base es un triángulo regular, es absolutamente válida, pero no para este caso. Precisamente, la afirmación *inversa* es la que nos interesa: si en una pirámide las aristas laterales son iguales y la base es un triángulo regular, la pirámide es regular. Esta afirmación, distinta de la recién enunciada por algunos estudiantes es la que hay que *demostrar* [1], es decir, es necesario probar que con todas estas suposiciones se cumplen todas las condiciones de *la definición* de la pirámide regular de base triangular.

La demostración de esta afirmación no es compleja: de la igualdad de las aristas laterales se deduce que la altura SO de la pirámide pasa por el centro del triángulo regular ABC. Por eso, de acuerdo con la definición, la pirámide $SABC$ es regular.

[1] A veces esta objeción provoca la réplica siguiente: podemos *definir* la pirámide regular de base triangular como una pirámide cuya base es un triángulo regular y todas las aristas laterales son iguales entre sí. Naturalmente, tal definición puede darse; de acuerdo con *esta* definición la pirámide en cuestión, al instante, puede considerarse como regular. Pero en este caso hay que efectuar todos los razonamientos partiendo de esta definición (véase § 4, Parte III); en particular, hay que demostrar (esto será necesario en el proceso de la resolución ulterior del problema) que, en la pirámide definida de esta manera, la altura pasa por el centro de la base. Con el fin de evitar errores lógicos siempre sería mejor partir de las definiciones de uso general que se dan en los libros de texto.

Ahora es preciso efectuar otra etapa de la resolución, la del cálculo. Con este fin, necesitaremos el concepto de que *el centro de la esfera tangente a las caras laterales de la pirámide regular de base triangular, se sitúa en la altura de la pirámide.* A pesar de que aquí se trata de una esfera que es tangente solamente a las caras laterales de una pirámide regular (y no de una esfera inscrita en ésta), la demostración de esta afirmación coincide textualmente con los razonamientos que determinan la posición del centro de la esfera inscrita en la pirámide regular de base triangular (véase § 8, Parte III). Por eso no vamos a cumplir esta demostración, se la ofrecemos al lector.

Sin embargo, cabe señalar que esta demostración es un elemento obligatorio en la solución del problema. Por desgracia, muchos estupiantes no recurren a tal demostración, sustituyéndola por la frase: "Este concepto es evidente en el dibujo, gracias a la simetría". Claro está, la afirmación es obvia, pero no puede considerarse como una demostración exhaustiva. Pero si se pide realizar una argumentación más profunda, en casos raros se presenta una demostración lógica y correcta.

Así, pues, supongamos que el punto N *situado en la altura* SO *de la pirámide* $SABC$ *es el centro de la esfera tangente a las caras laterales.* Tracemos el plano SOM y unamos los puntos N y O_2. Como O_2 es el punto de tangencia, entonces el radio de la esfera $NO_2 = r$ es perpendicular al plano BSC y, por consiguiente, $\angle NO_2S = 90°$. Los triángulos rectángulos NO_2S y MOS son, evidentemente, semejantes y por lo tanto

$$NO_2 : OM = SO_2 : SO. \qquad (2)$$

Designemos por x la longitud buscada de la arista lateral de la pirámide. Por ser $\angle BSM = \alpha/2$, es fácil determinar el lado de la base de la pirámide y, por consiguiente, también el segmento OM. En este caso, según el teorema de Pitágoras, mediante el triángulo SOM se determina la altura SO de la pirámide. Finalmente, valiéndonos del triángulo SEB hallamos que $\angle SBE = 90° - \alpha$ y por eso el teorema de los senos aplicado al triángulo SBO_2 permite determinar a SO_2.

Al sustituir las expresiones obtenidas para NO_2, OM, SO_2 y SO en la igualdad (2) hallamos

$$x = \frac{r \operatorname{cotg}(\alpha/2)}{\cos\alpha} \sqrt{1 + 2\cos\alpha}.$$

Por lo común, los estudiantes creen que en lo referente a los problemas de Geometría para cálculos, "la respuesta correcta es lo fundamental". Y, como regla, resuelven con éxito la parte del cálculo (incluso el que requiere cierta minuciosidad) de la magnitud buscada. Pero muchos no prestan atención a otra parte, por supuesto la más importante, de la solución: no consideran necesario (o simplemente no entienden que esto es necesario) argumentar "la legitimidad" de las afirmaciones, es decir, demostrar los conceptos geométricos en los que se basan los cálculos. Aún más, no son raros los casos en que un estudiante que opera libremente con una variedad de fórmulas resulta ser completamente incapaz cuando se trata de la argumentación estricta de una afirmación de carácter geométrico, utilizada en los cálculos.

Mientras tanto, *la demostración de los conceptos geométricos que se aplican a los cálculos, es parte integrante e importante en principio de la solución del problema de cálculo.* ¿Por qué en la pirámide concreta dada, de que se trata en el problema, el centro de la esfera inscrita se halla en la altura? ¿Por qué la recta en cuestión es perpendicular al plano construido? ¿Por qué la esfera que se examina es tangente al plano dado en el punto indicado? Todas estas afirmaciones que se utilizan fundamentalmente en la resolución de un problema de cálculo, deben ser no sólo enunciadas sino demostradas. En el examen se requiere, ante todo, argumentar correcta y completamente la resolución del problema y no mencionar simplemente las afirmaciones, ya que sin demostraciones imprescindibles los cálculos resultan "suspendidos en el aire" y, por lo tanto, el problema no puede considerarse como resuelto de modo impecable.

En términos generales, la división de los problemas de Geometría en los "de cálculo" y los de "demostración" es puramente convencional. De los ejemplos ilustrados arriba (véanse los problemas 1, 2) se ve que a veces lo necesario puede demostrarse sólo después de cumplir ciertos cálculos. Por otra parte, hay muchos problemas para cálculo, en cuya solución las afirmaciones no son las que ocupan el lugar más importante, sino la demostración de cierto concepto. Con esta situación nos tropezamos en la solución del problema 6. En el problema que sigue tampoco podríamos realizar los cálculos sin argumentación completa de la afirmación necesaria, ya que sólo en el proceso de la demostración se consigue encontrar el método que permite calcular la respuesta.

9. *Se da un triángulo de área s. Las medianas del triángulo componen otro triángulo, luego las medianas del otro, un tercero, etc. En términos generales, el* $(n+1)$ — *ésimo triángulo se compone de las medianas del* n*-ésimo triángulo. Hallar la suma de las áreas de todos los triángulos en esta sucesión.*

Ante todo, demostraremos que es posible componer un triángulo por medio de medianas de un triángulo *cualquiera.*

Sean AK, BM y CN las medianas del triángulo ABC (fig. 121). Por el punto A trazaremos una recta que es paralela a CN y fijaremos el segmento $AP = CN$. Todo quedará demostrado si probamos que $KP = BM$.

Como $ANCP$ es un paralelogramo (de acuerdo con la construcción) y $AM = MC$, los puntos N, M y P se hallan en una misma recta, en la diagonal de este paralelogramo, en este caso $NM = MP$. Pero NM es la línea media del triángulo ABC y por lo tanto, $NP \parallel BC$ y $NM = \frac{1}{2} BC = BK$. Por esto en el cuadrilátero $BMPK$ los lados MP y BK son iguales y paralelos, es decir, el cuadrilátero es un paralelogramo y, por consiguiente, $KP = BM$.

Así, pues, se puede componer un triángulo por medio de medianas de *cualquier* triángulo. Supongamos ahora que ABC es el triángulo dado de área s; después que el triángulo AKP esté compuesto de sus medianas. Hallaremos $S_{AKP} = s_1$ si $S_{ABC} = s$. Señalaremos con este fin que AR es la mediana del triángulo AKP (la igualdad $PR = RK$ procede de la igualdad $\triangle PMR = \triangle RKC$) y recordemos que la mediana divide el área del triángulo en dos partes iguales. Por esta razón $S_{AKR} = s_1/2$. Por otra parte, $S_{AKR} = 3s/8$, ya que AR es la base del triángulo AKR y es igual a $3/4\ AC$ y la altura de este triángulo es dos veces más corta que la del triángulo ABC. De aquí obtenemos que $s_1 = 3/4\ s$.

Si por medio de las medianas del triángulo AKP se construye de nuevo un triángulo, el área de éste será $s_2 = 3/4 s_1$, etc. El problema

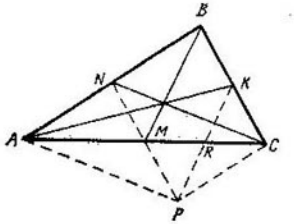


Fig. 121

se reduce a la búsqueda de la suma $S = s + s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots$ No es difícil imaginar que ésta es la suma de una progresión geométrica que desciende infinitamente.

$$S = s + \frac{3}{4}s + \left(\frac{3}{4}\right)^2 s + \ldots = 4s.$$

La argumentación de los conceptos geométricos, sobre los cuales se basan los cálculos, es particularmente importante para los problemas estereométricos. Muy a menudo el centro de gravedad de la solución de tales problemas está en la demostración y no en los cálculos que se reducen a la aplicación no compleja de las fórmulas ya conocidas.

10. *La altura de una pirámide regular de base triangular es igual a h. Los puntos de intersección de las alturas de cada una de las caras laterales y el vértice de la pirámide se encuentran en la superficie de una esfera de radio r. Hallar el volúmen de la pirámide.*

Muchos estudiantes piensan que el centro de la esfera está situado en la altura de la pirámide (esto se utiliza en los cálculos), y ellos, sin argumentar este concepto como es debido, pasan directamente a los cálculos. Algunos, incluso, replican contra el error admitido en la resolución, es decir, la falta de demostración, refiriéndose a que "nunca se les ha pedido exponer una descripción detallada y explicar el dibujo". Pero no se trata de la explicación del dibujo sino de la falta de una parte esencial de la solución.

El plano π trazado por los puntos O_1, O_2 y O_3 (que son los puntos de intersección de las alturas de las caras laterales de la pirámide $SABC$ (fig. 122) corta en la superficie de la esfera a una circunferencia que pasa por los tres puntos mencionados. El centro de la esfera se encuentra en la perpendicular al plano π trazada desde el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $O_1O_2O_3$. Demostraremos que dicha perpendicular coincide con la altura de la pirámide.

Por ser la pirámide regular, todas sus caras laterales son triángulos iguales y por eso los puntos de intersección de sus alturas (los puntos O_1, O_2 y O_3) equidistan del vértice S. De este modo, $SO_1 = SO_2 = SO_3$ [1].

Tracemos la altura SK de la pirámide y designemos por N el punto de intersección de SK con el plano π. De la igualdad de los triángulos SKD, SKF y SKE se deduce que $\angle DSK = \angle FSK =$

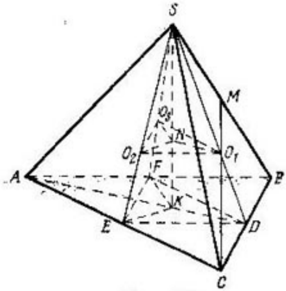


Fig. 122

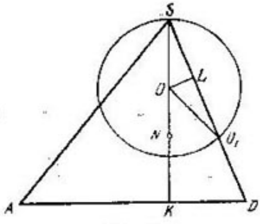


Fig. 123

$= \angle ESK$, y de la igualdad de estos ángulos y de la de los segmentos SO_1, SO_2 y SO_3 se deduce que $\triangle SNO_1 = \triangle SNO_2 = \triangle SNO_3$. Por eso $NO_1 = NO_2 = NO_3$, es decir, el punto N es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $O_1O_2O_3$.

Así, pues, la altura de la pirámide pasa realmente por el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $O_1O_2O_3$. No obstante, todavía no está demostrado que dicha altura es perpendicular al plano π.

[1] Subrayemos que este concepto es la propiedad de triángulos iguales; tiene lugar independientemente de la esfera de que se trata en el problema. Algunos estudiantes tratan de obtener estas igualdades utilizando la propiedad de las tangentes a la esfera; sin embargo, las rectas SE, SD y SF "atraviesan" la esfera y por eso no sirven de tangentes para la esfera en cuestión.

De la semejanza de los triángulos isósceles ESD y O_2SO_1 (en éstos los lados que componen el ángulo común del vértice son proporcionales) se deduce que $O_1O_2 \parallel ED$ (véase el problema 7). De modo análogo se prueba que $O_1O_3 \parallel DF$. Por lo tanto, el plano π es paralelo al plano de la base de la pirámide y por eso la altura SK es perpendicular al plano π. Con esto se cumple la demostración de que el centro de la esfera se encuentra en la altura de la pirámide.

Pasemos a los cálculos. Con el fin de determinar el volumen de la pirámide hallaremos el lado de su base. Analicemos la cara BSC. Como los triángulos rectángulos SDB y BMC tienen el ángulo agudo B común, en este caso $\angle DSB = \angle MCB$ y por eso los triángulos rectángulos SDB y O_1DC son semejantes. De su semejanza concluimos que

$$O_1D = \frac{x^2}{4SD}, \tag{3}$$

donde x es la longitud de la arista de la base de la pirámide.

Estudiemos ahora el plano ADS trazando un dibujo aparte (fig. 123). Supongamos que el punto O situado en la altura SK del triángulo ADS es el centro de la esfera, o sea, el centro de la circunferencia que pasa por los puntos S y O_1; entonces $OS = OO_1 = r$. Al trazar la altura OL del triángulo isósceles SOO_1 y señalar que $\triangle SLO \sim \triangle SKD$, hallamos

$$SL = \frac{rh}{SD}. \tag{4}$$

Pero $SD = 2SL + O_1D$, es decir, tomando en consideración (4) y (3),

$$SD^2 = 2rh + \frac{x^2}{4}.$$

Por otra parte, del triángulo rectangular SKD tenemos, que $SD^2 = h^2 + KD^2$, donde $KD = 1/3\,AD$ (ya que K es el centro del triángulo regular ABC, véase fig. 122). Las dos igualdades obtenidas para SD^2 nos dan la ecuación para determinar x, después de lo cual hallamos el volumen $V = 1/2\sqrt{3}h^2(h-2r)$.

En conclusión vale señalar que en el proceso de la resolución hemos demostrado no todos los conceptos geométricos que se utilizaban. Consideramos algunos de ellos tan evidentes que ni los enunciábamos con claridad. Por ejemplo, afirmábamos sin comentar que la altura SK (fig. 122) *interseca* el plano π del triángulo $O_1O_2O_3$ y no es paralela a éste. Efectuando los cálculos en el mismo problema nos referíamos a la fig. 123 en la cual el punto O se encuentra en la altura SK *por encima* del punto K, etc.

Sin lugar a dudas, es lógicamente necesario demostrar tales afirmaciones. Pero en realidad no hay ninguna posibilidad, puramente física, de argumentar absolutamente todas las afirmaciones. Además, muchas afirmaciones geométricas no pueden ser demostradas estrictamente sin construir con anterioridad un sistema completo de axiomas de Geometría (esto no se practica en la secundaria).

Por esta causa el estudiante tiene que destacar en cada problema las afirmaciones fundamentales, más importantes, y demostrarlas correctamente.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que las rectas que unen sucesivamente los centros de los cuadrados construidos en los lados del paralelogramo y aplicados a éste por el exterior, forman un cuadrado.

2. Demostrar que cuando son iguales entre sí todos los ángulos diedros de una pirámide de base triangular, todas las aristas son también iguales entre sí.

3. Demostrar que si son perpendiculares en pares las aristas opuestas de una pirámide de base triangular, todas sus alturas se intersecan en un mismo punto.

4. Dentro del triángulo ABC se toma un punto arbitrario O. Por este punto se han trazado rectas paralelas a los lados del triángulo: $EK \parallel BC$, $PM \parallel AC$ y $TX \parallel AB$. Los puntos E y P se sitúan en el lado AB, los puntos K y T en el lado AC y los puntos M y X, en el lado BC. Demostrar que

$$\frac{AP}{AB}+\frac{BX}{BC}+\frac{CK}{CA}=1.$$

5. Los lados a, b y c del triángulo ABC se encuentran, respectivamente, frente a los ángulos A, B y C. Demostrar que la bisectriz del ángulo A $\beta_a=\dfrac{2bc\cos(A/2)}{b+c}$. Demostrar con la ayuda de esta fórmula que el triángulo con dos bisectrices iguales es isósceles.

6. En los lados de un triángulo isósceles, en su parte exterior, se han construido cuadrados. Demostrar que la distancia entre los centros de estos cuadrados, construidos en los lados laterales, es igual a la distancia entre el centro del cuadrado, construido en la base, y el vértice opuesto del triángulo.

7. Demostrar que el triángulo ABC es rectángulo si la mediana y la altura trazadas desde el vértice B dividen el ángulo B en tres partes iguales.

8. Se sabe que los vértices de la base inferior de un prisma triangular recto se encuentran en la superficie de una esfera y que los lados de la base superior son tangentes a ésta. Demostrar que el prisma es regular.

9. En el triángulo ABC se han trazado las medianas BD y CE; que se intersecan en el punto G. Demostrar que el triángulo BCG y el cuadrilátero $ADGF$ son equidimensionales.

10. Dos círculos son concéntricos y la circunferencia del menor divide el mayor en dos partes equidimensionales. Demostrar que la parte del anillo, comprendida entre las tangentes (que son paralelas) a la circunferencia de radio menor, es equidimensional al cuadrado inscrito en el círculo menor.

11. En un trapecio isósceles se ha inscrito un círculo. Demostrar que la relación entre el área del círculo y el área del trapecio es igual a la relación entre la longitud de la circunferencia del círculo y el perímetro del trapecio.

12. Una esfera está inscrita en un cono truncado. Demostrar que el área de la superficie de la esfera es menor que el área de la superficie lateral del cono.

13. En un triángulo isósceles el ángulo de vértice es igual a $10°$. Demostrar que el lado lateral a y la base b de este triángulo se relacionan como $1/2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,a^3+b^3=$ $=3ba^2$.

14. Demostrar que el radio de la circunferencia trazada por los puntos medios de los lados del triángulo ABC es dos veces menor que el radio de la circunferencia circunscrita a este triángulo.

15. Una pirámide truncada de base cuadrangular está circunscrita a una esfera. Demostrar que los volúmenes de la esfera y de la pirámide están en la misma relación que sus superficies totales.

16. En el paralelogramo $ABCD$, en los lados AB, BC, CD y DA se han tomado los puntos E, F, G, H respectivamente, teniendo en cuenta que $AE : EB = CF : FB = CG : GD = AH : HD = 1 : 2$. Demostrar que el cuadrilátero $EFGH$ es un paralelogramo y hallar la relación entre su área y el área del paralelogramo $ABCD$.

17. Demostrar que en el triángulo equilátero la suma de las distancias entre cualquier punto y los tres lados es constante.

18. Demostrar que en el triángulo isósceles la suma de las distancia entre cualquier punto de la base y los lados laterales es constante.

19. En el triángulo ABC se dan los ángulos $A = \pi/7$, $B = 2\pi/7$, $C = 4\pi/7$. Demostrar que las longitudes a, b y c de los lados BC, CA y AB se relacionan como $a^{-1} = b^{-1} + c^{-1}$.

20. Se da un tetraedro $ABCD$. Demostrar que sus aristas AD y BC son recíprocamente perpendiculares en el caso y sólo en el caso en que se cumpla la igualdad

$$AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2.$$

21. En el plano P se da el triángulo equilátero ABC con el lado a. En las perpendiculares, en los puntos B y C al plano P, por un lado de este plano, se toman los segmentos $BD = a/\sqrt{2}$ y $CE = a/\sqrt{2}$. Demostrar que el triángulo DAE es rectángulo. Calcular su área y hallar el coseno del ángulo diedro que forma el plano DAE con el plano P.

22. AB y CD son dos diámetros recíprocamente perpendiculares de la circunferencia S_1. La circunferencia S_2 tiene el centro D y el radio DA. Desde el punto D se han trazado dos rayos que intersecan la circunferencia S_1 en los puntos P y Q, y el arco $\widetilde{AB}$ de la circunferencia S_2 dispuesto dentro de la circunferencia S_1, en los puntos M y N. Sean P_1 y Q_1 las proyecciones de los puntos P y Q sobre el diámetro AB. Demostrar que la figura limitada por los arcos $\widetilde{PQ}$ y $\widetilde{MN}$ y por los segmentos MP y NQ es equidimensional al triángulo DP_1Q_1.

23. Demostrar que en el triángulo ABC, cuyos lados $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm y $AC = \sqrt{5}$ cm, las medianas AK y CL son recíprocamente perpendiculares.

24. Demostrar que la proyección del tetraedro regular sobre el plano tendrá el área máxima cuando dicho plano es paralelo a dos aristas que se cruzan del tetraedro.

25. Demostrar que la suma de cuadrados de las longitudes de proyecciones de las aristas de un cubo de una unidad sobre el plano no depende de la posición recíproca del cubo y del plano y es igual a 8.

26. El ángulo diedro entre los planos P y Q es igual a α. En el plano P se encuentra un cuadrado de lado 1. Demostrar que el perímetro de la proyección del cuadrado sobre el plano Q es máximo cuando la diagonal del cuadrado es paralela al plano Q.

27. El ángulo diedro entre los dos planos P y Q es igual a α. En el plano P se sitúa un triángulo regular de lado 1. Demostrar que la suma de cuadrados de las longitudes de proyecciones de los lados de dicho triángulo sobre el plano Q no depende de su disposición en el plano P.

28. Demostrar que en caso de formar las longitudes de los lados del triángulo una progresión aritmética, el centro de la circunferencia inscrita en este triángulo y el punto de intersección de sus medianas se hallan en una recta paralela al lado medio del triángulo según la longitud.

29. Una esfera es tangente a todas las caras laterales de la pirámide de base triangular en los centros de las circunferencias circunscritas a las mismas. Cada uno de los tres ángulos planos del vertice de la pirámide es igual a α. La suma de las longitudes de las aristas laterales es igual a $3b$. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar el radio de la esfera.

30. La altura de la pirámide de base triangular es igual a h, la suma de los nueve ángulos planos de los vértices de la base es igual a α. Se conoce que existe una esfera que es tangente a todas las caras laterales en los puntos de intersección de sus medianas. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar el radio de la esfera.

31. La esfera es tangente a todas las caras laterales de la pirámide de base triangular $SABC$ en los puntos de intersección de sus bisectrices. Del vértice S se han trazado las bisectrices SD y SE de las caras laterales SAB y SAC. El ángulo DSE es igual a α y el volumen de la pirámide es igual a V. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar el perímetro de la base.

32. Si se sabe que los lados del triángulo ABC satisfacen la relación $AC \cdot AB = BC^2 - AC^2$, demostrar que el ángulo A es dos veces mayor que el ángulo B.

§ 6. IMAGINACIÓN GEOMÉTRICA

Los problemas geométricos que requieren no sólo determinada fórmula o la argumentación de cierto concepto, sino imaginar bien las figuras geométricas necesarias, provocan en los estudiantes no pocas inquietudes.

La imaginación geométrica clara se desarrolla gradualmente, como resultado del entrenamiento continuo. Es necesario imaginarse bien "desde distintos puntos de vista" los cuerpos y las figuras que se plantean en el problema, tratarse de cumplir correctamente el dibujo.

Precisamente, la imaginación pobre de la figura en el espacio, la incomprensión de la disposición mutua real de los cuerpos que se muestran en el dibujo, fueron la causa de que muchos estudiantes daban soluciones erróneas de distinto carácter en el problema siguiente.

1. *Un rombo con el ángulo agudo φ sirve de base inferior $ABCD$ del prisma recto $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (donde A_1A, B_1B, C_1C, D_1D son las aristas laterales). Se sabe que en el prisma puede inscribirse una esfera de diá-*

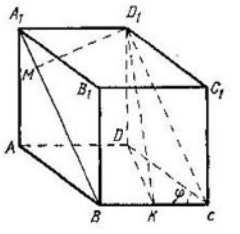


Fig. 124

metro d, tangente por el interior a todas sus caras. Hallar el área de la sección del prisma por el plano que pasa por las aristas BC y A_1D_1.

Determinemos el área S del cuadrilátero A_1D_1CB (fig. 124). Puesto que en el prisma recto puede inscribirse una esfera (no se muestra en la figura), en el rombo $ABCD$ puede inscribirse una circunferencia. En efecto, el centro de la esfera equidista de todas las caras laterales del prisma recto y por eso la proyección ortogonal del centro sobre el plano $ABCD$ equidista de todos los lados del rombo. De esta manera, la altura DK del rombo es igual al diámetro de la esfera, es decir, el lado del rombo $DC = d/\operatorname{sen}\varphi$. Es fácil comprender que la altura del prisma es igual al diámetro de la esfera inscrita en el prisma, es decir, $DD_1 = d$.

Algunos estudiantes, valiéndose del dibujo, consideraron que A_1D_1CB es un rectángulo y por eso buscaron el área de la sección por medio de la fórmula $S = BC \cdot D_1C$. Pero, en realidad $S = BC \cdot D_1K$ donde D_1K es la altura del *paralelogramo* A_1D_1CB, o sea, $D_1K \perp BC$. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, del triángulo D_1DK hallamos que $D_1K = d\sqrt{2}$ y, por consiguiente, $S = d^2\sqrt{2}/\operatorname{sen}\varphi$.

Otra solución incorrecta consistía en lo siguiente. Del punto D_1 al lado A_1B del paralelogramo A_1D_1CB se baja la altura D_1M de este paralelogramo. El lado A_1B se halla por medio del triángulo A_1AB según el teorema de Pitágoras: $A_1B = d\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\varphi}/\operatorname{sen}\varphi$. Luego, como la esfera es tangente a las caras AA_1B_1B y DD_1C_1C, se llega a la conclusión de que $D_1M = d$ y por eso $S = A_1B \cdot d$. Sin embargo, aquí también falló la imaginación espacial: en realidad $D_1M \neq d$[1]; es decir, la altura D_1M de la sección que se analiza no es igual a la distancia entre los planos paralelos AA_1B_1B y DD_1C_1C, esto es, D_1M no es simplemente perpendicular al *plano* AA_1B_1B. Señalemos también que A_1B y D_1C no son rectas tangentes a la esfera inscrita en el prisma.

Claro está, los errores en las resoluciones incorrectas mencionadas tuvieron lugar por la incomprensión del dibujo, por la insuficiente imaginación geométrica. Sin embargo, estos errores se habrían evitado si los estudiantes no hubieran utilizado simplemente el hecho "evidente" del dibujo (y en realidad, erróneo), sino hubieran tratado de argumentarlo estrictamente. En este caso se habrían convencido de que este concepto no tiene lugar.

Se debe comprender bien que la imaginación espacial perfecta es inseparable de la demostración lógica completa de todos los conceptos geométricos, sobre los cuales nos apoyamos en el proceso de la resolución. Por clara que "veamos" la configuración espacial, por preciso y nítido que esté hecho el dibujo, es necesario demostrar estrictamente todas las afirmaciones, incluso las que parecen "evidentes" del dibujo.

Hablando metafóricamente, la imaginación geométrica nos sugiere el camino de la solución, permite hacer "un borrador" de la resolución en que seguimos solo a nuestra intuición, tratando de comprobar si llegamos o no al resultado deseado. Pero luego es necesario crear la resolución "en limpio" en la cual las consideraciones y conjeturas intuitivas y no estrictas se sustituyen por demostraciones exhaustivas.

Ilustremos otros dos problemas en que la imaginación geométrica es muy importante: sin "fantasía geométrica" es difícil trazar el camino

---

[1] Utilizando la expresión hallada para S y la fórmula $S = A_1B \cdot D_1M$, es fácil calcular a qué es igual la altura D_1M.

de la resolución. Señalemos, a propósito, que incluso con un buen dibujo no es siempre fácil encontrar el concepto sobre la base del cual se logra realizar la resolución.

2. *Se da una pirámide de base cuadrangular $SABCD$ con el vértice S. Por los puntos A y B y el punto medio de la arista SC se ha trazado un plano. ¿En qué relación el plano divide al volumen de la pirámide?*

Primera solución. Señalemos ante todo que la recta AB es paralela al plano de la cara lateral DSC (fig. 125), ya que la arista AB es paralela a DC. Por esta razón el plano secante que pasa por la arista AB y el punto F (el punto medio de la arista SC) se interseca con el plano de la arista DSC a lo largo de la recta EF que es paralela a AB y, por consiguiente, a DC. De aquí se deduce que EF es la línea media del triángulo DSC.

Necesitamos comparar los volúmenes de los dos cuerpos, disponiéndolos uno debajo del plano secante y otro por encima de éste; el cuerpo dispuesto debajo del plano secante es de forma irregular. Con el fin de cumplirlo, realicemos primero una construcción complementaria para obtener un cuerpo más "natural": en la prolongación del segmento EF, tras el punto F, tracemos el segmento $FK = EF$ y luego unamos el punto K con los vértices B y C de la base de la pirámide.

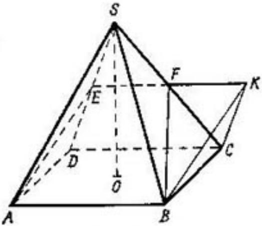


Fig. 125

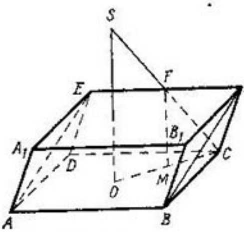


Fig. 126

Analicemos el cuadrilátero $DCKE$. Este es un paralelogramo ya que los lados opuestos DC y KE son iguales y paralelos, y por lo tanto, los lados opuestos DE y CK son también iguales y paralelos. De modo análogo se demuestra que el cuadrilátero $ABKE$ es un paralelogramo y por esta razón sus lados opuestos AE y BK son iguales y paralelos. Puesto que en la base de la pirámide regular $SABCD$ se halla un cuadrado, los lados DA y CB del cuadrado $ABCD$ son también iguales y paralelos.

De lo dicho se deduce que los lados correspondientes de los triángulos ADE y BCK son iguales y paralelos, lo que significa que los triángulos ADE y BCK son iguales y sus planos son paralelos. Además, como $DC = EK = AB$ y las rectas DC, EK y AB son paralelas, el cuerpo $CBKDAE$ es un prisma triangular (oblicuo) con las bases CBK y DAE.

Este prisma puede considerarse también como la mitad del paralelepípedo $ABCDA_1B_1KE$ en el cual sirve de base el cuadrado $ABCD$, mientras que una de sus caras laterales es el paralelogramo $DCKE$ (fig. 126). Por lo tanto, el volumen del prisma $CBKDAE$ es igual a la mitad del volumen de este paralelepípedo, es decir, igual a la mitad del producto del área del cuadrado $ABCD$ por la altura del paralelepípedo, o sea, por ejemplo, por la longitud de la perpendicular FM bajada desde el punto F al plano $ABCD$.

Si SO es la altura de la pirámide $SABCD$, en este caso, de la semejanza de los triángulos OSC y MFC se desprende que la altura FM de nuestro paralelepípedo equivale a la mitad de la altura de la pirámide.

Sean V el volumen de la pirámide, V_1 el del prisma $CBKDAE$, Q el área del cuadrado $ABCD$ y H la altura de la pirámide; en tal caso $V = 1/3\,QH$, $V_1 = 1/4\,QH$. De este modo, $V_1 = 3/4\,V$, es decir, el volumen del prisma $CBKDAE$ constituye 3/4 del volumen de la pirámide $SABCD$.

Sin embargo, no nos interesa el volumen del prisma $CBKDAE$, sino él del poliedro $CFBDEA$ (fig. 125), que es igual a la diferencia de los volúmenes del prisma $CBKDAE$ y la pirámide $BCKF$. Hallemos por eso el volúmen V_2 de la pirámide $BCKF$.

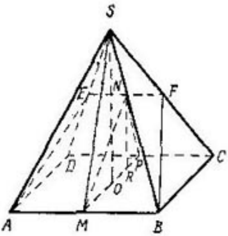


Fig. 127

Supongamos que Q_1 es el área del triángulo CKF y h es la longitud de la altura bajada desde el vértice B al plano del triángulo CKF. Por eso, el volumen V_2 de la pirámide $BCKF$ es igual a $1/3\,Q_1h$. Pero el prisma $CBKDAE$ puede considerarse como la mitad del paralelepípedo $DCKEABB_1A_1$ cuya base es el paralelográmo $DCKE$, mientras que el cuadrado $ABCD$ es una de las caras laterales (fig. 126). Entonces la altura de este paralelepípedo es igual a h y el área de la base $DCKE$ es el área cuadriplicada del triángulo CKF. Así, el volumen del prisma $CBKDAE$ puede escribirse también en la forma siguiente: $V_1 = 2Q_1h$. De aquí, tomando en consideración la expresión para V_2, obtenemos que $V_2 = 1/6\, V_1$ y por esta razón el volumen del poliedro *SFBDEA* es $V_3 = V_1 - V_2 = 5/6\, V_1$. Pero, como $V_1 = 3/4\, V$, hallamos definitivamente que $V_3 = 5/8\, V$.

Por consiguiente, el volumen del poliedro *CFBDEA* constituye 5/8 del volumen de la pirámide *SABCD*, es decir, el plano secante divide el volumen de esta pirámide en la relación de 3 : 5.

Segunda solución. Primero, al igual que en la solución anterior, demostremos que el plano secante se interseca con la cara lateral *DSC* a lo largo de la línea media *EF*. Luego, pasemos al análisis de los volúmenes formados por el corte de los dos cuerpos. Pero ahora concentremos nuestra atención en la pirámide de base cuadrangular *SABFE*, cuya base es la sección o el trapecio *ABFE* (fig. 127).

Designemos por a el lado del cuadrado *ABCD* y por h la altura *SO* de la pirámide *SABCD*. Es evidente, que el volumen de la pirámide *SABCD* será: $V = 1/3\, a^2h$.

El volumen de la pirámide *SABFE* es igual a la tercera parte del producto del área del trapecio *ABFE* por la longitud de la perpendicular bajada desde el punto *S* al plano secante.

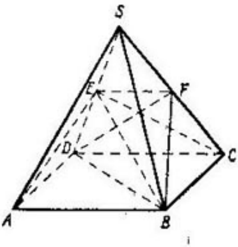


Fig. 128

Empecemos por el cálculo del área del trapecio *ABFE*. Sus bases son iguales a a y $a/2$; nos queda demostrar su altura. Tracemos por la altura *SO* el plano *MSP* que sea perpendicular a la arista *AB*. La recta *MN* es la línea de intersección de dicho plano con el plano de la sección y es precisamente la altura del trapecio *ABFE*, puesto que une los puntos medios de las bases del trapecio isósceles. Bajando una perpendicular desde el punto *N* al plano *ABCD* y analizando los triángulos semejantes *SOP* y *NRP*, hallamos fácilmente que $NR = h/2$. Después, tomando en consideración el triángulo *NRM* determinamos que $MN = 1/4\sqrt{4h^2 + 9a^2}$ y por lo tanto, el área del trapecio *ABFE* constituye $3/16\, a\sqrt{4h^2 + 9a^2}$.

Por ser el plano *MSN* perpendicular al plano *ABFE* (ya que el plano *ABFE* contiene la recta *AB* que es perpendicular al plano *MSN*), la perpendicular bajada desde el vértice *S* al plano *ABFE* se encuentra en el plano MSN y con el segmento MN forma un ángulo recto. Es decir, la altura de la pirámide $SABFE$ coincide con la altura del triángulo MSN bajada desde el vértice S. Pero es fácil hallar la altura de este triángulo comparando las dos expresiones siguientes para su área: una, por medio de los tres lados según la fórmula de Herón (señalemos que se determinan con facilidad todos los tres lados del triángulo MSN) y otra, por medio del producto de la mitad del lado MN por la altura correspondiente.

Ahora demostramos fácilmente que la altura del triángulo MSN bajada desde el vértice S, es decir, la altura de la pirámide $SABFE$, equivale a $2ah/\sqrt{4h^2+9a^2}$.

Mas, en este caso el volumen de la pirámide $SABFE$ es igual a $1/8\ a^2h$, es decir, constituye 3/8 del volumen de la pirámide $SABCD$.

Tercera solución. Después de demostrar que el plano secante pasa por la línea media EF del triángulo DSC, analicemos el cuerpo dispuesto bajo el plano secante. En contraste con la primera solución, tratemos de calcular el volumen de dicho cuerpo como una suma de volúmenes de las pirámides construidas especialmente.

Al trazar un plano por los puntos B, E, C (fig. 128), dividimos el poliedro $CFBDEA$ que nos interesa en dos pirámides: la de base cuadrangular $EABCD$ con el vértice E y la base $ABCD$, y la $FBCE$, de base triangular, con el vertice F y la base BCE.

Puesto que la altura de la pirámide $EABCD$ es dos veces menor que la de la pirámide $SABCD$, el volumen de la pirámide $EABCD$ es igual a la mitad del volumen de la pirámide $SABCD$.

El volumen de la pirámide $FBCE$ se calcula fácilmente si se toma por su vértice el punto E y por la base el triángulo BCE: resulta que el volumen de la pirámide en cuestión equivale a la mitad del volumen de la pirámide de base triangular $DBCF$ (para la demostración es suficiente bajar perpendiculares desde los puntos D y E al plano BSC y, analizando los triángulos semejantes correspondientes, convencerse de que la altura de la pirámide $DBCF$ es dos veces más larga que la altura de la pirámide $EBCF$). Ahora, en la pirámide $DBCF$, tomemos el punto F por su vértice y el triángulo DBC por su base. Al confrontar las pirámides $FDBC$ y $SABCD$ vemos que el volumen de la primera es 4 veces menor que el de la segunda.

Por consiguiente, el volumen de la pirámide $FBCE$ es igual a 1/8 del volumen de la pirámide $SABCD$ y por lo tanto, el volumen del poliedro $CFBDEA$ constituye 5/8 del volumen de la pirámide en cuestión.

3. *Se da la pirámide regular $SABC$ de base triangular (S es el* vértice) *con el lado a de la base y la arista lateral b. La primera esfera con el centro en el punto O_1 es tangente a los planos SAB y SAC en los puntos B y C, mientras que la segudna esfera, con el centro en el punto O_2 es tangente a los planos SAC y SBC en los puntos A y B. Hallar el volumen de la pirámide SBO_1O_2.*

Con el fin de hallar el volumen de cualquier pirámide de base triangular es necesario decidir, ante todo, qué cara se toma por la base de la pirámide, para que el cálculo del área de la base y de la altura de la pirámide, bajada al plano de esta base, se haga lo más simple posible.

Los estudiantes que poseen imaginación geométrica no tardan en notar que la arista SB (fig. 129) es perpendicular al plano O_1BO_2 y que $O_1O_2 = AC$. De este modo, "la observación" geométrica les sugirió un método sencillo para resolver el problema: la demostración de los conceptos recién mencionados y el cálculo de los radios O_1B y O_2B.

Ilustremos esta resolución. Puesto que BO_1 es perpendicular al plano ABS, es también $BO_1 \perp SB$; gracias a que BO_2 es perpendicular al plano BCS, será $BO_2 \perp SB$, de modo que (véase § 4, Parte III) SB es perpendicular al plano O_1BO_2, es decir, SB es la altura de nuestra pirámide.

A fin de calcular el área del triángulo O_1BO_2 deben hallarse los radios O_1B y O_2B. Primero hallaremos el radio O_1B. Con este propósito tracemos un plano por los tres puntos B, C y O_1; éste cortará la arista AS en el punto D. Por ser BO_1 perpendicular al plano ABS, entonces, en particular, $BO_1 \perp AS$; de modo análogo $CO_1 \perp AS$; esto significa

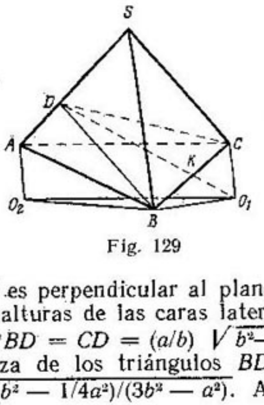


Fig. 129

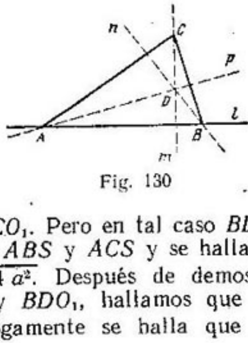


Fig. 130

que AS es perpendicular al plano BCO_1. Pero en tal caso BD y CD son las alturas de las caras laterales ABS y ACS y se hallan fácilmente: $BD = CD = (a/b)\sqrt{b^2 - 1/4\,a^2}$. Después de demostrar la semejanza de los triángulos BDK y BDO_1, hallamos que $BO_1 = a\sqrt{(b^2 - 1/4a^2)/(3b^2 - a^2)}$. Análogamente se halla que $BO_2 = BO_1$.

Queda encontrar O_1O_2, es decir, demostrar que $O_1O_2 = AC$. Al señalar que AO_2 es perpendicular al plano ACS y que CO_1 es perpendicular al mismo plano ACS, obtenemos que $AO_2 \parallel CO_1$; esto significa que los puntos A, C, O_1 y O_2 están en un mismo plano. El cuadrilátero ACO_1O_2 es plano y $AO_2 \parallel CO_1$. $AO_2 = CO_1$; así que ACO_1O_2 es un paralelogramo y por lo tanto $O_1O_2 = AC = a$. Ahora hallamos el área del triángulo BO_1O_2 por medio de sus tres lados y luego el volumen buscado $V = a^2b^2/(12\sqrt{3b^2 - a^2})$.

Sin embargo, no se debe creer, que la imaginación geométrica es necesaria solamente para la estereometría. En el problema planimétrico que sigue, lo principal es imaginarse correctamente el dibujo, examinar y explicar todos los casos posibles.

4. *En el plano se dan cuatro puntos A, B, C y D, siendo $AB \perp CD$ y $AC \perp BD$. Demostrar que $AD \perp BC$.*

En efecto, la posición de los puntos A y B en el plano puede ser cualquiera (fig. 130). Supongamos a continuación que el punto C está dispuesto de tal manera que la base de la perpendicular bajada desde éste a la recta l, en la que se encuentra el segmento AB, se sitúa *dentro* de este segmento.

Está claro que el punto D ha de encontrarse en la recta m, que es perpendicular a AB y pasa por el punto C. Puesto que según los datos $AC \perp BD$ el punto D ha de encontrarse en la recta n que pasa por el punto B perpendicularmente a AC. Como AC y AB se intersecan, así lo hacen también las rectas m y n que son perpendiculares a las mismas; el punto de intersección es precisamente el punto D. Examinemos ahora el triángulo ABC; supongamos que el punto D está dispuesto en su *interior* y tracemos la recta p por los puntos A y D. Es evidente que m y n son las alturas de este triángulo, por esta razón la recta p es también la altura. En efecto, si desde el vértice A bajamos la altura a BC, ésta (según el teorema sobre la propiedad de las alturas del triángulo) debe pasar también por el punto D y por eso coincidirá con la recta p (tienen dos puntos comunes). De aquí se deduce que $AD \perp BC$.

Los casos en que el punto D se sitúa *fuera* del triángulo ABC o que la recta m interseca a la recta l *fuera* del segmento AB, se examinan de manera análoga; el punto C no puede encontrarse en la propia recta l. El lector puede demostrarlo. Señalemos que sin un análisis exhaustivo de todos los casos posibles la solución, naturalmente, no puede ser reconocida como satisfactoria.

La importancia de la imaginación geométrica se ilustra bien por medio de los problemas de sombra geométrica, en los cuales la imaginación permite dar la idea del resultado esperado, encontrar "sondeando" la solución y después argumentarla estrictamente.

5. *En una superficie plana se han colocado un cono circular recto y un soporte (segmento) vertical. El radio de la base del cono es igual a* 1 m *y la altura del cono,* 2 m. *La base del soporte dista* 2 m *del centro de la base del cono; la altura del soporte es de* 4 m. *En el extremo superior del soporte se sitúa una fuente puntiforme de luz. Hallar el área de la sombra producida por el cono sobre la superficie plana (el área de la base del cono no se toma en consideración).*

Con el fin de construir la sombra del cono es necesario unir el punto I, en que se encuentra la fuente de luz (fig. 131), con todos los puntos del cono, y los puntos de intersección de estos rayos con el plano P, en que está el cono, justamente compondrán la sombra producida por el cono. Pero para construir la sombra no hay necesidad de trazar todos estos rayos; es suficiente trazar sólo aquellos que determinan la forma de la sombra, es decir, los que crean los límites de la sombra. Por esto, en este problema lo principal es determinar qué rayos crean los límites.

No es difícil darse idea de que los puntos límites de la sombra se producen por los rayos que tienen un solo punto común con el cono: si el rayo interseca la superficie del cono en dos puntos, su punto de intersección con el cono se encontrará dentro de la sombra, pero si el rayo no interseca el cono, entonces este punto de intersección con el plano no pertenece a la sombra. Pero ¿de qué modo pueden hallarse los rayos que tienen un punto común con el cono?

Con este fin "miremos" el cono desde el punto I. Ante todo, veremos la sombra C del punto S, luego nuestra mirada va a deslizarse hacia

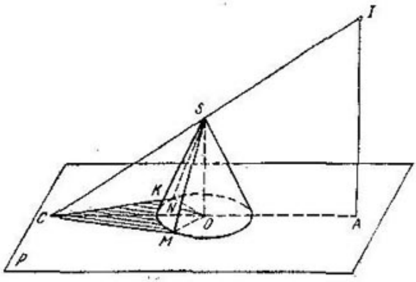


Fig. 131

abajo, vamos a suponer que por el lado izquierdo del cono, mientras que los puntos correspondientes en el plano se moverán, evidentemente, por cierta recta CM. No es difícil entender que la recta CM pasará por la base del cono, de lo contrario esto significaría que nuestra mirada se apartó del cono y no intersecará la base, ya que esto significaría que miramos a través del cono. Por consiguiente, CM es la tangente a la circunferencia de la base del cono. De este modo la sombra queda completamente determinada, es una figura curvilínea CKM, donde CK es la segunda tangente a la circunferencia de la base del cono.

Nos queda por ... demostrar esta afirmación de modo estricto. En la demostración son inadmisibles las expresiones del tipo "la mirada va a deslizarse": ya han desempeñado su papel dándonos la posibilidad de "ver" la sombra.

Para la demostración señalemos ante todo que en el caso que el segmento ON se ha trazado perpendicularmente a la generatriz SM, el plano que pasa por SM perpendicularmente a ON, no tiene puntos comunes con el cono salvo los que se encuentran en SM. (Esta afirmación es muy sencilla y puede demostrarse por el lector). Por lo tanto, ninguna recta de este plano puede tener más de un punto común con el cono.

Construimos ahora los vértices: sabiendo que $SO \parallel IA$, por estas rectas puede trazarse un plano vertical, y la sombra C del vértice S es el punto de intersección de las rectas IS y AO que se encuentran en este plano. Desde el punto C tracemos las tangentes CK y CM a la circunferencia de la base del cono. En este caso $CM \perp MO$, $CM \perp SO$ y, por consiguiente, la recta CM es perpendicular al plano SOM. Por eso $CM \perp ON$. Pero según la construcción, ON es perpendicular a SM y es, por lo tanto, perpendicular al plano CSM. Así, CSM es precisamente el plano de que se trataba al principio de la demostración. Pero en tal caso cualquier rayo que salga del punto I dispuesto en este plano, tiene exactamente un punto común con el cono (sí, por supuesto, no es paralelo a SM, pero no nos interesa tal rayo) y, por consiguiente, el límite de la sombra se determina por estos rayos, y es la línea de intersección del plano CSM con el plano P, es decir, coincide con la tangente CM. De esta manera la afirmación necesaria queda demostrada.

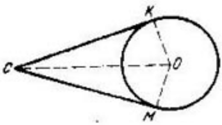


Fig. 132

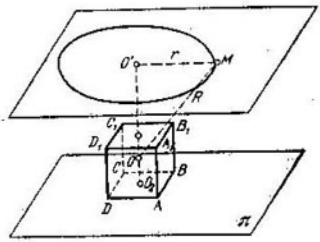


Fig. 133

Así, pues, nuestro problema se redujo al problema planimétrico: hallar el área de la figura CKM (fig. 132); tenemos que hallar además la distancia CO, pero ésta se determina fácilmente de acuerdo con la semejanza de los triángulos SCO e ICA. El problema ya no es difícil; el área buscada es igual a $(3\sqrt{3}-\pi)/3\text{m}^2$.

Cabe señalar que algunos estudiantes afirman que los puntos límites K y M de la sombra son los extremos del diámetro que es perpendicular a la recta AO. Los autores de esta resolución no se preocupan incluso del hecho de que las tangentes en los extremos del diámetro serían paralelas y, por consiguiente, no podrían pasar por el punto C.

6. *En el punto M, dispuesto a la distancia $2h$ del plano de la base del cubo de arista h y a la distancia R ($R > 3h$) del centro del cubo, se ha situado una fuente de luz. Demostrar que la sombra producida por el cubo sobre el plano de la base tiene el área máxima cuando el plano que pasa*

por el centro del cubo, el punto M, y por uno de los vértices, es perpendicular al plano de la base.

Sea tal el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 133) que las aristas AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 son perpendiculares al plano π de la base $ABCD$ y el punto O es el centro del cubo. En este caso es fácil imaginarse que todos los puntos M que satisfagan los datos del problema se encuentran a lo largo de la circunferencia dispuesta en un plano paralelo al plano π que dista de éste a $2h$. El centro de la circunferencia se halla en la perpendicular OO' al plano π; el radio r de la circunferencia puede calcularse fácilmente:

$$r=\sqrt{R^2-\left(\frac{3}{2}h\right)^2}>\frac{3\sqrt{3}}{2}h. \qquad (1)$$

Está claro que, al igual que en el problema anterior, si desde el punto M trazamos rectas para unirlo con todos los puntos del cubo, los puntos de intersección de estas rectas con el plano π son los que nos dan la sombra producida por el cubo. Aquí, para hacer más cómodos los cálculos, en la sombra incluimos también el cuadrado $ABCD$ dispuesto en la base.

Es obvio que para la construcción práctica de la sombra es suficiente trazar las rectas que unen el punto M con los vértices del cubo; hallando los puntos de su intersección con el plano π y uniendo estos puntos con rectas, obtendremos los contornos de la sombra.

Al proyectar la circunferencia en que se sitúa el punto M, y el cubo sobre el plano π, obtendremos (fig. 134) una circunferencia del radio r dentro de la cual se encuentra el cuadrado $ABCD$ con el lado h.

Tomemos un punto arbitrario K en el plano π y un punto K_1 en la perpendicular al plano π trazada desde el punto K a la distancia h por encima del plano π. Con esto es fácil demostrar que siendo K_2 el punto de intersección de la recta MK_1 con el plano π, será $M_1K_2=$ $=2KM_1$ (fig. 135). Después de unir con rectas los puntos A_1, B_1, C_1, D_1 con el punto M y designar por A_2, B_2, C_2, D_2 los puntos de intersección de estas rectas con el plano π, obtendremos las igualdades $A_2M_1=$ $=2AM_1$, $B_2M_1=2BM_1$, $C_2M_1=2CM_1$, $D_2M=2DM_1$.

De los razonamientos anteriores es evidente el modo de cómo debe construirse la sombra, y ahora podemos pasar del problema espacial a la planimétrica. Es más (fig. 134), a causa de la simetría resulta suficiente analizar las sombras sólo en el caso en que el punto M_1 se encuentra en el arco LN ($O_2N\perp AB$ y los puntos O_2, A, L se disponen en una misma recta).

Al examinar las sombras en diferentes posiciones del punto M_1 sobre el arco LN, nos convencemos de que el punto P del arco (P se sitúa en la recta DA) desempeña un papel particular. Por esta razón, en lo ulterior, tendremos que analizar dos casos: a) cuando el punto M_1 se halla en el arco PN, b) cuando el punto M_1 se halla en el arco PL.

a) Supongamos que el punto M_1 se sitúa en el arco PN (fig. 134).

Aclaremos, en qué posición del punto M_1 la sombra será máxima En caso de no coincidir M_1 con el punto P, servirá de sombra el hexágono $AA_2D_2C_2B_2B$ (fig. 136) en el cual, como se ve fácilmente, los lados $B_2C_2 = A_2D_2 = C_2D_2 = 2h$ y, además, $A_2D_2 \parallel AD$, $B_2C_2 \parallel BC$, $D_2C_2 \parallel DC$. Uniendo los puntos A_2 y B_2 obtendremos que la sombra en cuestión consta del cuadrado $A_2B_2C_2D_2$ con el lado $2h$, del trapecio AA_2B_2B con las bases h y $2h$ y la altura igual a la distancia entre el punto M_1 y la recta AB. Esta altura será máxima en el punto N, es decir, siendo la recta M_1O_2 perpendicular a la arista AB.

Esto significa que con el movimiento del punto M_1 por el arco NP desde N hasta P se reduce el área de la sombra y se hace mínima cuando el punto M_1 coincide con el punto P. En este caso ya servirá de sombra el pentágono $AD_2C_2B_2B$ (fig. 137), pero su área también puede ser calculada como área del cuadrado $A_2B_2C_2D_2$ con el lado $2h$ y del trapecio AA_2B_2B con las bases h y $2h$ y la altura igual a la distancia entre el punto P y la recta AB.

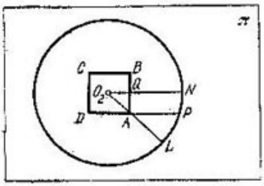


Fig. 134

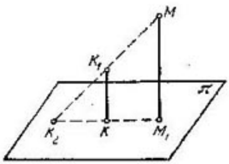


Fig. 135

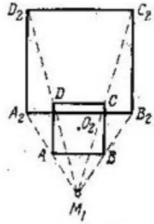


Fig. 136

b) Examinemos, de qué modo cambia el área de la sombra si el punto M_1 se mueve por el arco PL. En este caso la sombra es hexagonal, pero en forma del hexágono $ABB_2C_2D_2D$ (fig. 138). Conviene analizar esta sombra del modo siguiente: ella está compuesta por dos triángulos rectangulares (ABD con el cateto h y $B_2C_2D_2$ con el cateto $2h$) y el trapecio BB_2D_2D con las bases $h\sqrt{2}$ y $2h\sqrt{2}$ y la altura igual a la distancia entre el punto M_1 y la recta BD.

Está claro que las perpendiculares bajadas desde los puntos del arco PL a la recta BD son de distintas longitudes, y es fácil encontrar que la longitud será máxima cuando el punto M_1 coincida con el punto L.

Pues, bien, con el movimiento del punto M_1 por el arco PL desde P hasta el punto L crece la sombra y será máxima al coincidir M_1 con el punto L.

Así, pues, resultó en nuestro análisis que en el punto P el área de la sombra es mínima y en los puntos L (del arco LP) y N (del arco PN) las sombras son máximas para sus arcos. Con el fin de elegir la sombra mayor de todas las posibles es necesario comparar las áreas de estas dos sombras.

Calculemos primero el área de la sombra para el caso en que el punto M_1 coincide con el punto N. Aquí la sombra consta del cuadrado

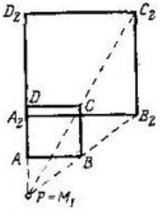


Fig. 137

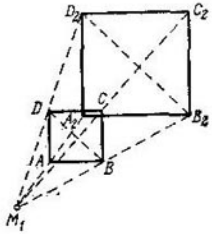


Fig. 138

$A_2B_2C_2D_2$ con el área $4h^2$ y del trapecio AA_2B_2B con el área igual a $3/2\,h\cdot NQ$. Puesto que $NQ=r-(h/2)$, el área de la sombra en este caso es igual a $(13h^2+6hr)/4$.

En el caso en que el punto M_1 coincide con el punto L, la sombra consta del triángulo ABD con el área $1/2\,h^2$, del triángulo $B_2C_2D_2$ con el área $2h^2$ y del trapecio BB_2D_2D con el área $1/2\,(BD+B_2D_2)\,LO_2$. Puesto que $LO_2=r$, $BD=h\sqrt{2}$ y $B_2D_2=2h\sqrt{2}$, el área de la sombra en este caso es igual a $1/2\,(5h^2+3\sqrt{2}hr)$.

La desigualdad

$$\frac{5}{2}h^2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\,hr>\frac{13}{4}h^2+\frac{3}{2}hr \qquad (2)$$

es válida, si es válida la desigualdad equivalente $r>(\sqrt{2}+1)\,h/2$. Esta última desigualdad se cumple gracias a (1), por eso se cumple también la desigualdad (2).

Esto significa que el área de la sombra es máxima al coincidir el punto M_1 con el punto L. Para completar la demostración, queda por señalar que el punto L, el centro del cubo O y el vértice A se sitúan en el plano que es perpendicular al plano de la base.

Así, pues, para resolver este problema hemos necesitado seis dibujos, y no uno, como suele tener lugar. Naturalmente, podríamos limitarnos a un menor número de dibujos, pero es mucho mejor tener un debujo para cada etapa de la resolución, ya que el dibujo principal puede "sobresaturarse" de las líneas necesarias y hacerse ilegible.

EJERCICIOS:

1. Se dan tres rectas que se cruzan en pares y no son paralelas a un plano. Demostrar que existe un paralelepípedo en que las diagonales de sus tres caras se cruzan y se sitúan en las rectas dadas.

2. Se sabe que en el paralelepípedo rectangular el cuadrado de la diagonal equivale a la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones. ¿Es válido el teorema inverso?

3. Como se sabe, en cualquier triángulo la base, de por lo menos de una altura, se encuentra en el propio lado y no en su prolongación. ¿Sería cierta la afirmación de que en cualquier pirámide de base triangular la base, de por lo menos de una altura, se encuentra en la propia cara y no en su prolongación?

4. ¿Se puede cortar cualquier ángulo tetraédrico por un plano de tal modo que en la sección se forme un paralelogramo?

5. ¿Es posible construir en una pirámide de base triangular un plano secante que corte cinco aristas de la pirámide?

6. Enumerar las figuras posibles que se forman como resultado del corte de un tetraedro regular por un plano.

7. ¿Es posible cortar cualquier pirámide regular de base triangular por un plano de modo que en la sección se obtenga: a) un paralelogramo? b) un rombo? c) un rectángulo?

8. Determinar la forma de la proyección de un tetraedro regular sobre un plano paralelo a sus dos aristas no contiguas.

9. Hallar la sombra del cubo sobre un plano perpendicular a su diagonal; el haz de rayos está dirigido paralelamente a la diagonal.

10. ¿Es posible practicar un orificio en un cubo de madera de tal modo que a través de éste pase otro cubo de madera, igual al primero?

11. Meter un cuadrado con el lado a dentro de un triángulo equilátero de dimensiones mínimas. Hallar el lado de este triángulo.

12. Colocar dentro de un cuadrado con el lado a un triángulo equilátero de dimensiones máximas posibles. Hallar el lado de este triángulo.

13. Colocar dentro de un hexágono regular con el lado a un cuadrado de dimensiones máximas posibles. Hallar el lado de este cuadrado.

14. Meter dentro de un cuadrado con el lado a un hexágono regular de dimensiones máximas posibles. Hallar el lado del hexágono.

15. ¿Es posible cortar un cubo por medio de un plano de tal manera que en la sección se obtenga: a) un cuadrado? b) un pentágono? c) un hexágono? d) un hexágono regular?

16. En un tetraedro regular cuya arista es igual a 1, está inscrita una semiesfera de tal modo que tres caras del tetraedro son tangentes a su superficie esférica y la cuarta cara le sirve del plano diametral. Determinar la superficie total de la semiesfera.

17. En una pirámide de base triangular, dos caras son triángulos isósceles rectángulos que son adyacentes uno a otro por medio de las hipotenusas y forman un ángulo diedro α. Determinar el ángulo diedro en esta pirámide, cuya arista es el cateto de un triángulo rectángulo.

18. El lado (la arista) de un tetraedro regular es a. Determinar el radio de la esfera que es tangente a las aristas laterales del tetraedro en los vértices de la base.

19. El radio de la esfera es igual a R. Desde el punto A separado del centro de la esfera a la distancia l se han trazado n tangentes a la esfera de tal manera que todos los ángulos planos del ángulo poliedro del vértice A son iguales entre sí. Determinar la distancia entre los puntos de tangencia de los dos rayos adyacentes y el ángulo entre estos rayos.

20. Se sabe que dos generatrices recíprocamente perpendiculares de un cono circular recto dividen la circunferencia de la base en dos arcos, uno de los cuales es dos veces más corto que el otro. Hallar el volumen del cono si su altura es igual a h.

21. La arista del cubo es igual a a. La esfera con el centro O interseca tres aristas que convergen en el vértice A, en sus puntos medios. Desde el punto B de la intersección de la esfera con una de las aristas del cubo se ha bajado una perpendicular a la diagonal del cubo que atraviesa el vértice A, dividiéndose en dos partes iguales el ángulo entre esta perpendicular y el radio OB por medio de la arista del cubo. Hallar el radio de la esfera.

22. El punto medio de la altura del cono recto con la generatriz l y el ángulo α del vértice se toma por el centro de la esfera que pasa por el vértice. Determinar el radio de la esfera obtenida como resultado de la intersección de las superficies del cono y de la esfera.

23. Las aristas de una pirámide de base triangular que salen del vértice O son perpendiculares en pares y sus longitudes son iguales a a, b, c. Hallar el volumen del cubo inscrito en esta pirámide de tal modo que uno de sus vértices coincide con el vértice O.

24. Una pirámide regular, cuya base es un cuadrado con el lado a, gira alrededor de una recta que pasa por el vértice de la pirámide en paralelo a uno de los lados de la base. Calcular el volumen del cuerpo de giro si el ángulo plano al vértice de la pirámide es igual a α.

25. Tres esferas son tangentes al plano del triángulo ABC en sus vértices y en pares una a otra. Hallar los radios de las esferas si se conocen la longitud c del lado AB y los ángulos A y B contiguos a éste.

26. Se da el triángulo isósceles ABC, $AB = AC = b$, y el ángulo $BAC = \alpha$. El triángulo gira alrededor del eje que pasa por el vértice A de tal manera que el ángulo entre el eje y el plano del triángulo es igual a β, mientras que la base del triángulo es perpendicular al eje. Calcular el volumen del cuerpo obtenido en el giro del triángulo ABC.

27. Dos conos iguales tienen un vértice común y son tangentes por la generatriz común. El ángulo de la sección axial del cono es igual a 2α. Hallar el ángulo diedro entre los dos planos, cada uno de los cuales es tangente a los dos conos, pero no pasa por su generatriz común.

28. Se da el ángulo α ($\alpha < \pi/2$) de la sección axial de un cono circular recto con el vértice S y generatriz de longitud l. Por el punto A de la base de un cono se ha trazado el plano P que es perpendicular a la generatriz SA. Por el vértice del cono se ha trazado el plano Q. Este plano es perpendicular al plano de la sección axial del cono que pasa por SA y forma junto con la generatriz SA del cono el ángulo β ($\beta < \alpha/2$). El plano Q corta el cono a lo largo de dos generatrices. Supongamos que las prolongaciones de las generatrices intersecan el plano P en dos puntos: C_1 y C_2. Hallar la longitud del segmento C_1C_2.

29. Una esfera es tangente a todas las aristas laterales de un prisma hexagonal recto y regular, cuyas bases se encuentran fuera de la esfera. Hallar la relación entre aquella parte del área de la superficie lateral del prisma, que está comprendida dentro de la esfera y la parte de la superficie de la esfera que se encuentra fuera del prisma.

§ 7. SECCIONES DE POLIEDROS

A los estudiantes se proponen con frecuencia problemas de Geometría, en los cuales se traza cierto plano de sección de un poliedro dado y se requiere calcular, por ejemplo, el área del corte o la relación en que el plano secante divide el volumen del poliedro.

Cada uno de estos problemas consta de dos partes: la construcción de la sección y el cálculo de lo que se requiere en el problema, representándose cada una cierta dificultad.

Es natural que sin resolver la primera parte del problema no se puede tratar de la resolución de la otra. Habitualmente, en los problemas para la sección, después de realizar las consideraciones geométricas relacionadas con la construcción de la sección, éstos se simplifican mucho. Así, "el centro de gravedad" de los problemas de sección no radica en las afirmaciones trigonométricas ni en la solución de los triángulos, sino en la Geometría en el sentido directo de la palabra.

Los exámenes muestran que los estudiantes suelen indicar correctamente la forma de la sección y cumplen bien los cálculos ulteriores. Sin embargo no todos pueden argumentar de modo convincente el aspecto geométrico de la solución, e incluso muchos estudiantes no tratan de realizar las demostraciones correspondientes considerando que todo ya está claro. Naturalmente, en tales casos el problema no se considera resuelto. Por esta razón cabe subrayar aquí una vez más que al resolver un problema deben argumentarse obligatoriamente todas las afirmaciones, incluso las que parecen "evidentes".

Indiquemos un método, bastante general, de la construcción de secciones de poliedros. Construir una sección significa indicar los puntos de intersección del plano secante con las aristas del poliedro (estos puntos, en particular, pueden ser también los vértices del poliedro) y unir estos puntos por medio de segmentos dispuestos en las caras. Con este fin es suficiente, en el plano de la cara del poliedro, indicar dos puntos que pertenecen a la sección, unirlos por medio de una recta y hallar los puntos de intersección de esta recta con las aristas del poliedro.

Esta construcción es muy natural, sin embargo, es poco usada por los estudiantes. Esto se debe a que suele ser difícil encontrar dos puntos de la sección situados en la propia cara. No obstante, nos satisfacerían por completo dos puntos de la sección ubicados en *el plano* de la cara (y no obligatoriamente en la propia cara), lo que se obtiene con frecuencia de una manera simple. El asunto consiste en que con este fin, por regla general, se tiene que salir de los límites del poliedro en consideración. Pero por una u otra razón los estudiantes no se atreven a cumplir construcciones complementarias fuera del poliedro.

Sin embargo, en una serie de problemas estas construcciones complementarias resultan inevitables. Además, estas construcciones permiten realizar, con bastante facilidad, las demostraciones y cálculos necesarios.

Ilustremos por medio de problemas concretos, de qué modo se aplica este método de construcción de las secciones.

1. *Se da un cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ en el cual AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 son las aristas laterales. Hallar el área de la sección del cubo por el plano que pasa por el vértice A y los puntos medios de las aristas B_1C_1 y C_1D_1. La arista del cubo es igual a 1.*

Antes que nada es preciso construir la sección. Sean K y L los puntos medios de las aristas D_1C_1 y B_1C_1 (fig. 139). La recta KL se sitúa en el plano de la cara $A_1B_1C_1D_1$, por eso interseca las prolongaciones de las aristas A_1B_1 y A_1D_1 en los puntos F y E. Es fácil calcular que $B_1F = 1/2\,A_1B_1 = 1/3\,A_1F$ y $D_1F = 1/2\,A_1D_1 = 1/3\,A_1E$.

Los puntos A y F se encuentran en el plano de la cara AA_1B_1B, por esta razón la recta AF interseca la arista BB_1 en cierto punto M. Analizando los triángulos AA_1F y MB_1F nos convencemos de que son semejantes. De su semejanza se deduce que $MB_1 = 1/3\,AA_1$. Teniendo en cuenta que $AA_1 = BB_1$, obtenemos definitivamente que el punto M divide la arista BB_1 en la relación de 2 : 1.

Los puntos A y E se sitúan en el plano de la cara ADD_1A_1, por eso la recta AE interseca la arista DD_1 en el punto N. De modo análogo al anterior puede demostrarse que el punto N divide la arista DD_1 en la relación de 2 : 1.

Así, la sección queda construida: ésta pasa por el vértice A, los puntos medios de las aristas B_1C_1 y C_1D_1 y por los puntos que dividen las aristas BB_1 y DD_1 en la relación de 2 : 1; la sección es un pentágono $AMLKN$.

Calculemos su área. Nuestro pentágono se produce del triángulo AEF, separando de éste dos triángulos iguales EKN y FLM. Por me-

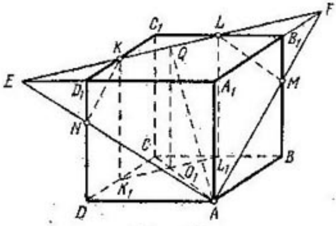


Fig. 139

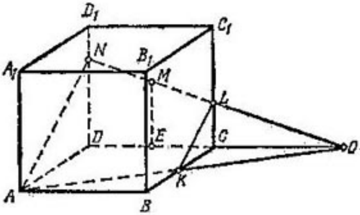


Fig. 140

dio de la construcción efectuada es fácil obtener las longitudes de los lados de estos triángulos y calcular sus áreas; la respuesta definitiva es la siguiente: el área de la sección es igual a $7\sqrt{17}/24$.

Se puede proceder de otro modo, considerando el pentágono $AMLKN$ como formado del triángulo AMN y del cuadrilátero $KLMN$. En este caso habrá que demostrar complementariamente que $KLMN$ es un trapecio.

Ambos métodos mencionados requieren cálculos considerables que no son muy difíciles. En efecto, se pueden evitar los cálculos voluminosos si se hace uso de la fórmula para el área de la proyección (véase § 4, Parte III). Por lo visto, la proyección del pentágono $AMLKN$ sobre la base inferior del cubo será el pentágono ABL_1K_1D cuya área es igual a 7/8 y, valiéndonos del triángulo AQQ_1 es fácil encontrar que $\cos(\angle QAQ_1) = 3/\sqrt{17}$. No obstante nos queda lo principal: es necesario demostrar que $\angle QAQ_1$ es precisamente el ángulo entre el plano de la sección y la cara inferior del cubo.

2. *Se da un cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ en el cual AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 son las aristas laterales. ¿En qué relación se divide el volumen del cubo por el plano que pasa por el vértice A, el punto medio de la arista BC y el centro de la cara DCC_1D_1?*

Sea K el punto medio de la arista BC (fig. 140). Merced a que los puntos A y K se sitúan en el plano de la cara inferior, la recta AK intersecará la prolongación de la arista DC en cierto punto O. Al analizar los triángulos ABK y KCO podemos ver que son iguales y, por eso, $CO=AB=DC$ y $DO=2DC$.

Sea el punto M el centro de la cara DCC_1D_1. Los puntos M y O se encuentran en el plano de la cara DCC_1D_1, por eso la recta MO interseca las aristas C_1C y D_1D en los puntos L y N. De este modo, la forma de la sección queda encontrada, es el cuadrilátero $AKLN$.

Bajando una perpendicular desde el punto M a la recta DC, obtenemos que su base, el punto E, es el punto medio de la arista DC. Examinemos los triángulos DNO, EMO y CLO. De la semejanza de dichos triángulos se deduce que $CL=2/3\ ME$ y $DN=4/3\ ME$. Tomando en consideración que $ME=1/2\ CC_1=1/2\ DD_1$, obtenemos $DN=2/3\ DD_1$ y $CL=1/3\ CC_1$.

Así es cómo se han determinado las posiciones de todos los puntos de intersección del plano de sección con las aristas del cubo.

Ahora aclaremos, en qué relación el plano de la sección ha dividido el volumen del cubo. Designando por a la longitud de la arista del cubo, calculemos el volumen del poliedro, es decir, la parte del cubo bajo el plano secante.

Este poliedro, como puede notarse, se obtiene de la pirámide de base triangular $NADO$ (con el vértice N) al separar la pirámide $LKCO$ (con el vértice L). Los volúmenes de estas pirámides se determinan fácilmente, puesto que ND y LC son sus alturas ya calculadas. Como resultado obtenemos que el volumen del poliedro $ADCKNL$ es igual a $7a^3/36$ y por eso el plano secante divide el volumen del cubo en la relación de $7:29$.

Los estudiantes, en su mayor parte, construían la sección de otro modo, basándose en la imaginación intuitiva, puramente geométrica. Al hacerlo, ponían al azar los puntos N y L sobre las aristas correspondientes.

Aquellos que poseían buena imaginación geométrica y se dieron cuenta de que el punto L se encuentra más bajo que el punto medio de la arista CC_1, pudieron construir un dibujo correcto y revelar (y después, claro está, demostrar) que la parte del cubo dispuesta por debajo del plano de la sección es una pirámide truncada "acostada" con las bases AND y KLC. Otros estudiantes, fijando el punto L superior al punto medio de la arista CC_1 obtuvieron un dibujo desfigurado y, naturalmente, no pudieron ni empezar los cálculos.

Al mismo tiempo, el método "estandartizado" propuesto más arriba nos permitió construir automáticamente la sección necesaria, indicar la posición de los puntos de intersección del plano secante con las aristas del cubo y cumplir con facilidad los cálculos necesarios.

3. *Se da una pirámide regular $SABCD$ de base cuadrangular de vértice S. Por los puntos medios de las aristas AB, AD y CS se ha trazado un plano. ¿En qué relación el plano divide el volumen de la pirámide?*

Sean K y F los puntos medios de las aristas AB y AD (fig. 141). Uniéndolos con una recta obtenemos que ésta intersecará las prolongaciones de las aristas CB y CD en los puntos M y E. Comparando los triángulos BKM, AKF y DEF obtenemos que $MB = 1/2\ BC$ y $ED = 1/2\ DC$.

Sea N el punto medio de la arista CS. Los puntos N y M se sitúan en el plano de la arista SBC, por eso la recta MN interseca la arista BS en cierto punto L.

Aclaremos ahora, en qué relación el punto L divide la arista SB. Para hacer más cómodos los cálculos, conviene construir un dibujo planimétrico auxiliar trazando el plano de la cara SBC en la fig. 142.

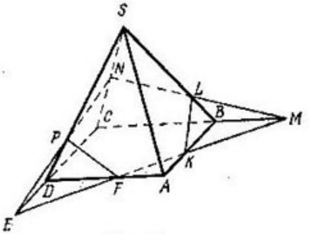


Fig. 141

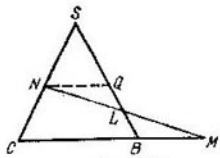


Fig. 142

Trazando la línea media NQ en el triángulo CBS, obtendremos dos triángulos iguales NQL y LBM, de los cuales encontramos que $BL = 1/2\ BQ = 1/4\ BS$.

De modo absolutamente análogo se demuestra que $DP = 1/4\ SD$, donde P es el punto de intersección de la recta EN con la arista SD.

Así, hemos construido nuestra sección. Resultó que el plano de la sección interseca la pirámide formando el pentágono $LKFPN$.

Este plano divide la pirámide en dos poliedros tales que es imposible calcular directamente sus volúmenes. Para calcular el volumen de uno de los poliedros, por lo menos, se necesita cumplir construcciones complementarias y analizar varias pirámides.

Sin embargo, se puede ver en la fig. 141 que el volumen del poliedro $CDFKBLNP$ dispuesto debajo del plano secante es igual al volumen de la pirámide de base triangular $NECM$ sin el volumen de dos pirámides de base triangular $LKBM$ y $PEDF$. Calculemos ahora el volumen de estas pirámides.

Supongamos que la altura de la pirámide $SABCD$ es igual a H y la arista de la base equivale a a; en este caso su volumen $V = 1/3\ a^2H$. Por ser N el punto medio de la arista CS, la perpendicular bajada desde este punto al plano $ABCD$ es igual a $1/2\ H$. Es también fácil demostrar que las perpendiculares bajadas desde los puntos L y P al plano $ABCD$ son iguales a $1/4\ H$. Las áreas de las bases de las pirámides en cuestión se calculan con facilidad: son iguales respectivamente a $9\ a^2/8$, $a^2/8$ y $a^2/8$. El volumen de nuestro poliedro $CDFKBLNP$ es igual a

$$V_1 = \frac{9}{48} a^2H - 2 \cdot \frac{a^2H}{96} = \frac{V}{2}.$$

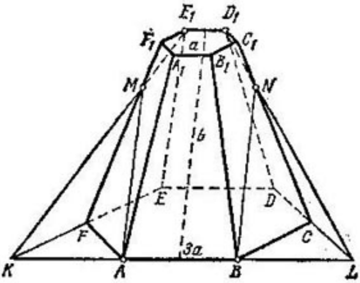


Fig. 143

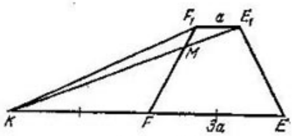


Fig. 144

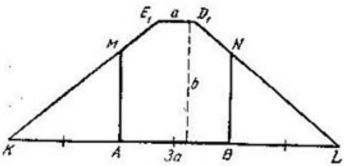


Fig. 145

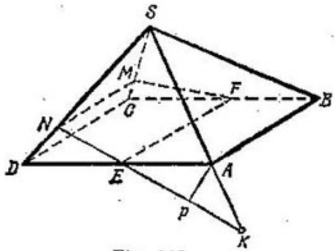


Fig. 146

Esto significa que el plano secante divide el volumen de la pirámide en la relación de 1 : 1.

La determinación de la forma de la sección en este problema puede obtenerse de modo bastante simple, sin aplicar el método en consideración, puesto que está absolutamente claro que en la sección resulta un pentágono $NLKFP$. Sin embargo, sin salir de los límites de la pirámide, no habríamos podido encontrar un método fino del cálculo del volumen del poliedro que se sitúa debajo del plano secante.

Muchos estudiantes trataron de hallar el volumen dividiendo el poliedro $CDFKBLNP$ en pirámides. Pero este método requiere, ante todo, una imaginación geométrica excelente, mucho más desarrollada, que para el cumplimiento de nuestra solución. Además, este método implica cálculos muy voluminosos, mientras que en la solución ilustrada éstos son insignificantes.

4. *Los lados de las bases de una pirámide regular truncada de base hexagonal son a y $3a$. La distancia entre dos aristas paralelas situadas en los planos de distintas bases y en distintas caras laterales es igual a b. Calcular el área de la sección de la pirámide por un plano que pasa por las aristas paralelas mencionadas.*

Tracemos un plano secante por las aristas AB y D_1E_1 (fig. 143). Con el fin de construir la sección, encontremos los puntos K y L en que la recta AB se interseca con las prolongaciones de las aristas EF y DC. Como los puntos K y E_1 se sitúan en el plano de la cara lateral EFF_1E_1, la recta KE_1 cortará la arista FF_1 en cierto punto M. La recta LD_1 se sitúa en el plano de la cara lateral CDD_1C_1 e interseca la arista CC_1 en cierto punto N.

Así, la forma de la sección ha sido hallada: es el hexágono $ABND_1E_1M$.

Señalemos para los cálculos ulteriores que los triángulos AKF y BLC son equiláteros, con el lado igual a $3a$. De aquí se deduce, en particular, que $KF = LC = 3a$.

Con el fin de facilitar los cálculos, conviene levantar dibujos planimétricos auxiliares. Trazando el plano de la cara EE_1F_1F en la fig. 144 y comparando los triángulos semejantes ME_1F_1 y MKF, determinamos que el punto M divide la arista F_1F en la relación de $1 : 3$. De modo análogo se puede mostrar que el punto N divide la arista C_1C también en la relación de $1 : 3$. De aquí se deduce, además, que $E_1M : MK = 1 : 3$ y $D_1N : NL = 1 : 3$.

Dibujemos aparte el plano de la sección en la fig. 145. El hexágono en cuestión $ABND_1E_1M$ se obtiene del trapecio KLD_1E_1 por medio de la separación de dos triángulos iguales KAM y LBN. Puesto que $KL = 9a$, $E_1D_1 = a$ y la altura del trapecio, el decir, la distancia entre las rectas AB y E_1D_1 es igual a b, en este caso el área del trapecio equivale a $5\ ab$. Gracias a que el punto M divide el segmento E_1K en la relación de $1 : 3$, la altura del triángulo KMA bajada desde el punto M a la AK[1], es igual a $3/4\ b$. Por esto el área del triángulo AKM equivale a $9ab/8$.

Ahora se calcula fácilmente el área de la sección: es igual a $11\ ab/4$.

Existen problemas en los cuales el plano secante se da por tres puntos dispuestos en las aristas (o en sus prolongaciones) del poliedro

[1] Señalemos de paso que MA y NB son perpendiculares a KL.

en consideración y, no obstante, la ejecución formal del método descrito arriba de la construcción de la sección no conduce al resultado.

Esto tiene lugar en los problemas en que la recta que une los dos puntos dados de la sección resulta ser paralela a la arista del poliedro.

En tales casos conviene aprovechar el teorema de que si dos planos son paralelos a una recta, la línea de su intersección es también paralela a esta recta.

5. *En la pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ todas las caras laterales son triángulos equiláteros con el lado igual a* 1 m. *En la prolongación de la arista AS se toma el punto K por el punto A de tal modo que $AK = 1/2$* m. *Un plano está trazado por el punto K y puntos medios de las aristas BC y AD. Hallar el área de la sección formada.*

Supongamos que E es el punto medio de la arista AD y F es el punto medio de la arista BC (fig. 146). Por encontrarse los puntos K y E en el plano de la cara ADS, la recta KE interseca la arista DS en el punto N. Al trazar una recta $AP \parallel DS$ y analizar los triángulos semejantes KAP y KSM hallaremos que $AP = 1/3\ SN$. Pero tomando en consideración que $AP = DN$ obtenemos que el punto N divide la arista SD en la relación de $3:1$.

Ahora se necesita encontrar un punto más (además del punto dado F) en cualquier cara lateral. Sin embargo, esto se puede efectuar solamente aplicando el teorema recién formulado. En efecto, puesto que $EF \parallel CD$, el plano de la sección es paralelo a la arista CD y, teniendo

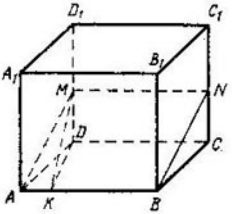


Fig. 147

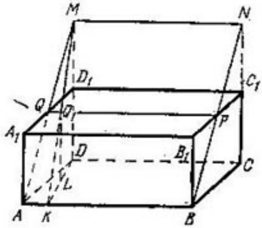


Fig. 148

en cuenta que la arista CD se halla en la cara CDS, obtenemos que el plano de la sección corta la CDS, por la recta MN que es paralela a la arista CD.

Así, pues, la sección está construida: ésta es el trapecio $EFMN$. Calculemos ahora su área. Como $SN = 3/4\ DS$ y $\triangle DSC \backsim \triangle MNS$, en este caso $SN = 3/4$ m. Analizando el $\triangle DNE$ y aplicando el teorema de los cosenos hallamos que $NE = \sqrt{3}/4$ m. De modo análogo hallamos que $FM = \sqrt{3}/4$ m. Aquí están todos los lados del trapecio $EFMN$, y su área será: $7\sqrt{11}/64$ m².

6. *La altura de un prisma recto es 1, su base es un rombo de lado 2 y ángulo agudo de 30°. Por un lado de la base se ha trazado un plano que corta el prisma y está inclinado a 60° respecto de la base. Hallar el área de la sección.*

También en este problema, para construir la sección, debe recurrirse al teorema de la intersección de los planos paralelos a una recta. Algunos estudiantes ofrecen "la solución" siguiente: "Supongamos que el plano secante pasa por la arista AB del prisma $ABCDA_1B_1C_1D_1$, entonces interseca el plano de la cara DCC_1D_1 por la recta MN (fig. 147). Bajando desde el punto M una perpendicular a la AB, obtenemos los triángulos rectángulos ADK y MKD, ya que de acuerdo con el teorema de las tres perpendiculares $KD \perp AB$. Valiéndonos del $\triangle ADK$ se obtiene: $DK = 1$. Puesto que $AB \perp KD$ y $AB \perp KM$, el ángulo MKD es lineal del ángulo diedro entre el plano de la base y el plano secante, es decir, $\angle MKD = 60°$. En el $\triangle MKD$ hallamos que $MK = 2$. Por ser MK la altura del paralelogramo $AMNB$, el área de éste es igual a 4. Esto significa que el área de la sección es igual a 4".

En esta solución todo es correcto, salvo la última frase de que la sección es el paralelogramo $AMNB$. En realidad, en la resolución recién cumplida la sección no fue construida ya que para hacerlo es necesario saber la posición exacta de los puntos M y N en las aristas DD_1 y CC_1, lo que no fue hecho. Por esto, para resolver correctamente este problema, lo primero que hay que hacer es determinar la posición del punto M. Efectuando los mismos razonamientos que en la solución anterior, encontramos de acuerdo con el $\triangle KMD$ que $MD = \sqrt{3}$. Resulta que la longitud del segmento MD es mayor que la de la arista DD_1, es decir, resulta que la fig. 147 contiene un error y es necesario trazar otro dibujo donde el punto M se sitúe por encima del punto D_1 (fig. 148)[1]. Uniendo los puntos A y M, B y N, obtenemos que el plano secante corta también la cara $A_1B_1C_1D_1$ por la recta $QP \parallel AB$. Esto significa que la sección es el paralelogramo $ABPQ$. Hallemos su altura. Con este fin tracemos $MK \perp AB$ y desde el punto Q_1 (intersección de las rectas MK y QP) bajemos una perpendicular a KD. Valiéndonos del triángulo rectángulo Q_1KL, en que $LQ_1 = 1$ y $\angle Q_1KL = 60°$ se obtiene que $KQ_1 = 2/\sqrt{3}$. Ahora se calcula fácilmente el área incógnita de la sección: ésta es igual a $4/\sqrt{3}$

En los problemas anteriores teníamos siempre, en el plano de por lo menos una cara del poliedro, dos puntos de la sección buscada. Conociéndolos, encontrábamos uno o dos puntos más que se hallan en las aristas y, por lo tanto, en otras caras. Ahora en el plano de la cara nueva también tenemos dos puntos de la sección, etc.

[1] Puesto que para la determinación de la longitud del segmento MD no hemos utilizado la condición de que si el punto M se sitúa por encima o por debajo del punto D_1, se puede calcular la longitud del segmento MD utilizando cualquiera de las dos figuras, 147 ó 148.

Sin embargo, esto tiene lugar no en todos los problemas; con frecuencia uno de los puntos que determinan la sección se encuentra dentro del poliedro o todos los puntos se dan en diferentes caras. Para resolver los problemas de este tipo hay que trazar construcciones complementarias. Por lo común, en estos casos se traza un plano auxiliar que contenga una recta del plano de la sección y una recta dispuesta en el plano de una de las caras del poliedro. En el plano auxiliar construido se busca el punto de intersección de dichas rectas y de este modo se halla un punto más de la sección, dispuesto ya en el plano de la cara. La construcción ulterior se efectúa de acuerdo con el esquema descrito arriba.

7. *Se da el cubo* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ en que AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *son las aristas laterales. ¿En qué relación se divide la arista* B_1C_1 *por el punto* E *que pertenece al plano que pasa por el vértice* A *y los centros de las caras* $A_1B_1C_1D_1$ *y* B_1C_1CB?

En este problema ninguno de los tres puntos de la sección se encuentra en una cara del cubo.

Supongamos que los puntos S y R son los centros de las caras BCC_1B_1 y $A_1B_1C_1D_1$ (fig. 149). Tracemos por estos dos puntos el plano α, perpendicular a la arista B_1C_1. Es obvio que el plano corta el cubo formando el cuadrado $NLMQ$, cuyos vértices son los puntos medios de las aristas correspondientes del cubo.

Como los puntos R y S se sitúan en este plano, en el mismo se halla también toda la recta RS. Mas en este caso RS intersecará la recta MQ en cierto punto O. Con esto $\triangle RNS = \triangle OQS$, de donde se deduce que el segmento OQ es igual a la mitad de la arista del cubo.

Ahora disponemos de dos puntos de la sección en el plano de la cara $ABCD$: A y O. La recta AO interseca la arista BC en cierto punto

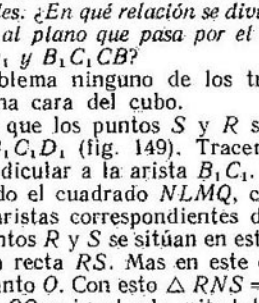


Fig. 149

K. Valiéndonos de la semejanza de los triángulos ABK y KQO se obtiene que $BK = 2QK$. Como el segmento BQ equivale a la mitad de la arista BC, de aquí hallamos que $BK = 1/3\ BC$.

La recta KS se sitúa en el plano de la cara BCC_1B_1 e interseca la arista B_1C_1 en el punto E. Precisamente, de este punto se trata en los datos del problema. Por ser S el centro del cuadrado BCC_1B_1, en este caso $EC_1 = BK = 1/3\ B_1C_1$, es decir, el punto E divide la arista B_1C_1 en la relación de $2 : 1$.

Muchos estudiantes resolvían este problema basándose también en la intuición puramente geométrica. Colocando al azar el punto E, de que se trata en el problema, más cerca del vértice C_1 o del vértice B_1, obtenían la fig. 150 o la 151 (el punto E no puede encontrarse exactamente en el centro del segmento B_1C_1, ya que en este caso el plano que pasa por los puntos E, S y R sería paralelo al plano de la cara ABB_1A_1 y no pasaría por el punto A).

Está claro, intuitivamente, que el cuadrángulo representado $AKEL$ en la fig. 151 no es plano, pero no es tan simple demostrar que este dibujo es imposible. Entre tanto, algunos estudiantes sólo pudieron ver el dibujo en la fig. 151 y no el de la fig. 150 y por eso no pudieron resolver el problema.

Procedamos los razonamientos observando simultáneamente los dos dibujos; esto nos facilitará resolver estrictamente el problema y al mismo tiempo permitirá convencernos de que es correcta la fig. 150.

El plano secante de que se trata en el problema, lo designemos por β, pasa por el vértice A y los centros R y S de las caras $A_1B_1C_1D_1$ y B_1C_1CB y, por consiguiente, se determina de manera unívoca. La recta l, a cuyo largo el plano β se interseca con la cara $A_1B_1C_1D_1$, no puede ser paralela a la arista A_1D_1 ya que de lo contrario el plano β no se intersecaría por la cara B_1C_1CB y por eso no podría pasar por el punto S. Por consiguiente, la recta l se interseca con la recta A_1D_1, es decir, el plano β se interseca con esta recta y, por eso, también con las rectas B_1C_1 y BC, paralelas a ésta. De este modo, el plano β interseca las aristas A_1D_1, B_1C_1 y BC del cubo (o las prolongaciones de éstas); designemos por L, E, K los puntos de intersección correspondientes.

El cuadrángulo $ALEK$ es plano (sus cuatro vértices se sitúan en el plano β); $AL \parallel KE$ y $AK \parallel LE$ como líneas de intersección del par de

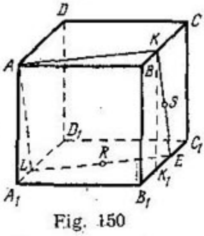


Fig. 150

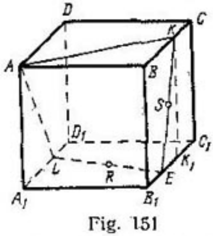


Fig. 151

planos paralelos por una tercera. Por consiguiente, $ALEK$ es un paralelogramo. De esta manera queda determinada la forma de la sección.

Tracemos $KK_1 \perp B_1C_1$ en el plano de la cara B_1C_1CB. $K_1E = A_1L$, puesto que $\triangle K_1KE = \triangle A_1AL$. Como R y S son centros de las caras, $EC_1 = BK$ y $EC_1 = A_1L$; además está claro que $BK = B_1K_1$. De aquí obtenemos que $B_1K_1 = K_1E = EC_1$.

Ahora es evidente que los puntos B_1, K_1, E y C están dispuestos precisamente del modo que se ven en la fig. 150, mientras que la fig. 151 es irreal ya que en ésta $B_1K_1 > K_1E$.

Hemos obtenido automáticamente también la solución del problema: $B_1E : EC_1 = 2$.

8. *Se da un prisma triangular regular* $ABCA_1B_1C_1$ *con las aristas laterales* AA_1, BB_1 *y* CC_1. *Supongamos que el punto* P *divide el eje* OO_1 *del prisma en la relación de* $5:1$. *Por el punto* P *y los puntos medios de las aristas* AB *y* A_1C_1 *está trazado un plano. ¿En qué relación dicho plano divide el volumen del prisma?*

Supongamos que E y N son los puntos medios de las aristas A_1C_1 y AB (fig. 152). Con el fin de construir la sección hallemos un punto más que se encuentra en una misma cara con el punto N, por ejemplo, el punto de intersección de la recta EP con la cara ABB_1A_1. Está claro que dicha recta se encuentra, en particular, en el plano α que pasa por los puntos E, O_1 y P. En este plano se sitúa la recta EO_1 y, por consiguiente, también el punto B_1.

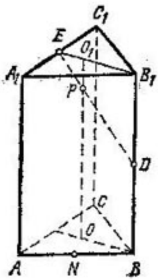


Fig. 152

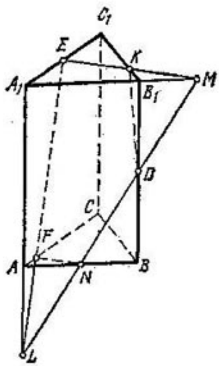


Fig. 153

Como las rectas PO_1 y BB_1 son paralelas y la recta PO_1 se encuentra en el plano α, en éste se halla también la recta BB_1. Esto quiere decir que la recta EP intersecará la arista BB_1 en cierto punto D. Como los triángulos EDB_1 y PEO_1 son semejantes y como $EO_1 = 1/3\ B_1E$, $PO_1 = 1/6\ BB_1$, obtenemos que $DB_1 = 1/2\ BB_1$. Así, pues, hemos hallado un punto más de la sección, el punto medio de la arista BB_1. Los razonamientos ulteriores son análogos a los de los problemas anteriores.

Merced a que los puntos N y D (fig. 153) se sitúan en el plano de la cara ABB_1A_1, obtendremos, trazando la recta ND, que ésta intersecará la prolongación de las aristas A_1B_1 y A_1A en los puntos M y L. En este caso es fácil demostrar que el punto L dista la mitad de la arista AA_1 del punto A y el punto M dista la mitad de la arista A_1B_1 del punto B_1.

Al unir el punto E con los puntos M y L, obtenemos los puntos K y F que determinan definitivamente la sección que se busca, el pentágono $EKDNF$.

Teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos ALF y A_1LE obtenemos que $AF = 1/6\ AC$. Con el fin de determinar B_1K se puede proceder de la misma manera que en el problema 3 y, como resultado, obtendremos que $B_1K = 1/4\ B_1C_1$. Así queda determinada completamente la posición de los puntos E, K, D, N y F.

Calculemos el volumen del poliedro A_1EKB_1DNAF designando por h la arista lateral del prisma y por s el área de su base. Dicho poliedro se obtiene de la pirámide LA_1EM (L es el vértice) separando las pirámides $LAFN$ y DB_1KM (L y D son los vértices).

Un cálculo sencillo demuestra que el volumen del poliedro en cuestión es igual a $49\ hs/144$, de donde se deduce que el plano secante divide el volumen de la pirámide en la relación de $49 : 95$.

A veces el plano de la sección se da no con tres puntos, sino con otras condiciones, por ejemplo, con un punto y la condición de que el plano secante sea paralelo a cierto plano, o con un punto y la condición de que el plano secante sea paralelo a dos rectas que se cruzan. En los problemas de este tipo deben hallarse, utilizando estas condiciones, los puntos que estén en los planos de las caras y sólo después se puede seguir con la resolución del problema, según el método corriente descrito arriba.

9. *En el paralelepípedo rectangular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ son las bases, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) se dan las longitudes de las aristas $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Supongamos que O es el centro de la base $ABCD$, O_1 es el centro de la base $A_1B_1C_1D_1$ y S es el punto que divide el segmento O_1O en la relación de $1 : 3$, es decir, $O_1S : SO = 1 : 3$. Hallar el área de la sección del paralelepípedo por el plano que pasa por el punto S en paralelo a la diagonal AC_1 del paralelepípedo y con la diagonal BD de su base $ABCD$.*

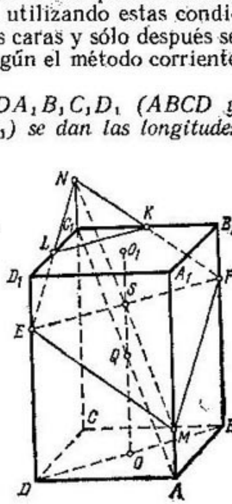


Fig. 154

Puesto que el punto S se encuentra en el plano diagonal BDD_1B_1, el plano secante que es paralelo a la diagonal BD, interseca dicho plano a lo largo de la recta EF que es paralela a BD (fig. 154). En este caso es evidente que $D_1E = 1/4\ D_1D = c/4$ y $B_1F = c/4$.

Así, al aplicar la condición del paralelismo del plano secante a la diagonal BD, hemos encontrado dos puntos de la sección que se sitúan en las aristas del paralelepípedo.

Apliquemos ahora otra condición: el paralelismo del plano secante a la diagonal AC_1. El punto S está también en el plano diagonal ACC_1A_1, por eso el plano secante interseca a este plano por la recta MN que es paralela a la diagonal AC_1. Sea Q el punto medio de la diagonal AC_1. Como la recta OO_1 se sitúa en el plano ACC_1A_1, está claro que $SQ = 1/4 \; O_1O = 1/4 \; AA_1 = c/4$. Puesto que $MN \parallel AC_1$, $AM \parallel SQ$ y $NC_1 \parallel SQ$, obtenemos que $MA = NC_1 = SQ = c/4$.

Así es como hemos encontrado cuatro puntos que pertenecen a la sección y se sitúan en las aristas del paralelepípedo o en sus prolongaciones.

Los puntos E y N están en el plano de la cara DCC_1D_1, por eso la recta EN interseca la arista D_1C_1 en cierto punto L. Como $ED_1 = NC_1$, está claro que L es el punto medio de la arista D_1C_1 y, además, $EL = LN$. De modo análogo se demuestra que la recta FN interseca la arista B_1C_1 en su punto medio (en el punto K) y que $KN = KF$.

Así, pues, la sección se ha determinado por completo: es el pentágono $MFKLE$. Para calcular su área señalemos que el pentágono se obtiene del cuadrángulo $MFNE$ mediante la separación del triángulo KNL. El cuadrángulo $MFNE$ es un paralelogramo, ya que $ME \parallel FN$ y $MF \parallel EN$ (el plano secante corta los planos paralelos por las líneas paralelas), por esta razón su área es igual a dos áreas del triángulo MFE.

Teniendo en cuenta que $LN = 1/2 \; EN$ y $KN = 1/2 \; FN$ obtenemos que el área del triángulo LNK es igual a la cuarta parte del área del triángulo EFN o a la cuarta parte del triángulo MFE que es igual a éste. Esto significa que el área de la sección es igual a 7/4 del área del triángulo MFE.

Hallemos ahora el área S del triángulo NFE. Se nota fácilmente que $EF = DB = \sqrt{a^2 + b^2}$, $MF = \sqrt{a^2 + (c^2/4)}$, $ME = \sqrt{b^2 + (c^2/4)}$. Valiéndonos de la fórmula de Herón, después de las transformaciones necesarias, se encuentra el área del triángulo MFE. Luego se obtiene el área de la sección que es igual a $\frac{7}{16}\sqrt{4a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.

Así, en todos los problemas analizados, el método corriente nos permitió construir casi automáticamente la sección, mientras que las construcciones complementarias fuera del poliedro en cuestión permitieron efectuar de modo muy simple los cálculos necesarios.

Señalemos además, que las construcciones complementarias con la salida fuera de los límites del poliedro que se considera pueden aplicarse con éxito a la solución de otros problemas (véanse, por ejemplo, el problema 4 del § 5 y el problema 2 del § 6 de la Parte III).

EJERCICIOS:

1. Una pirámide regular de base cuadrangular cuyo lado de la base es a y el ángulo diedro de la base es igual a 2α está cortada por un plano que divide en dos partes iguales el ángulo diedro de la base. Hallar el área de la sección.

2. En una pirámide regular de base triangular el ángulo plano del vértice es igual a 2α. Hallar el área de la sección de la pirámide por un plano que pasa por uno de los lados de la base perpendicularmente a la arista lateral opuesta. El lado de la base de la pirámide es a.

3. En una pirámide regular de base cuadrangular, por un lado de la base se ha trazado un plano perpendicular a la cara lateral opuesta. Calcular el área de la sección si el lado de la base de la pirámide es a y el ángulo diedro a la base es igual a α.

4. Hallar la relación entre los volúmenes de dos cuerpos formados por la sección de una pirámide regular cuadrangular por un plano que pasa por los puntos medios de dos lados contiguos de la base perpendicularmente a ésta.

5. En una pirámide regular de base cuadrangular el plano que pasa por un lado de la base y la línea media de la cara lateral opuesta, forma con la base un ángulo de 60°. Calcular el volumen de la pirámide si el lado de la base es a.

6. Una pirámide regular de base triangular está cortada por un plano que es paralelo a la base de tal manera que la superficie lateral se divide en dos partes iguales. ¿En qué relación se divide la altura?

7. Una pirámide regular de base triangular tiene la altura h y la arista lateral l. Hallar el área de la sección que es paralela a la base y está separada de ésta a la distancia de a.

8. Una pirámide regular de base cuadrangular stá coertada por un plano que es paralelo a la base. ¿En qué relación se divide el volumen de la pirámide si el área de la sección es tres veces menor que el área de la base?

9. Por uno de los vértices de la base de una pirámide regular de base cuadrangular se ha trazado un plano que es perpendicular a la arista lateral. Determinar el área de la sección si la arista de la base es igual a 1 y la arista lateral es 2.

10. Por uno de los lados de la base de un prisma triangular recto y regular se ha trazado un plano bajo el ángulo α respecto a la base, separando del prisma una pirámide de volumen V. Determinar el área de la sección.

11. En una pirámide regular de base cuadrangular $PABCD$ de vértice P el lado de la base es igual a a y el ángulo de inclinación de la cara lateral respecto a la base es igual a φ. En la pirámide se traza un plano secante que divide en dos partes iguales el ángulo diedro a la arista CD. Determinar la longitud del segmento, a lo largo del cual el plano se interseca con la arista APB.

12. La base inferior $ABCD$ de un prisma recto $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (donde AA_1, BB_1, CC_1 y DD_1 son las aristas laterales) es un rombo con el ángulo agudo φ. Se sabe que en el prisma puede inscribirse una esfera de diámetro d, que es tangente por su interior a todas sus caras. Calcular el área de la sección del prisma con el plano que pasa por las aristas BC y A_1D_1.

13. De una pirámide regular de base cuadrangular se ha separado otra pirámide por un plano que pasa por la arista AB de la base. La relación entre las superficies laterales de las pirámides es igual a 2. Determinar la relación entre el área del triángulo, separado por la sección trazada de la cara opuesta a la arista AB, y el área de esta cara.

14. Se da un prisma recto en el cual un triángulo regular sirve de base. Por uno de los lados de la base inferior y por el vértice opuesto de la base superior se ha trazado un plano. El ángulo entre este plano y la base del prisma es igual a α y el plano de la sección del prisma es S. Determinar el volumen del prisma.

15. Se da un prisma regular triangular $ABCA'B'C'$ con las aristas laterales AA', BB', CC'. En la prolongación de la arista BA se toma un punto M de tal modo que $MA = AB$ $(MB = 2AB)$; un plano se ha trazado por los puntos M, B' y el punto medio de la arista AC. ¿En qué relación el plano divide al volumen de la pirámide?

16. Se da el cubo $ABCDA'B'C'D'$ con las aristas laterales AA', BB', CC' y DD'. En las prolongaciones de las aristas AB, AA', AD se han fijado, respectivamente, los segmentos BP, $A'Q$, DR de 1,5 AB de longitud ($AP = AQ = AR = 2{,}5AB$). Se tiene un plano que pasa por los puntos P, Q y R. ¿En qué relación el plano divide al volumen del cubo?

17. En la base de una pirámide regular de base cuadrangular se sitúa un cuadrado de lado a. La altura de la pirámide es igual a la diagonal de este cuadrado. La pirámide está cortada por un plano que es paralelo a su altura y a dos lados opuestos de la base. Hallar el perímetro de la sección si se sabe que en ésta puede inscribirse una circunferencia.

18. Un plano está trazado por el punto medio de la diagonal de un cubo, que es perpendicular a ésta. Determinar el área de la figura formada en la sección del cubo por dicho plano si la arista del cubo es a.

19. Por una arista de la base de una pirámide regular de base cuadrangular se ha trazado un plano que separa de la cara opuesta un triángulo de área a^2. Determinar la superficie lateral de la pirámide que está separada de ésta por el plano trazado, si la superficie lateral de la pirámide entera es igual a b^2.

20. En la pirámide regular de base triangular $SABC$ un plano que pasa por el lado AC de la base y se dispone perpendicularmente a la arista SB, separa a otra pirámide $DABC$ cuyo volumen es 1,5 veces menor que el de la pirámide $SABC$. Calcular la superficie lateral de la pirámide $SABC$ si $AC = a$.

21. En la pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ el plano trazado por el lado AD de la base es perpendicular a la cara BSC y la divide en dos partes de áreas iguales. Determinar la superficie total de la pirámide si se conoce que $AD = a$.

22. En una pirámide regular de base cuadrangular $SABC$ de vértice S y volumen V se ha trazado un plano que es paralelo a la mediana de la base BN e interseca la arista lateral SA en el punto K y a la arista lateral SB en el punto L, siendo $SK = 1/2\, SA$, $SL = 1/3\, SB$. Hallar el volumen de la parte de la pirámide que se encuentra por debajo de este plano.

23. La pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ de vértice S se corta por un plano que separa las aristas SA, SB y SC formando los segmentos $SK = 2/3\, SA$, $SL = 1/2\, SB$, $SM = 1/3\, SC$ respectivamente. La longitud de la arista lateral de la pirámide es igual a a. Calcular la longitud del segmento SN cortado por el plano en la arista SD.

24. En la pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ de vértice S y altura h, se ha trazado un plano por el centro de la base, que es paralelo a la cara SAB. El área de la sección obtenida es igual a la de la base. Hallar el volumen de aquella parte de la pirámide que se encuentra por debajo del plano.

25. En una pirámide regular de base hexagonal el lado de la base es a y la altura, h. Calcular el área de la sección que pasa por los puntos medios de dos lados de la base no contiguos ni paralelos y por el punto medio de la altura de la pirámide.

26. El área de la sección trazada por la diagonal de la base de una pirámide regular de base cuadrangular en paralelo a la arista lateral que no se interseca con esta diagonal, es igual a S. Calcular el área de la sección que pasa por los puntos medios de los dos lados contiguos de la base y el punto medio de la altura de la pirámide.

27. El área de la cara lateral de una pirámide regular de base hexagonal es igual a S. Calcular el área de la sección que atraviesa el punto medio de la altura de la pirámide paralelamente a la cara lateral.

28. El ángulo entre la arista lateral y el plano de la base de la pirámide regular de base triangular $SABC$ de vértice S es igual a 60°. Por el punto A se ha trazado un plano que es perpendicular a la bisectriz del ángulo S del triángulo BSC. ¿En qué relación la línea de intersección de este plano con el plano BSC divide al plano de la cara BSC?

29. Por el lado de la base de la pirámide regular de base cuadrangular se ha trazado un plano que es perpendicular a la cara opuesta. Calcular el área de la sección formada, si la altura de la pirámide es h, mientras que la relación entre la superficie lateral y el área de la base es $\sqrt{3}$.

30. En la pirámide de base triangular $SABC$ de vértice S se tiene que

$$SA = SC; \quad SB = 2AC, \quad AB = BC = 1{,}5AC.$$

Se ha trazado un plano por AC y el punto medio D de la arista SB. El área de la superficie total de la pirámide $SADC$ supera al área total de la superficie de la pirámide $DABC$ en una magnitud que es igual al área de la base de la pirámide $SABC$. Determinar el ángulo de oblicuidad de la cara ASC al plano de la base de la pirámide $SABC$.

31. En la pirámide regular de base triangular $SABC$ de vértice S, el lado de la base es a y los ángulos planos del vértice son de 30°. Por el punto A y el punto medio de la arista SB se ha trazado un plano que divide a la pirámide en dos partes iguales en volumen. Hallar los segmentos en que el plano divide la altura de la pirámide.

32. En la pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ del vértice S se ha trazado un plano secante P paralelo al lado AB y que pasa por el punto de tangencia de la esfera inscrita y la cara SAB, así como por el punto de esta esfera, próximo al vértice S. Determinar el área de la sección de la pirámide por el plano P si $AB = 1$, $SA = \sqrt{5}/2$.

33. En una pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ de vértice S y lado de la base $d\sqrt{3}$ está inscrita una esfera cuyo radio es $d/2$. El plano P, que forma con el plano de la base un ángulo de 30°, es tangente a la esfera e interseca la base de la pirámide a lo largo de la línea que es paralela al lado AB (el punto de tangencia del plano P con la esfera está situado por debajo del centro de la esfera). Hallar el área de la sección de la pirámide por el plano P.

34. La base del prisma recto $ABCA_1B_1C_1$ es el triángulo rectángulo isósceles ABC con catetos $AB = BC = 1$ dm. En éste se ha trazado un plano por los puntos medios de las aristas AB y BC y el punto P que está dispuesto en la prolongación de la arista B_1B, tras el punto B. Calcular el área de la sección obtenida si $BP = 1/2$ dm y $B_1B = 1$ dm.

35. Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cuya arista es igual a 1 dm. En la prolongación de la arista D_1D, tras el punto D, se toma un punto P tal que $DP = 1/2$ dm. Se ha trazado un plano por el punto P y los puntos medios de las aristas AA_1 y CC_1. Determinar el área de la sección obtenida.

§ 8. COMBINACIONES DE CUERPOS

En los exámenes se practican ampliamente los problemas estereométricos en los cuales se analizan diferentes combinaciones de cuerpos. Al resolver estos problemas hay que pensar detenidamente e imaginar bien la disposición mutua de los cuerpos en el espacio, trazar de manera legible el dibujo y demostrar con exactitud todas las afirmaciones.

Las mayores dificultades surgen en los casos en que uno de los cuerpos es una esfera. Sin embargo, en estos problemas la representación de la propia esfera suele a menudo ser superflua, es suficiente indicar sólo su centro y puntos de tangencia con diversos planos y rectas.

En la solución de los problemas para las combinaciones de cuerpos es muy útil hacer diversos dibujos planimétricos auxiliares, trazar aparte configuraciones planas, cuya representación esté desfigurada por la perspectiva espacial.

Examinemos más detalladamente un caso en que se trata de combinaciones de la pirámide y la esfera. Primero, nos detendremos en la figura compuesta de una pirámide y una esfera inscrita en la misma.

Definición. *Una esfera se denomina inscrita en una pirámide (cualquiera) si es tangente a todas las caras de la pirámide (tanto a las laterales como a la de la base).*

De este modo, el centro O de la esfera inscrita (fig. 155) es un punto que equidista de todas *las caras de la pirámide*. Esto significa que en

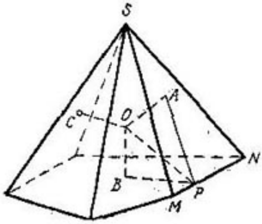


Fig. 155

caso de bajar las perpendiculares OA, OB, OC, ... desde el centro de la esfera inscrita a las caras de la pirámide, todas estas perpendiculares tendrán una misma longitud.

En lo que se refiere a los puntos A, B, C, ..., que son bases de las perpendiculares, son también los puntos de tangencia de la esfera inscrita con las caras de la pirámide.

Señalemos el hecho siguiente. Al bajar perpendiculares desde los puntos A y B a la arista MN, resulta que un mismo punto servirá de base de dichas perpendiculares. En efecto, el segmento OB es perpendicular al plano de la base y por eso $OB \perp MN$ (véase el § 4, Parte III); el segmento OA es perpendicular al plano MSN y por eso $OA \perp MN$. Por consiguiente, la arista MN es perpendicular al plano trazado por las rectas que se intersecan OA y OB. Si P es el punto de intersección de este plano con la arista MN (nótese que este punto puede encontrarse también en *la prolongación* de dicha arista), entonces $AP \perp MN$, $BP \perp MN$ y por lo tanto el punto P es la base común de las perpendiculares bajadas desde los puntos A y B a la arista MN. Naturalmente, todos los razonamientos serán válidos si en lugar de MN se toma cualquier otra arista de la pirámide (el lector mismo puede cumplir los razonamientos para la arista MS).

Teorema. *Si en una pirámide está inscrita una esfera, el centro de ésta es el punto de intersección de los planos bisectrales de todos los ángulos diedros de la pirámide.*

En efecto, cualquier punto que equidiste de las dos caras de un ángulo diedro, se sitúa en el plano bisectral de este ángulo diedro (véase § 2, Parte III). Por esta razón el centro de la esfera inscrita, equidistando de todas las caras de la pirámide, ha de encontrarse en cada uno de los planos bisectrales, es decir, es el punto de intersección de los planos bisectrales de todos los ángulos diedros [1].

El centro de una esfera inscrita en una pirámide siempre se halla dentro de la pirámide; esta afirmación se deduce de que todos los puntos del plano bisectral se encuentran *entre* las caras del ángulo diedro.

Subrayemos, finalmente, que en caso de proyectar ortogonalmente la esfera inscrita en la pirámide, sobre el plano de la base de la pirámide, el círculo producido en la proyección no será inscrito en el polígono dispuesto en la base de la pirámide.

El problema que sigue da una idea de cómo debe efectuarse, de manera exhaustiva, la solución de los problemas para las combinaciones de la pirámide y la esfera (y otros problemas similares). Es interesante también por el hecho de que la pirámide que se analiza es "mala": en su base se encuentra no un polígono regular, como suele suceder a menudo, sino un trapecio.

1. *En una pirámide de base cuadrangular $PABCD$ está inscrita una esfera que es tangente a todas sus caras. La base de la pirámide es un trapecio isósceles $ABCD$ con el lado lateral $AB = l$ y el ángulo agudo φ, mientras que las caras laterales APD y BPC son triángulos isósceles $(AP = PD,\ BP = PC)$ que con la base de la pirámide forman un mismo ángulo α. Hallar el radio de la esfera.*

Supongamos que $PABCD$ es la pirámide, en cuya base se sitúa el trapecio isósceles $ABCD$; $AB = CD = l$, $\angle BAD = \angle ADC = \varphi$. Las caras laterales de la pirámide APD y BPC son triángulos isósceles: $AP = PD$, $BP = PC$; sus bases son simultáneamente las bases del trapecio (fig. 156).

Tracemos una apotema PK de la cara APD y la altura PH de la pirámide. En este caso la arista AD, por ser perpendicular a las dos rectas PH y PK que se intersecan, es perpendicular al plano HPK; $BC \parallel AD$ y por eso la arista BC es perpendicular al plano HPK y, en caso particular, a la línea PL de intersección de este plano con la cara BPC (es decir, PL es una apotema). Por lo tanto $\angle PLK$ y $\angle PKL$ son ángulos lineales de los ángulos diedros entre la base y las caras laterales BPC y APD respectivamente; según los datos, $\angle PLK = \angle PKL = \alpha$.

[1] No es difícil comprender que es válida también la afirmación inversa: *una esfera puede inscribirse en una pirámide, si los planos bisectrales de todos sus ángulos diedros se intersecan en un mismo punto.* No obstante, no se deduce de ningún modo que todos los planos bisectrales se intersecan en un mismo punto. No es difícil encontrar un ejemplo de una pirámide de base cuadrangular que no tenga un punto *común* para los ocho planos bisectrales; por esta causa es imposible inscribir una esfera en la pirámide de este tipo. Se puede demostrar (esto se propone al lector) que 1) *puede inscribirse una esfera en cualquier pirámide de base triangular*, 2) *puede inscribirse una esfera en una pirámide regular de base n-angular.*

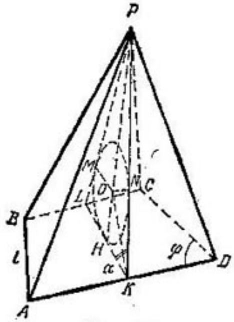


Fig. 156

De acuerdo con los datos, en la pirámide en cuestión está inscrita una esfera; se requiere hallar su radio. El centro de la esfera inscrita se sitúa en el plano bisectral del ángulo diedro entre los planos BPC y APD puesto que equidista de las dos caras. Luego, de acuerdo con las mismas consideraciones, el centro se sitúa también en el plano bisectral del ángulo diedro entre los planos APB y CPD. Por eso se dispone en la línea de intersección de estos dos planos bisectrales. Demostremos que la altura PH de la pirámide es precisamente esta línea de intersección. Con este fin es suficiente demostrar que la altura PH se encuentra en cada uno de estos planos bisectrales.

En primer lugar, demostremos que PH se halla en el plano bisectral del ángulo diedro entre los planos BPC y APD. Siendo el plano LPK perpendicular al plano APD (ya que el plano APD pasa por la perpendicular AD al plano LPK) y el plano LPK perpendicular al plano BPC (por razones análogas), el plano LPK es perpendicular a la línea de intersección de los planos APD y BPC y, por consiguiente, el ángulo LPK es el lineal del ángulo diedro entre las caras BPC y APD. Pero $\angle PLK = \angle PKL$, por eso el triángulo PKL es isósceles y la altura PH también es simultáneamente la bisectriz. Como se sabe, la bisectriz de un ángulo lineal que corresponde al ángulo diedro se encuentra en el plano bisectral del ángulo diedro.

En segundo lugar, demostremos que PH está en el plano bisectral del ángulo diedro entre los planos APB y DPC. Convenzámonos de que el plano LPK sirve de dicho plano bisectral; con este fin demostremos que la distancia entre el punto arbitrario S de este plano y las caras APB y DPC es la misma. Unamos mentalmente el punto S con los vértices P, A, B, C y D de la pirámide. Puesto que $V_{PABLK} = V_{PDCLK}$ (estas pirámides poseen una misma altura PH e iguales bases $ABLK$ y $DCLK$) y, por las mismas razones, $V_{SABLK} = V_{SDCLK}$, $V_{SAPK} = V_{SDPK}$, $V_{SBPL} = V_{SCPL}$, por lo tanto, $V_{SAPB} = V_{SDCP}$. Sin embargo, de la igualdad de los volúmenes de las pirámides $SABP$ y $SDCP$ en virtud de la igualdad de $\triangle ABP = \triangle DCP$ (por los tres lados) se deduce la igualdad de las alturas bajadas desde el punto S a las caras ABP y DCP respectivamente. Así, LPK es el plano bisectral y la altura PH se encuentra en este plano.

De este modo, el centro de la esfera inscrita (designémoslo con la letra O) se halla realmente en la altura PH de la pirámide.

Examinemos ahora el triángulo isósceles LPK. En éste está inscrito el círculo mayor de nuestra esfera, puesto que dicho plano pasa por el centro de la esfera. (De lo anteriormente expuesto se deduce que la esfera es tangente a la pirámide en el punto H y en los puntos M y N dispuestos en las apotemas PL y PK). El problema se reduce, de tal manera, a un problema planimétrico: hallar el radio del círculo inscrito en el triángulo isósceles LPK con el ángulo α de la base LK, la que es la altura del trapecio isósceles $ABCD$ con ángulo agudo φ y lado lateral l, y por eso tiene la longitud $l \operatorname{sen} \varphi$.

Como el centro del círculo inscrito se sitúa en el punto de intersección de las bisectrices, $\angle OKH = \alpha/2$ por lo tanto el radio buscado

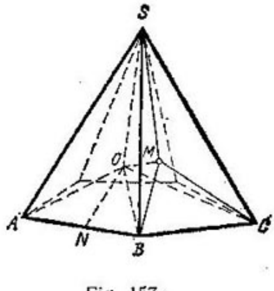


Fig. 157

$$r = OH = KH \operatorname{tg}(\alpha/2) = 1/2\ l\ \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg}(\alpha/2).$$

En adición a la solución ilustrada hagamos una observación. Prestemos atención a que en los datos del problema no se dan las bases del trapecio. Sin embargo, esto no significa que las longitudes de las bases pueden ser cualesquiera. Desde luego, los puntos de la recta PH equidistan de los planos APD y BPC; precisamente del mismo modo equidistan de los planos APB y CPD. Pero de ninguna manera con cualesquier dimensiones de las bases del trapecio la distancia entre el punto en la recta PH y el plano APD es igual a la distancia entre el mismo punto y el plano APB. En otras palabras, no con cualesquiera longitudes de las bases AD y BC puede encontrarse en la altura PH un punto que equidiste de las cinco caras de la pirámide. Si hubiera deseo, se podría determinar (utilizando el hecho de que existe la esfera inscrita, es decir, suponiendo que tal punto existe) las dimensiones del trapecio que se sitúa en la base.

Ahora pasemos a un caso en que la esfera *está circunscrita* a la pirámide.

Definición. *Una esfera se denomina circunscrita a una pirámide (cualquiera), si todos los vértices de la pirámide se encuentran en la superficie de la esfera.*

Así pues, el centro O de la esfera circunscrita (fig. 157) es un punto que equidista de todos los vértices de la pirámide. Esto significa que, en caso de unir el centro de la esfera circunscrita con los vértices S, A, B, C, ... de la pirámide, todos los segmentos OS, OA, OB, OC, ... tendrán una misma longitud.

Señalemos lo siguiente. Si desde el centro O de la esfera circunscrita se baja la perpendicular OM a la cara BSC, el centro de la circunferencia circunscrita a esta cara será la base de esta perpendicular. En efecto, $MS = MB = MC$ como proyecciones de oblicuas iguales OS, OB y OC en el plano BSC. (Repitiendo este argumento para la base de la pirámide, es fácil convencerse de que puede circunscribirse una circunferencia al polígono de la base.) De este modo, si a una pirámide está circunscrita una esfera, el centro de ésta se encuentra en la intersección de las perpendiculares trazadas a cada una de las caras de la pirámide en el centro del círculo circunscrito a esta cara. Señalemos también que en caso de bajar una perpendicular desde el punto O a alguna arista, digamos AB, la base N de dicha perpendicular será el punto medio de la arista AB.

Teorema. *Si una esfera está circunscrita a una pirámide, el centro de la esfera es el punto de intersección de todos los planos trazados por los puntos medios de las aristas de la pirámide perpendicularmente a dichas aristas.*

En efecto, cualquier punto que equidiste de dos vértices de la pirámide adyacentes a una arista, se encuentra en un plano trazado perpendicularmente a esta arista de la pirámide por su punto medio (véase § 2, Parte III). Por esta razón el centro de la esfera circunscrita, equidistando de todos los vértices de la pirámide, debe estar en cada uno de tales planos, es decir, éste es el punto de intersección de todos estos planos [1].

Hay muchos casos en que los estudiantes, al trazar un dibujo, colocan el centro de la esfera circunscrita al azar, sin tener una idea clara de la figura espacial dada y, aun más, sin practicar algunos razonamientos acerca de la posición de este centro. En este caso, como regla general, el centro se sitúa dentro de la pirámide. Entre tanto, el centro de la esfera circunscrita puede encontrarse tanto dentro de la pirámide, como fuera o en la superficie de ésta (en dependencia del tipo de pirámide). Por ejemplo, en el problema que sigue resulta que el centro de la esfera circunscrita se encuentra fuera de la pirámide, lo que se deduce fácilmente de los cálculos realizados en el proceso de la resolución.

2. *En una pirámide de base triangular $SABC$, la arista BC es igual a a, $AB = AC$, la arista SA es perpendicular a la base ABC de la pirámide, el ángulo diedro de la arista SA es igual a 2α y de la arista BC es igual a β. Hallar el radio de la esfera circunscrita.*

Analicemos la pirámide $SABC$ de que se trata en los datos del problema (fig. 158). Por ser la arista SA perpendicular al plano de la base, $\angle BAS = \angle CAS = 90°$ y por eso el ángulo BAC es precisamente el ángulo lineal del ángulo diedro de la arista SA. De este modo, la base de la pirámide tiene la forma de un triángulo isósceles con el ángulo

[1] No es posible circunscribir una esfera a cualquier pirámide. No es difícil hallar un ejemplo con tal pirámide de base cuadrangular a la que es imposible circunscribir una esfera. Proponemos al lector mismo demostrar que *puede circunscribirse una esfera a una pirámide si es posible circunscribir una circunferencia al polígono que sirve de base a la pirámide*. De aquí se deduce, por ejemplo, que: 1) *puede circunscribirse una esfera a una pirámide de base triangular*, 2) *puede circunscribirse una esfera a una pirámide regular de base n-angular.*

2α del vértice, y la altura de la pirámide coincide con la arista SA.

Como las proyecciones de las aristas laterales SB y SC sobre el plano de la base son iguales, son también iguales las aristas. Por esto la cara BSC es un triángulo isósceles, y su altura bajada desde el vértice S incide en el punto medio K de la arista BC. Según el teorema de las tres perpendiculares, AK es la altura del triángulo BAC. De aquí se deduce que el ángulo SKA es lineal del ángulo diedro a la arista BC, es decir, $\angle SKA = \beta$.

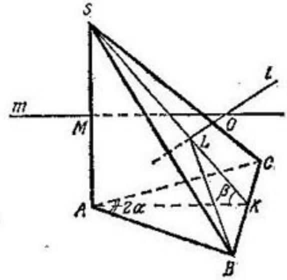


Fig. 158

El centro de la esfera circunscrita se sitúa en la intersección de la recta l, que pasa por el centro del círculo circunscrito al triángulo BSC, con el plano que pasa por el punto medio de la arista AS perpendicularmente a ésta. La recta l se sitúa en el plano ASK: en efecto, el plano BSC pasa por la recta BC que es perpendicular al plano ASK, es decir, los planos BSC y ASK son perpendiculares; al mismo tiempo la recta l es perpendicular al plano BSC y pasa por la línea de su intersección, así es que se encuentra en el plano ASK.

Así, pues, el centro de la esfera se halla en el plano ASK. Tracemos este plano en un dibujo especial. En este caso el centro O de la esfera se encontrará en la intersección de la recta l y la recta m que es perpendicular a AS y pasa por su punto medio. Pero, en términos generales, pueden tener lugar tres posibilidades: las rectas l y m se intersecan dentro o fuera del triángulo ASK, o en su lado, y tendremos que analizar todas estas posibilidades (figs. 159, 160, 161). En lo ulterior, en el proceso de las argumentaciones demostraremos que dos de las posibilidades no son reales.

Nos interesa el radio R de la esfera circunscrita, es decir, la distancia entre el punto O (que es el punto de intersección de las perpendiculares m y l a los lados del ángulo KSA) y el punto S, vértice de este ángulo.

Ante todo, busquemos SL, la proyección de la distancia desconocida sobre el lado SK del triángulo KAS. Puesto que en el triángulo AKB (fig. 158) conocemos el cateto $BK = 1/2\ a$ y el ángulo $KAB = \alpha$, entonces $AK = 1/2\ a \operatorname{cotg} \alpha$. Luego, valiéndonos del triángulo KAS se obtiene:

$$SK = \frac{a \operatorname{cotg} \alpha}{2 \cos \beta}.$$

Como L es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo BSC, entonces $LS = LB$, y por eso, valiéndonos del triángulo BKL hallamos

$(SK - SL)^2 + KB^2 = SL^2$, es decir,

$$SL = \frac{a(\operatorname{cotg}^2 \alpha + \cos^2 \beta)}{4 \operatorname{cotg} \alpha \cos \beta}.$$

Después de tomar en consideración que los cálculos efectuados para el segmento SL no dependían en manera alguna de la disposición del centro O de la esfera circunscrita, volvámonos a las figs. 159, 160, 161. Designemos por N el punto de intersección de la recta m con el lado SK. Está absolutamente evidente que las rectas l y m se intersecan *fuera* del triángulo KAS si $SN < SL$ (fig. 160); pero si $SN > SL$, el punto O se encuentra dentro de dicho triángulo (fig. 159); finalmente, si $SN = SL$, el punto O se halla en el lado SK del triángulo (fig. 161). Aclaremos, cuál de las posiciones mencionadas tiene lugar en realidad.

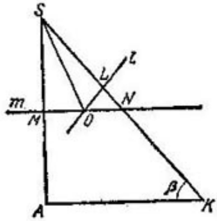


Fig. 159

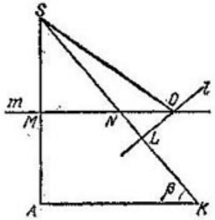


Fig. 160

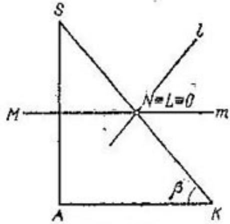


Fig. 161

Puesto que MN es la línea media del triángulo KAS, $SN = 1/2\ SK$. Comparando las longitudes de los segmentos SN y SL, demostraremos sin dificultad que con cualesquier a, α y β

$$\frac{a \operatorname{cotg} \alpha}{4 \cos \beta} < \frac{a(\operatorname{cotg}^2 \alpha + \cos^2 \beta)}{4 \operatorname{cotg} \alpha \cos \beta}$$

(de las consideraciones geométricas se deduce que $a > 0$, $0° < \alpha < 90°$ y $0° < \beta < 90°$). Por consiguiente, cualesquiera que sean las dimensiones a, α y β de la pirámide $SABC$, el centro O de la esfera circunscrita siempre se halla fuera de la pirámide. A su vez esto significa que la configuración plana dibujada aparte en el plano KAS puede tener sólo el aspecto que aparece en la fig. 160; las posiciones representadas en las figs. 159 y 161 no pueden tener lugar en la realidad.

Al examinar la fig. 160 es fácil demostrar que $\angle ONL = \beta$, y por eso $LO = NL \operatorname{tg} \beta = (SL - SN) \operatorname{tg} \beta$. Sustituyendo aquí las expresiones obtenidas arriba para SL y SN, obtenemos después de los cálculos necesarios que $LO = 1/4\ a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \beta$. Por último, valiéndonos del triángulo rectángulo OLS se halla que

$$R = \sqrt{LO^2 + SL^2} = \frac{a}{2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos \beta} \sqrt{\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta \cos^4 \alpha}.$$

Como podemos ver, los cálculos efectuados en el problema fueron muy simples, la dificultad principal radica en los razonamientos que determinan la disposición del centro de la esfera circunscrita.

Si los estudiantes tienen una idea clara acerca de las combinaciones de la pirámide con la esfera inscrita o circunscrita, en cuanto a la disposición recíproca de la pirámide y de la esfera surgen dificultades a veces insuperables. Los hechos demuestran que hay pocos aquéllos que puedan imaginar correctamente la configuración espacial, digamos, en el caso de una esfera que es tangente a todas las aristas de una pirámide de base triangular; de una esfera que es tangente a la base y pasa por el vértice; de una esfera que es tangente a dos aristas que se cruzan de una pirámide de base triangular, etc. En todos estos casos "el centro de gravedad" del problema radica siempre en la determina-

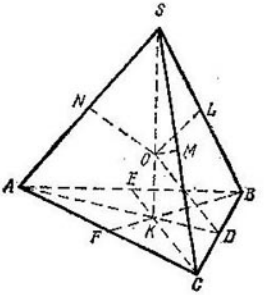


Fig. 162

ción de las propiedades recíprocas del centro de la esfera y de los elementos de la pirámide, que son necesarias para los cálculos.

Es imposible examinar y analizar todas las disposiciones recíprocas posibles de la esfera y la pirámide. Por eso, nos limitamos sólo a dos ejemplos.

3. *Una esfera de radio r es tangente a todas las aristas de una pirámide de base triangular. El centro de la esfera se sitúa dentro de la pirámide, en su altura, a la distancia $r\sqrt{3}$ del vértice. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar la altura de la pirámide.*

Supongamos que M, N y L son los puntos de tangencia de la esfera a las aristas laterales de la pirámide $SABC$, y D, E y F son los puntos de tangencia de la esfera con los lados de la base (fig. 162). Designemos con la letra O el centro de la esfera, que de acuerdo con los datos se halla en la altura SK de la pirámide.

Según la definición de las tangentes a la esfera, $ON \perp AS$, $OL \perp BS$, $OM \perp CS$; $ON = OM = OL = r$. De aquí se deduce que los triángulos rectángulos SNO, SLO y SMO son iguales y por esta razón $SN = SL = SM$ y $\angle NSO = \angle LSO = \angle MSO$.

La última igualdad para los ángulos nos permite resumir que los triángulos AKS, BKS y CKS son iguales; por consiguiente, $AS = BS = CS$, es decir, en la pirámide en cuestión son iguales todas las aristas laterales. Pero es lógico que esto es insuficiente para afirmar que la pirámide es regular.

La igualdad de las aristas laterales y la de los segmentos SN, SL y SM demuestran que $AN = BL = CM$. Aprovechemos ahora el hecho de que las tangentes a la esfera trazadas de un punto son iguales: $AN = AF = AE$; $BL = BE = BD$; $CM = CF = CD$. Por lo tanto, $AN = BL = CM = AF = AE = BE = BD = CF = CD$. De aquí se deduce que los puntos D, E y F son los puntos medios de las aristas de la base y $AB = BC = CA$, es decir, el triángulo ABC es regular. La igualdad de las aristas laterales de la pirámide implica la igualdad de sus proyecciones: $AK = BK = CK$, es decir, K es la base de la altura y el centro del triángulo regular ABC.

Con esto queda demostrado que la pirámide $SABC$ es regular. Calculemos la longitud de su altura SK.

Los triángulos rectángulos AKS y ONS que tienen un ángulo agudo común del vértice S, son semejantes, de donde $SK = AK \cdot NS/NO$. Con el fin de abreviar, designemos por h la longitud de la altura SK. Ya hemos indicado que $ON = r$. Valiéndonos del triángulo rectángulo SNO obtenemos que $NS = \sqrt{SO^2 - NO^2} = r\sqrt{2}$ y por eso $h = AK \cdot \sqrt{2}$ y nos queda por determinar una relación más entre h y AK.

Esta relación puede obtenerse valiéndonos del triángulo rectángulo OKD. En este triángulo $KD = 1/2\,AK$, $OD = r$ y $OK = h - r\sqrt{3}$; según el teorema de Pitágoras tenemos: $1/4\,AK^2 = r^2 - (h - r\sqrt{3})^2$. Sustituyendo en esta igualdad $AK = h/\sqrt{2}$ obtenemos una ecuación cuadrática respecto de h, que tiene dos raíces positivas:

$$h_1 = 4/3\,r\sqrt{3}, \quad h_2 = 4/9\,r\sqrt{3}.$$

Sin embargo, la segunda raíz no satisface a los datos del problema. En efecto, el centro de la esfera ha de estar *dentro* de la pirámide, en su altura, a la distancia $r\sqrt{3}$ del vértice. Esto significa que la altura de la pirámide ha de ser mayor que $r\sqrt{3}$, mientras que la segunda raíz h_2 es menor que $r\sqrt{3}$. La primera raíz h_1 nos da la altura de la pirámide: $h = 4/3\,r\sqrt{3}$.

Señalemos que también en este caso hemos pasado sin trazar la esfera en el dibujo. Sólo hay que imaginarse bien que la esfera que se analiza en el problema "excede" de los límites de la pirámide, intersecándose con las aristas de ésta (hay estudiantes que tratan de dibujar la esfera tangente a las caras de la pirámide).

4. *Se da la pirámide regular $SABC$ de base triangular (S es su vértice) cuyo lado de la base es a y la arista lateral $a\sqrt{2}$. La esfera pasa por*

el punto A y es tangente a las aristas laterales SB y SC en sus puntos medios. Hallar el radio de la esfera.

En este problema, la tentativa de imaginarse toda la configuración tampoco facilita la resolución del problema; el propio hecho de la tangencia, es el único que debe utilizarse.

El problema se resuelve más fácilmente con la ayuda del teorema planimétrico: el cuadrado de la tangente a la circunferencia es igual al producto de la secante por la parte exterior de ésta.

Sabiendo que la esfera es tangente a la arista SC en su punto medio y que pasa por el vértice A, encontramos dos puntos más, en que la esfera interseca a las aristas AC y AS (fig. 163). En efecto, el plano ACS interseca la esfera formando una circunferencia que es tangente a la recta CS (en el punto medio de CS) y pasa por el punto A; aplicando el teorema recién enunciado encontramos que esta circunferencia interseca la arista AC en su punto medio K, y la arista AS en un punto E tal que $SE = 1/4\ a\sqrt{2}$.

Razonamientos análogos respecto al plano ABS nos permiten hallar dos puntos más de la intersección de la esfera con las aristas AB

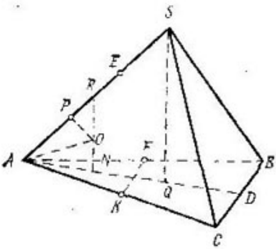


Fig. 163

y AS: F que es el punto medio de la arista AB y el mismo punto E en la arista AS. Ahora puede hallarse el radio de la esfera utilizando sólo los puntos A, K, F y E.

Puesto que la esfera pasa por los puntos A, K y F, el centro de la esfera se sitúa en la perpendicular al plano AKF trazada desde el centro del triángulo AKF. Como el punto N (centro del $\triangle AKF$) está en la mediana AD del triángulo ABC, siendo $AN = 2/3(AD/2) = 1/3\,AD$, en este caso el centro de la esfera se sitúa en el plano ADS, ya que en éste, como se sabe, se encuentra también la altura SQ de la pirámide. Como $AQ = 2/3\ AD$, $AN = NQ$, por consiguiente, el centro de la esfera se encuentra en la línea media NR del triángulo ASQ.

Pero el centro de la esfera está también en el plano perpendicular a AE, que pasa por P, el punto medio de AE. Esto significa que el centro de la esfera se encuentra en la recta situada en el plano ASD

que es perpendicular a la arista AS y que pasa por el punto P. Así, el centro de la esfera se sitúa en el plano ASQ, en la intersección de las rectas siguientes: de la línea media del $\triangle ASQ$ y de la perpendicular al segmento AE en su punto medio.

Pasemos a los cálculos:

$$R = AO = \sqrt{AP^2 + PO^2}.$$

Como $AP = 1/2\, AE = 1/2(AS - ES) = 3/8\, a\sqrt{2}$, falta hallar PO. De la semejanza de los triángulos RPO y RAN se deduce que $PO = RP \cdot AN/RN$. Puesto que $RP = AR - AP = 1/8\, a\sqrt{2}$, $AN = 1/3 AD = 1/6\, a\sqrt{3}$, $RN = 1/2\, SQ = a\sqrt{15}/6$, entonces $PO = a\sqrt{10}/40$. De aquí resulta que $R = a\sqrt{115}/20$.

En lo que se refiere a las combinaciones de otros cuerpos geométricos, aquí ofrecemos todas las definiciones correspondientes que no siempre se dan en los manuales escolares, pero son indispensables para los estudiantes de la escuela superior. No es necesario aprender de memoria estas definiciones; sólo es conveniente comprender bien el cuadro geométrico de cada configuración de los cuerpos. Recomendamos al lector que trace los dibujos y demuestre los conceptos adicionales que se dan después de las definiciones.

Una esfera está inscrita en un prisma si es tangente a todas las caras del prisma. Si el prisma es recto, la proyección ortogonal de la esfera sobre el plano de la base del prisma será un círculo inscrito en el polígono, base del prisma; el concepto no es válido para un prisma oblicuo. En cualquier caso la altura del prisma es igual al diámetro de la esfera.

Una esfera está inscrita en un cono circular recto si es tangente tanto a la base del cono como a su superficie lateral. El centro de la base es el punto de tangencia de la esfera con la base, mientras que la tangencia con la superficie lateral tiene lugar por cierta circunferencia (no es la circunferencia del círculo mayor), cuyo plano es paralelo al plano de la base. El centro de la esfera se halla en la altura del cono.

Una esfera está inscrita en un cilindro circular recto si es tangente tanto a las bases del cilindro como a su superficie lateral. Los puntos de tangencia de la esfera a las bases son los centros de las bases, y la tangencia con la superficie lateral pasa por la circunferencia del círculo mayor de la esfera que es paralelo a las bases. El centro de la esfera se encuentra en el eje del cilindro; el diámetro de la base del cilindro es igual al diámetro de la esfera y a la altura del cilindro.

Una esfera está inscrita en una pirámide truncada (en un cono circular recto truncado) si es tangente a las bases y a la superficie lateral. El diámetro de la esfera es igual a la altura de la pirámide truncada (del cono truncado)

Un cilindro circular recto está inscrito en un prisma si su superficie lateral es tangente a las caras laterales del prisma, mientras que las bases *son círculos inscritos en polígonos que son las bases del prisma.* Si un cilindro circular recto está inscrito en un prisma, el prisma es recto. Las líneas por las cuales la superficie lateral del cilindro es tangente a las caras laterales del prisma son rectas y perpendiculares a las bases del prisma.

Un cilindro circular recto está inscrito en una pirámide si la circunferencia de una de sus bases es tangente a todas las caras laterales de la pirámide, y la otra base se encuentra en la base de la pirámide. Señalemos que la pirámide no es obligatoriamente regular. Si el cilindro está inscrito en la pirámide, en este caso, primero, la base de la altura de la pirámide se halla dentro (o en los lados) del polígono dispuesto en la base de la pirámide y, segundo, la base de la pirámide es el polígono en que puede inscribirse una circunferencia (sin embargo, la base del cilindro situada en la base de la pirámide no es un círculo inscrito en la base de la pirámide).

Un cilindro circular recto está inscrito en un cono circular recto si la circunferencia de una de las bases del cilindro se encuentra en la superficie lateral del cono y la otra base del cilindro se halla en la base del cono. El eje del cilindro se sitúa en la altura del cono. En cada cono puede inscribirse una cantidad infinita de cilindros

Un cilindro circular recto está inscrito en una esfera si las circunferencias de sus bases se disponen en la superficie de la esfera. Las bases del cilindro son los círculos menores de la esfera; el centro de la esfera coincide con el punto medio del eje del cilindro.

Un cono recto circular está inscrito en un prisma si su vértice se halla en la base superior del prisma y si su base es un círculo inscrito en un polígono que es la base inferior del prisma. Si en un prisma está inscrito un cono, en este caso, primero las bases del prisma son polígonos en que puede inscribirse una circunferencia y, segundo, la recta que es perpendicular a la base inferior y pasa por el centro del círculo inscrito en el polígono, que es la base inferior, interseca la base superior (y no su prolongación). La altura del cono es igual a la del prisma.

Un cono circular recto está inscrito en una pirámide si el vértice del cono coincide con el vértice de la pirámide, mientras que la base de la pirámide es un polígono circunscrito a la circunferencia de la base del cono. Si el cono está inscrito en la pirámide, primero, su base es un polígono en el que puede inscribirse una circunferencia y, segundo, la altura de la pirámide pasa por el centro de esta circunferencia. Las alturas de la pirámide y del cono coinciden.

Un cono circular recto está inscrito en una esfera si su vértice y la circunferencia de su base se encuentran en la esfera. La base del cono es el círculo menor (o mayor) de la esfera; el centro de la esfera se sitúa en la altura del cono.

Una pirámide está inscrita en un cono si el vértice de la pirámide coincide con el vértice del cono, mientras que la base de la pirámide es un polígono inscrito en la circunferencia de la base del cono. Las alturas de la pirámide y del cono coinciden; las aristas laterales de la pirámide se encuentran en la superficie lateral del cono.

Un prisma está inscrito en un cono circular recto si todos los vértices de la base superior del prisma se hallan en la superficie lateral del cono, mientras que la base inferior del prisma se encuentra en la base del cono. La base del prisma es un polígono a que puede circunscribirse una circunferencia (pero la base inferior del prisma no está inscrita en la circunferencia de la base del cono).

Un prisma está inscrito en un cilindro si sus bases son polígonos inscritos en las circunferencias de las bases del cilindro. La base del prisma es un polígono al que puede circunscribirse una circunferencia; el prisma es recto y su altura es igual a la altura del cilindro.

Un prisma está inscrito en una esfera si todos sus vértices se encuentran en la superficie esférica. El prisma es recto; su base es un polígono que puede inscribirse en la circunferencia.

5. *Se dan tres conos circulares rectos con el ángulo* α ($\alpha < 2\pi/3$) *en la sección axial y el radio de la base igual a* r. *Las bases de los conos se sitúan en un mismo plano y son tangentes en pares una a otra exteriormente. Hallar el radio de la esfera que es tangente a los tres conos y al plano que pasa por sus vértices.*

Se puede imaginar con bastante facilidad la configuración de los cuerpos de la que se trata en los datos del problema, pero es muy difícil dibujarla. Por otra parte, no es necesario dibujar "el aspecto general" de esta figura para la resolución del problema, es suficiente imaginarla. Si se describe este aspecto general, puede decirse que la esfera está colocada en un "embudo" entre tres conos iguales (que están en un

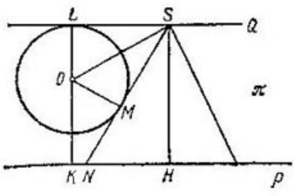


Fig. 164

mismo plano horizontal P de tal modo que sus bases son tangentes en pares una a otra exteriormente) y la dimensión de la esfera es tal que es tangente al "techo", es decir, al plano Q dispuesto en los tres vértices de los conos.

Sin embargo, antes de resolver el problema es preciso especificar el sentido de las palabras "la esfera está colocada en un "embudo" entre los conos", darles un sentido matemático estricto. Es evidente que la esfera tiene un solo punto común con la superficie lateral de cada uno de los conos o, como se dice, es tangente a la superficie lateral exteriormente. ¿Qué significa esto? Esto significa que al trazar un plano secante por la altura del cono y por el centro de la esfera, el círculo mayor obtenido en la sección de la esfera es tangente exteriormente al lado lateral del triángulo isósceles que es la sección del cono (fig. 164). En esto consiste *la definición* de la tangencia de la esfera, que está situada fuera del cono, a la superficie lateral del cono. En otros términos, si M es el punto de tangencia de la esfera al cono, ésta es tangente a la generatriz SMN del cono (de vértice S) en el punto M, y el radio OM de la esfera es perpendicular a dicha generatriz.

Supongamos ahora que la fig. 164 muestra la sección de uno de los conos de nuestra configuración, de la esfera y de los planos P y Q (los planos de las bases de los conos y los de sus vértices) por el plano π que pasa por la altura SH de este cono y el centro O de la esfera (los dos conos restantes no están representados). El hecho de que el plano secante π será perpendicular a los planos paralelos P y Q se deduce de que el primero pasa por la altura SH del cono, la que es perpendicular al plano P de su base y, por lo tanto, perpendicular al plano Q.

Sea M el punto de tangencia de la esfera y del cono; en este caso, en virtud de lo expuesto anteriormente, el círculo mayor formado en la sección de la esfera por el plano π es tangente a la generatriz NS del cono en el punto M. No obstante, el hecho de que el mismo círculo es tangente a la recta en la que se intersecan los planos π y Q, requiere una demostración especial.

Designemos por L el punto de tangencia de la esfera al plano Q. Cualquier recta en el plano Q que pase por el punto L, y en particular, la recta LS, será tangente a la esfera, es decir, será perpendicular al radio OL; por eso $OL \perp LS$. Puesto que el radio OL de la esfera trazado al punto de tangencia es perpendicular al plano Q y, por consi-

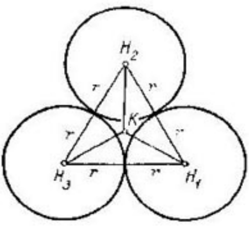


Fig. 165

guiente, $OL \parallel SH$ como dos perpendiculares a un mismo plano Q. Sin embargo, dos rectas paralelas se encuentran en un mismo plano, de lo que se deduce que el radio OL se halla en el plano π que pasa por SH y el punto O. Es decir, el punto L de tangencia de la esfera al plano Q se sitúa en el plano π. Esto significa a su vez que la recta LS es la línea de intersección de los planos π y Q y es tangente al círculo mayor formado en la sección de la esfera por el plano π. En efecto, la recta LS pasa por el extremo del radio OL de este círculo mayor perpendicularmente a OL.

Prolonguemos el segmento LO hasta la intersección con la recta NH en el punto K. Es evidente que $LSHK$ es un rectángulo, de donde se deduce, en particular, que $\angle LSH = 90°$ y $KH = LS$. Como $\angle NSH = \alpha/2$ según los datos, en este caso, uniendo los puntos O y S, hallaremos sin dificultad que $\angle OSM = (\pi - \alpha)/4$ y por eso, valiéndonos del triángulo OSM,

$$SM = R \operatorname{cotg} \frac{\pi-\alpha}{4},$$

donde R es el radio buscado de la esfera. Si se toma en cuenta que $LS = SM$ (como dos tangentes trazadas desde un punto a una misma circunferencia), obtendremos que

$$KH = R \operatorname{cotg} \frac{\pi-\alpha}{4}.$$

De aquí se deduce que la distancia entre la proyección K del centro O de la esfera sobre el plano P y el centro del cono no depende de cuál de los tres conos dados está en consideración. Esto es, el punto K equidista de los tres centros de las bases de los conos y por eso KH puede hallarse fácilmente (fig. 165) como el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo regular, cuyo lado es $2r$ y, precisamente, $KH = 2r/\sqrt{3}$. Ahora tenemos que

$$R = \frac{2r}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi-\alpha}{4}\ ^{1)}.$$

EJERCICIOS:

1. En una esfera de radio R está inscrito un cono circular recto. Hallar la superficie lateral del cono si su altura es igual a h.

2. El lado de un tetraedro regular es igual a a. Determinar el radio de la esfera que es tangente a las caras laterales del tetraedro en los puntos que se encuentran en los lados de la base.

---

[1] Señalemos en adición a la solución cumplida que el ángulo α en la sección axial del cono satisface siempre a las desigualdades $0 < \alpha < \pi$ y, por lo visto, la fórmula obtenida para el radio de la esfera tiene sentido con todas estas α. Sin embargo, esto no significa que con cualquier α existe la configuración geométrica de que se trata en el problema: es fácil comprender que si el ángulo α es grande, es decir, los conos son anchos y bajos, el radio de la esfera que es tangente a su esfera será mayor, y la esfera pasará por encima del plano que pasa por los vértices de los conos. Para la existencia de la esfera con propiedades requeridas es, evidentemente, necesario y suficiente que el punto de intersección de la bisectriz SO y la recta KL se proyecte sobre la generatriz del cono y no sobre su prolongación, o sea, que se cumpla la desigualdad $SM < l$ ó, lo que es lo mismo, $2r/\sqrt{3} < r$ cosec $(\alpha/2)$, de donde sen $(\alpha/2) < \sqrt{3}/2$, es decir, $\alpha < 2\pi/3$. Precisamente esta es la restricción que está impuesta para α por los datos del problema.

3. En un cono circular recto está inscrita una esfera. El radio del círculo de tangencia de la superficie de la esfera y de la superficie lateral del cono es igual a r. El radio de la base del cono es R. Determinar la superficie lateral de la esfera.

4. En un cono truncado, cuyo volumen es V, está inscrita una esfera que es tangente tanto a la superficie lateral como a las dos bases. El radio de la esfera es igual a R. ¿Qué ángulo forman la generatriz del cono y la base mayor?

5. En un cono circular recto está inscrita una esfera, cuya superficie es igual al área de la base del cono. ¿En qué relación se divide la superficie lateral del cono por la línea de tangencia de la esfera y del cono?

6. Una pirámide de base pentagonal está circunscrita a un cono circular recto, cuya altura es igual al radio de la base. La superficie total de la pirámide es dos veces mayor que la del cono. Hallar el volumen de la pirámide si la superficie lateral del cono es igual a $\pi\sqrt{2}$.

7. La base de la pirámide es un triángulo rectángulo; las caras laterales que pasan por los catetos forman con la base los ángulos de 30° y 60°. A la pirámide está circunscrito un cono circular recto. Determinar el volumen del cono si la altura de la pirámide es igual a h.

8. En una esfera está inscrito un cilindro circular recto. ¿Cuántas veces el volumen de la esfera es mayor que el del cilindro si se sabe que la relación del radio de la esfera al radio de la base del cilindro es dos veces menor que la relación de la superficie de la esfera a la superficie lateral del cilindro?

9. En una esfera de radio a está inscrito un tetraedro regular. Hallar el volumen del tetraedro.

10. En una pirámide regular de base triangular la relación entre los radios de las esferas circunscrita e inscrita es igual a 3. Hallar la relación entre el volumen de la pirámide y el de la esfera inscrita.

11. La base de una pirámide es un triángulo isósceles, cuyos lados laterales son iguales a b; las caras laterales que les corresponden son perpendiculares al plano de la base y forman entre sí el ángulo α. El ángulo entre la tercera cara lateral y el plano de la base es también α. Hallar el radio de la esfera inscrita en la pirámide.

12. Hallar el volumen de una pirámide regular de base triangular conociendo el radio r de la esfera inscrita en la pirámide y el ángulo de inclinación α de su cara lateral respecto a la base.

13. En un cono truncado, cuya generatriz tiene la longitud l y forma con la base el ángulo α, está inscrita una esfera. Determinar el radio del círculo, por el cual la esfera es tangente al cono truncado.

14. En un sector esférico está inscrita una esfera. El radio de la circunferencia por la que la esfera es tangente al sector es igual a r. El plano diametral del sector esférico corta de éste un sector circular con el ángulo central 2φ. Determinar el radio del sector esférico.

15. La arista de un cubo es a. Una esfera con el centro O interseca tres aristas (que concurren en el vértice A) en sus puntos medios. Desde el punto B de la intersección de la esfera con una de las aristas del cubo se ha bajado una perpendicular a la diagonal del cubo que pasa por el vértice A, de modo que el ángulo entre la perpendicular y el radio OB se divide por la arista del cubo en dos partes iguales. Hallar el radio de la esfera.

16. En un cono se han colocado cinco esferas iguales. Cuatro de éstas se encuentran en la base del cono de modo que cada una de las cuatro esferas es tangente a otras dos, dispuestas en la base, y a la superficie lateral del cono. La quinta esfera es tangente a la superficie lateral y a las otras cuatro esferas. Determinar el volumen del cono si se conoce que el radio de cada esfera es igual a R.

17. Dos esferas iguales de radio r son tangentes una a otra y a las caras de un ángulo diedro igual a α. Hallar el radio de la esfera que es tangente a las caras del ángulo diedro y a las dos esferas dadas.

18. La altura de un cono es 4 veces mayor que el radio de la esfera inscrita en el cono. La generatriz del cono es l. Hallar la superficie lateral del cono y el radio de la esfera circunscrita al cono.

19. La superficie lateral de una pirámide regular de base triangular con el lado de la base a es 5 veces mayor que la superficie de la base. Hallar el volumen del cono inscrito en la pirámide.

20. Una esfera de radio r es tangente a todas las aristas de una pirámide regular de base cuadrangular cuyo lado de la base es a. Encontrar el volumen de la pirámide.

21. En un cubo, cuya arista es a, está inscrita una esfera. Determinar el radio de otra esfera que es tangente a tres caras del cubo y a la primera esfera.

22. En la pirámide $SABC$ (S es el vértice, ABC es la base) se da: $AB = AC = a$, $BC = b$; la altura de la pirámide pasa por el punto medio de la altura AD de la base; el ángulo diedro τ formado por las caras SBC y ABC es igual a $\pi/4$. Un cilindro, cuya altura es igual al diámetro de la base, está inscrito en la pirámide de tal manera que una de sus bases es tangente a las caras del ángulo diedro τ, mientras que la otra lo es a las caras del ángulo triedro A, y el eje del cilindro es paralelo a AD. Hallar el radio de la base del cilindro.

23. La arista de un cubo es a. Hallar el volumen de un cilindro circular recto inscrito en el cubo de tal modo que su eje es la diagonal l del cubo, y las circunferencias de las bases son tangentes a aquellas diagonales de las caras del cubo que no tienen puntos comunes con la diagonal l del cubo.

24. En la base de un cono circular recto se hallan tres esferas de radio r. En éstas se ha colocado una cuarta esfera del mismo radio. Cada una de las cuatro esferas es tengente a la superficie lateral del cono y a las otras tres esferas. Encontrar la altura del cono.

25. Tres esferas de radio r están situadas en la base inferior de un prisma regular triangular, cada una de las cuales es tangente a otras dos y a dos caras laterares del prisma. En las esferas se ha situado una cuarta esfera que es tangente a todas las caras laterales y a la base superior del prisma. Determinar la altura del prisma.

26. Cuatro esferas iguales de radio r son tangentes exteriormente una a otra, de manera que cada una es tangente a las otras tres. Hallar el radio de la esfera que es tangente a las cuatro esferas y que las contiene en su interior.

27. En un cono circular recto está inscrita una esfera. La relación entre los volúmenes del cono y de la esfera es igual a dos. Hallar la relación entre la superficie total del cono y la de la esfera.

28. En una pirámide regular de base triangular la altura es h y el lado de la base es a. Uno de los vértices de la base es el centro de la esfera que es tangente a la cara opuesta de la pirámide. Hallar el área de aquellas partes de las caras la terales de la pirámide que se encuentran en el interior de la esfera.

29. Se da la pirámide regular de base triangular $SABC$ (S es el vértice) con el lado de la base a y la arista lateral b ($b > a$). La esfera se sitúa sobre el plano de la base ABC, es tangente a este plano en el punto A y, además, es tangente a la arista lateral SB. Hallar el radio de la esfera.

30. Se da la pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ (S es el vértice) con el lado de la base a y la arista lateral a. La esfera con el centro en el punto O pasa por el punto 4 y es tangente a las aristas SB y SD en sus puntos medios. Hallar el volumen de la pirámide $OSCD$.

PARTE IV

PROBLEMAS "NO TÍPICOS"

Todos los problemas examinados en las partes precedentes prácticamente tienen un aspecto común, "escolar", y sus soluciones se hallan por medio de los métodos habituales y con ayuda de los razonamientos corrientes. Sin embargo, se encuentran a menudo problemas de otro tipo. En particular, esto se refiere a las universidades y centros de enseñanza superior, donde las Matemáticas gozan de gran importancia. Para abreviar, a estos problemas les denominamos "no típicos".

Estos últimos llegan a ser de diferentes tipos. Algunos de ellos tienen un aspecto singular, debido a que, al principio, no está del todo claro cómo resolverlos. También se encuentran otros, enmascarados: por su aspecto exterior, por ejemplo, parecen a una ecuación acostumbrada, sin embargo los métodos ordinarios no sirven para resolverla. Con el fin de hallar la solución de los terceros, hace falta un razonamiento lógico muy fino y exacto. En cuarto lugar . . ., en general, se pueden enumerar muchas particularidades de toda especie de estos problemas "no típicos" y es poco probable que todas puedan citarse.

Estos problemas "no típicos", no comunes, exigen una comprensión definida y un buen dominio de las distintas partes de las Matemáticas y una cultura lógica amplia. Aparte de esto es necesario tener cierta preparación psicológica. ¡Cuántas veces sucede que un problema, el cual, en realidad, no es difícil, sin embargo, se expone de tal modo que motiva dificultades insuperables! Mientras que su solución sólo requiere pocas palabras.

Sin duda, es imposible señalar todos los métodos para resolver los problemas "no típicos". Aquí es necesario utilizar las gráficas, unas u otras propiedades de las funciones y las desigualdades. En resumen, para resolver estos problemas *la lógica* es lo fundamental, por su importancia.

Conviene poner de manifiesto, muy en particular, que estos problemas y los métodos "no típicos" de su solución no salen, de ningún modo, de los límites del programa de las escuelas secundarias. Lo más probable su "originalidad" no consista en la complejidad sino en la singularidad. No obstante, nosotros abrigamos esperanzas en que los métodos "no típicos" aplicados más abajo para resolver los problemas "no típicos", después de ser estudiados atentamente por el lector, se conviertan en típicos y lleguen a ser los métodos corrientes de resolución.

Aquí se analizan, detalladamente, las resoluciones de algunos problemas "no típicos", y se dan, en muchos casos, varias resoluciones con diferentes interpretaciones de los problemas. Señalemos a la vez que estas resoluciones no son complejas por su propia naturaleza y que no son difíciles de comprender. Es más complicado hallar, independientemente, aquellas resoluciones. Por lo tanto, se recomienda resolver cada uno de los problemas antes de ver su solución.

Además, para estos problemas es recomendable distinguir con claridad: una solución "en borrador" y una "en limpio". Al comenzar a resolver un problema, todos los cálculos y razonamientos se realizan a ciegas y en ausencia del método determinado, sin conocer aún cúales de éstos son en realidad necesarios, y cúales serán más tarde innecesarios. De ese modo se obtiene, por último, la solución "en borrador". Esta solución, como regla, contiene pasos lógicos que no son del todo claros, formulaciones inexactas y muchas afirmaciones de sobra. Sin embargo, no representa ningún interés el modo de obtención de las afirmaciones finales. Es necesario que el problema sea resuelto y que la solución sea argumentada con bastante exactitud, es decir, se necesita la solución "en limpio". Esta última no debe, desde luego, copiar exactamente todo el curso de la solución "en borrador". ¿Con qué fin ha de repetirse el camino recorrido a ciegas? Es por esto que la solución "en borrador" obtenida hace falta redactarla en forma más adecuada.

En una serie de ejemplos a examinar más adelante se dan ambas soluciones. No obstante, en la mayoría de los casos se muestran solamente las soluciones "en borrador", presentando al lector la posibilidad de resolver un ejercicio, provechoso en exceso, para pasarlas "en limpio".

§ 1. PROBLEMAS "NO TÍPICOS" POR SU ASPECTO EXTERIOR

Para entender cuáles problemas pueden considerarse como "no típicos por su aspecto", es suficiente ver los datos de los problemas que se analizan más abajo. Es evidente que en estos problemas las transformaciones habituales, fórmulas algebraicas o trinogométricas, no conducen a la solución si al mismo tiempo no se aplican razonamientos de otro género.

Estos razonamientos, como regla, están vinculados con desigualdades, gráficas y, en general, con las diferentes propiedades de las funciones.

1. *Resolver la ecuación* $2 \operatorname{sen} x = 5x^2 + 2x + 3$.

Para encontrar un método de resolver esta ecuación, examinemos el comportamiento de las gráficas de su primer y segundo miembros. Si estas gráficas se intersecan, las abcisas de los puntos de intersección serán las raíces de la ecuación dada; en caso contrario, la ecuación no tiene raíces. La fig. 166 muestra que la ecuación no tiene raíces.

Con esto termina la solución "en borrador". Sin embargo, esta solución no puede considerarse como la solución "en limpio", ya que la gráfica no es la demostración. Por eso hace falta cerciorarse de que esta ecuación no tiene raíces. Sin duda alguna, nuestro razonamiento gráfico no es inútil, al contrario, para hallar la demostración estricta aprovecharemos ese razonamiento.

Para esto es necesario tener una idea clara de las propiedades de las gráficas gracias a las cuales es evidente que estas últimas no se intersecan. Esto se deduce de que la gráfica de la función $y = 5x^2 + 2x + 3$ en todos los puntos se encuentra *por encima* de la gráfica

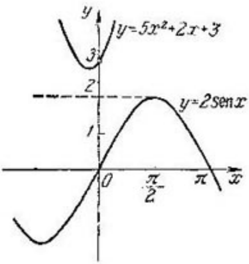


Fig. 166

de la función $y = 2 \operatorname{sen} x$. Esto significa, traduciéndolo del lenguaje geométrico al algebraico, que para cualquier valor de x se satisface la desigualdad

$$5x^2 + 2x + 3 > 2 \operatorname{sen} x.$$

Precisamente, vamos a demostrar esta desigualdad a continuación. En efecto, por un lado, para cualquier x

$$5x^2 + 2x + 3 = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{14}{5} \geqslant \frac{14}{5} > 2,$$

y por otro lado, $2 \operatorname{sen} x \leqslant 2$ también para cualquier x y por esto, en el caso de cualquier x tiene lugar la desigualdad a demostrar.

Empero, ahora, cuando se tiene la resolución estricta, o sea, la demostración exacta de que la ecuación no posee raíces, ¿para qué mencionar todos los razonamientos precedentes? Estos últimos han cumplido con su cometido, es decir, han ayudado a encontrar la demostración estricta. Por lo tanto, la solución "en limpio" puede ser, por ejemplo, la siguiente:

"La ecuación dada no tiene raíces: en realidad, para cualquier valor de x tienen lugar las desigualdades

$$5x^2+2x+3=5\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{5}\geqslant\frac{14}{5}>2 \quad \text{y} \quad 2\geqslant 2\operatorname{sen} x,$$

es decir, $5x^2+2x+3>2\operatorname{sen} x$, lo que hace falta demostrar".

En esta solución está oculto el hecho de que al principio hemos utilizado razonamientos no estrictos — el problema ha sido resuelto con ayuda de las gráficas.

2. *Resolver la ecuación* $\operatorname{sen} x=x^2+x+1$.

Ante todo, deben trazarse las gráficas de ambos miembros de la ecuación (fig. 167). Otra vez, en la figura las gráficas no se intersecan, y por consiguiente, la ecuación no tiene raíces. Sin embargo, esta demostración no puede ser utilizada, ya que en este caso la parábola se sitúa por debajo de la recta $y=1$.

No obstante, aquí la gráfica muestra cómo buscar la demostración exacta. De las propiedades del trinomio cuadrático se deduce que para $x>0$ y para $x<-1$ se cumple la desigualdad $x^2+x+1>1$, ya

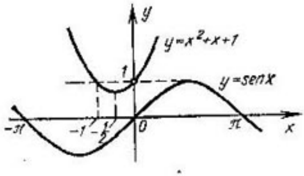


Fig. 167

que para todo valor de x tiene lugar la desigualdad $x^2+x+1>\operatorname{sen} x$. Y en el intervalo restante $-1\leqslant x\leqslant 0$ son válidas las desigualdades $x^2+x+1>0$ y $\operatorname{sen} x\leqslant 0$, así que en este intervalo la ecuación tampoco tiene raíces.

A veces, no es necesario trazar gráficas para resolver estas ecuaciones. Además, la construcción de estas gráficas puede resultar muy complicada. En realidad, al resolverlas conviene utilizar no sólo gráficas sino distintas desigualdades, mientras que las gráficas muestran solamente los caminos de la demostración. En los casos más complejos hay que buscar formalmente la demostración sin tener una representación de la figura geométrica, lo que es un poco más complejo.

3. *Resolver la ecuación*

$$2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2^x+2^{-x}.$$

Es evidente que es mejor no intentar trazar la gráfica del primer miembro. En este caso hay que cifrar todas las esperanzas en las desigualdades. Por un lado, para cualquier x tiene lugar la desigualdad $2\cos^2\frac{x^2+x}{6}\leqslant 2$ y, por otro, $2^x+2^{-x}\geqslant 2$, que es una suma de magnitudes positivas recíprocamente inversas. Por lo tanto, los miembros primero y segundo de la ecuación inicial pueden igualarse entre sí cuando y sólo cuando ambos son iguales a 2.

En otras palabras, debe satisfacerse el sistema de *dos* ecuaciones con *una* incógnita

$$\begin{cases} 2\cos^2\dfrac{x^2+x}{6}=2,\\ 2^x+2^{-x}=2.\end{cases}$$

La segunda ecuación de este sistema tiene la raíz única $x=0$. Esta raíz satisface también a la primera ecuación, es decir, es la solución única del sistema, y junto con él, de la ecuación inicial.

Los problemas siguientes, gracias a la utilización de las propiedades de las funciones trigonométricas, también se reducen a los sistemas de dos ecuaciones con una incógnita.

4. *Resolver la ecuación* $\cos^7 x+\operatorname{sen}^4 x=1$.

Si sabemos que $\cos^7 x\leqslant\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^4 x\leqslant\operatorname{sen}^2 x$, tenemos que el primer miembro de la ecuación dada no supera a la unidad y es igual a la unidad solamente cuando en ambas desigualdades no estrictas, citadas más arriba, tiene lugar la igualdad, es decir, se cumple el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \cos^7 x=\cos^2 x,\\ \operatorname{sen}^4 x=\operatorname{sen}^2 x.\end{cases}$$

La primera ecuación se satisface si $\cos x=0$ y si $\cos x=1$. Sin embargo, para estos valores de x la segunda ecuación se satisface también: si $\cos x=0$, entonces $\operatorname{sen}^2 x=1$, mientras que si $\cos x=1$, entonces $\operatorname{sen} x=0$. Por esto, las soluciones del sistema, y al mismo tiempo de la ecuación inicial, serán: $x=\pi/2+k\pi$ y $x=2k\pi$, donde k es un número entero cualquiera.

5. *Resolver la ecuación* $\operatorname{sen}^4 x-\cos^7 x=1$.

El razonamiento utilizado en el problema anterior aquí no puede ser aplicado directamente, pero es posible modificarlo en algo. Es claro que de esta ecuación se deduce que $\cos^7 x\leqslant 0$ (en otro caso, $\operatorname{sen}^4 x>1$), es decir, $\cos x\leqslant 0$. No obstante, entonces $|\cos^7 x|=-\cos^7 x$ y la ecuación se representa de otro modo

$$\operatorname{sen}^4 x+|\cos x|^7=1.$$

Después de esto, es posible razonar así, como se hizo anteriormente:

$$\operatorname{sen}^4 x\leqslant\operatorname{sen}^2 x,\quad |\cos x|^7\leqslant|\cos x|^2=\cos^2 x,$$

y de resultas obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^4 x = \operatorname{sen}^2 x, \\ |\cos x|^7 = |\cos x|^3. \end{cases}$$

La segunda ecuación se satisface cuando $|\cos x| = 0$ y $|\cos x| = 1$. De $|\cos x| = 0$ obtenemos las soluciones $x = \pi/2 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, que satisfacen también la primera ecuación. Si $|\cos x| = 1$, entonces $\cos x = -1$ (ya que $\cos x \leqslant 0$), y $x = (2k+1)\pi$; estos valores satisfacen por igual la primera ecuación. Por consiguiente, la solución de la ecuación inicial se da por dos series:

$$x = \pi/2 + k\pi \text{ y } x = (2k+1)\pi,$$

donde k es un número entero cualquiera.

Indiquemos otro modo de resolución que reduce sencillamente la ecuación dada a la precedente. Sustituyendo x por $\pi - y$, se obtiene la ecuación $\operatorname{sen}^4(\pi - y) - \cos^7(\pi - y) = 1$, o aplicando las fórmulas de reducción, la ecuación

$$\operatorname{sen}^4 y + \cos^7 y = 1,$$

examinada más arriba. Sus soluciones son: $y = \pi/2 + k\pi$ e $y = 2k\pi$, de donde, en vista de que $x = \pi - y$, tenemos

$$x = \pi/2 - k\pi \text{ y } x = \pi - 2k\pi,$$

siendo k un número entero cualquiera.

6. *Resolver la ecuación*

$$\cos^2[\pi/4\,(\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos^2 x)] - \operatorname{tg}^2(x + \pi/4\,\operatorname{tg}^2 x) = 1.$$

Ya que el cuadrado del coseno de cualquier argumento no supera a la unidad, la ecuación dada sólo se cumple en el caso en que simultáneamente

$$\cos^2[\pi/4\,(\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos^2 x)] = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}(x + \pi/4\,\operatorname{tg}^2 x) = 0.$$

De ese modo, hemos llegado de nuevo al sistema de dos ecuaciones con una incógnita. Para su resolución conviene hallar las raíces de la primera ecuación y luego, sustituyéndolas en la segunda, elegimos aquéllas que satisfacen esta segunda ecuación y, por lo tanto, el sistema.

De la primera ecuación se deduce de inmediato

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos^2 x = 4k;$$

donde k es un número entero. Sin embargo

$$|\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos^2 x| \leqslant |\operatorname{sen} x| + \sqrt{2}\,|\cos^2 x| \leqslant 1 + \sqrt{2} < 4,$$

y por eso la última ecuación no tiene solución, siendo $k \neq 0$. Examinemos $k = 0$, es decir, resolvamos la ecuación $\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$.

Al sustituir $\cos^2 x$ por $1-\operatorname{sen}^2 x$, se obtiene la ecuación cuadrática $\operatorname{sen} x+\sqrt{2}-\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 x=0$, de la cual $\operatorname{sen} x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (la segunda raíz de la ecuación cuadrática es mayor que 1). Por consiguiente, obtenemos las soluciones de la primera ecuación:

$$x_1=-\pi/4+2n\pi,\quad x_2=5\pi/4+2n\pi,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

La solución de nuestra ecuación la hemos escrito en forma de dos series en vez de la forma más difundida $x=(-1)^{n+1}\pi/4+n\pi$ para facilitar la resolución posterior. En general, la escritura abreviada de la resolución, en forma de una serie, es muy cómoda para el resultado final, ya que es más compacta. En los casos cuando hay que practicar con estas soluciones cualesquier cálculos y razonamientos, la representación en forma de dos series es más cómoda.

Analicemos la primera serie $x=-\pi/4+2n\pi$. Sustituyamos estos valores de x en la segunda ecuación, ya que es evidente que $\operatorname{tg}^2 x=1$, entonces para estos valores de x, la segunda ecuación toma la forma siguiente: $\operatorname{tg}(-\pi/4+2n\pi+\pi/4)=0$, es decir, se convierte en identidad. Por lo tanto, todos los valores de x de la primera serie son las soluciones del sistema y junto con él de la ecuación inicial.

Al analizar análogamente la segunda serie, nos cercioramos de que ningún valor de ésta puede ser raíz de la segunda ecuación y no satisface la ecuación inicial.

Así, las soluciones de la ecuación inicial se determinan por la fórmula

$$x=-\pi/4+2n\pi,$$

donde n es un número entero cualquiera.

El tipo de problemas difundido, no comunes por su aspecto exterior, son ecuaciones y desigualdades "aisladas" con dos o más incógnitas, y sistemas de ecuaciones en los cuales el número de incógnitas no es igual al número de ecuaciones. Ya hemos resuelto en los ejemplos precedentes varios problemas similares, o sea, sistemas de dos ecuaciones con una incógnita. Los problemas en los cuales el número de las incógnitas es mayor que el de las ecuaciones o desigualdades proporcionan, por lo general, grandes dificultades psicológicas: por lo visto, esto está relacionado con el criterio de que, cuando se tiene un menor número de datos es imposible determinar un mayor número de incógnitas. Más adelante, los problemas examinados demuestran que este criterio no concuerda con la realidad.

7. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x=2\operatorname{sen}^2 y,\\ \operatorname{sen}^2 y+\cos^2 z=1.\end{cases}$$

Este sistema tiene tres incógnitas y sólo dos ecuaciones. No obstante, de inmediato es evidente que en la primera ecuación, el primer miembro es $\geqslant 2$ como suma de las magnitudes recíprocamente inversas, mientras que el segundo miembro es $\leqslant 2$. Por eso, la primera ecuación es equivalente al sistema de dos ecuaciones.

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2, \quad \operatorname{sen}^2 y = 1.$$

Por lo tanto, la particularidad del sistema dado "está eliminada" completamente, es decir, tenemos un sistema ordinario de tres ecuaciones con tres incógnitas, y al mismo tiempo, muy sencillo. En efecto, de las dos nuevas ecuaciones y de la segunda dada se obtienen los resultados siguientes: $\operatorname{tg}^2 x = 1$, $\cos^2 z = 0$. Por eso, las soluciones del sistema dado se obtienen mediante las fórmulas siguientes:

$$x = \pi/4\,(2k+1), \quad y = \pi/2 + l\pi, \quad z = \pi/2 + m\pi,$$

donde k, l, m son números enteros cualesquiera.

8. *Resolver la desigualdad*

$$-|y| + x - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geqslant 1.$$

Ante todo anotamos que *resolver la desigualdad con dos incógnitas* x e y, naturalmente, no es otra cosa que obtener todos los pares de números x, y, y sustituirlos en la desigualdad dada, debido a lo que esta última se convierte en una desigualdad numérica exacta. Por lo visto, todos estos pares pueden mostrarse directamente en la resolución de los sistemas de ecuaciones ordinarios (su número puede ser infinitamente grande, por ejemplo, para los sistemas trigonométricos); o geométricamente, expresando una zona compuesta a base de los puntos respectivos del plano. Con este método geométrico ya hemos resuelto el problema 30 del § 13 de la Parte I. Por consiguiente, aquí es natural reducir la desigualdad dada a tal forma que sus soluciones puedan exponerse fácilmente en el plano.

Luego, la desigualdad se escribe en la forma siguiente

$$x - |y| \geqslant \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + 1.$$

Ahora es evidente que toda solución debe satisfacer la condición $x - |y| \geqslant 0$, y al cumplir esta condición, ambos miembros de esta desigualdad no son negativos (en el RVA). Por eso podemos elevarlos al cuadrado y obtener la desigualdad equivalente en el RVA

$$-x\,|y| \geqslant \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$$

No obstante, en el intervalo analizado $x \geqslant |y| \geqslant 0$, por esto el primer miembro de la desigualdad obtenida no es positivo, mientras que el segundo no es negativo. Por lo tanto, esta desigualdad se satisface únicamente en el caso en que ambos miembros sean iguales a cero:

$$x\,|y| = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

La primera de estas ecuaciones significa que x o y es igual a cero. Si

$x=0$, entonces de la condición $x \geqslant |y|$ se deduce que $y=0$, y que el par $x=0$, $y=0$ no se encuentra en el RVA de la desigualdad inicial. Por consiguiente, $y=0$, y de la segunda ecuación obtenemos (si se tiene en cuenta $x \geqslant 0$) que $x=1$.

La sustitución directa en la desigualdad inicial demuestra que el par obtenido $x=1$, $y=0$ satisface esta desigualdad. Es interesante señalar que, aunque hemos estado "preparados" para la representación geométrica de la solución, no necesitamos de ella para apuntar el resultado.

9. *Hallar todos los pares de los números* x, y, *que satisfacen la ecuación*

$$\cos x + \cos y - \cos (x+y) = \frac{3}{2}.$$

Primera solución. Sin duda, en vez de esta formulación tan larga, es mejor decir: resolver la ecuación. La ecuación dada permite la solución "casi típica" que se reduce, como veremos ahora, a la solución de la desigualdad trigonométrica. La primera idea que puede surgir al resolver una ecuación con dos incógnitas es la siguiente: ¿Es posible expresar una incógnita por otra? Luego, dando ciertos valores a una incógnita, podrían obtenerse los valores respectivos de otra incógnita. Los pares obtenidos de ese modo serán las soluciones de la ecuación. Por lo tanto, el problema será resuelto.

Intentemos sustituir y por x. Nuestra ecuación puede escribirse en la forma siguiente:

$$\cos x + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+y\right) \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Es claro que $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ $\left(\text{en otro caso } \cos x = \frac{3}{2}\right)$ y por eso

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+y\right) = \frac{\frac{3}{2}-\cos x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Consideraremos esta ecuación como una ecuación respecto a y. Ella puede ser resuelta en el caso y solamente en el caso cuando su segundo miembro por el módulo es menor o igual a 1, es decir, cuando

$$\left|\frac{\frac{3}{2}-\cos x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\right| \leqslant 1.$$

Esta desigualdad (ya que $3/2-\cos x > 0$) se puede escribir en la forma

$$\frac{3}{2}-\cos x \leqslant 2\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|.$$

Pero $\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$, y designando $\left|\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ por t, obtendremos la desigualdad $4t^2 - 4t + 1 \leqslant 0$ que se satisface solamente para $t = 1/2$.

Así, el segundo miembro de la ecuación examinada respecto a y no supera por el módulo a la unidad sólo en el caso cuando $\left|\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| = 1/2$, es decir, cuando $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$. Para los demás valores de x esta ecuación no tiene soluciones. Examinemos por separado los casos: $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$ y $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Si $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$, entonces $x = (-1)^k \pi/3 + 2k\pi$, donde k es un número entero cualquiera. En este caso, para cualquier valor de k

$$\cos x = \cos[(-1)^k \pi/3 + 2k\pi] = \frac{1}{2},$$

y la ecuación examinada respecto a y toma la forma $\text{sen}\left(\frac{x}{2} + y\right) = 1$. De aquí $\frac{x}{2} + y = \pi/2 + 2n\pi$ y, por consiguiente,

$$y = 2n\pi + \pi/2 - \frac{x}{2} = 2n\pi + \pi/2 - (-1)^k \pi/6 - k\pi.$$

De esa manera hemos obtenido una serie de soluciones de la ecuación inicial

$$x = (-1)^k \pi/3 + 2k\pi, \quad y = \pi/2 + (-1)^{k+1}\pi/6 + (2n - k)\pi,$$
$$n,\ k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

En forma análoga se estudia el caso de $\text{sen}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, que conduce a la segunda serie de soluciones:

$$x = (-1)^{k+1}\pi/3 + 2k\pi, \quad y = -\frac{\pi}{2} + (-1)^k\pi/6 + (2n - k)\pi,$$
$$n,\ k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Señalemos que los valores de y se hallan con más facilidad, si se toma en consideración que la igualdad $\left|\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}$ es equivalente a la igualdad $\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$, así que $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$.

Segunda solución. La ecuación dada permite también otra solución que se base en el agrupamiento acertado. Si utilizamos fórmulas trigonométricas, la ecuación se reduce a la forma siguiente:

$$4\cos^2\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + 1 = 0.$$

Los primeros dos sumandos del primer miembro son fáciles de completar hasta el cuadrado de la diferencia, después de lo cual la ecuación se escribe de ese modo

$$\left(2\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\operatorname{sen}^2\frac{x-y}{2}=0.$$

Es del todo evidente que la última ecuación equivale al sistema:

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2}=\cos\dfrac{x-y}{2}, \\ \operatorname{sen}\dfrac{x-y}{2}=0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación de este sistema obtenemos: $x-y=2k\pi$, o $y=x-2k\pi$, siendo k cualquier número entero. Al sustituir el valor de y en la primera ecuación, obtenemos

$$2\cos(x-k\pi)=\cos k\pi.$$

Ya que $\cos(x-k\pi)=(-1)^k\cos x$ y $\cos k\pi=(-1)^k$, de aqui se deduce que $\cos x=\frac{1}{2}$, es decir, $x=\pm\pi/3+2n\pi$, donde n es un número entero cualquiera.

Por lo tanto, la solución de la ecuación inicial se da por los pares siguientes:

$$x=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi,\quad y=\pm\frac{\pi}{3}+2(n-k)\pi,$$
$$n,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

(en las fórmulas se toman simultáneamente ambos signos superiores o inferiores).

Mencionemos que las fórmulas obtenidas por medio de esta solución son poco parecidas a las fórmulas obtenidas mediante la primera solución. Con todo, estas fórmulas describen un mismo sin número de pares (x, y), aunque es difícil cerciorarse directamente de este hecho.

Resulta interesante comparar las soluciones citadas más arriba: la segunda solución, por su aspecto exterior, es muy sencilla; ésta se basa en el agrupamiento hallado acertadamente, sin embargo, en este caso, hay siempre algún artificio y elemento de presunción. Mientras que la primera solución sigue una idea muy natural y sólo representa dificultades técnicas.

El problema siguiente se reduce, en dependencia del método elegido, a la solución de una desigualdad trigonométrica y, luego, a un sistema de desigualdades algebraicas, o a la demostración de una desigualdad trigonométrica. En ambos casos es necesario mostrar cierta ingeniosidad.

10. *Hallar todos los pares de los números x, y, que satisfacen la ecuación*

$$\left(\operatorname{sen}^2 x+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\frac{1}{2}\operatorname{sen} y.$$

Primera solución. La idea de la solución es la misma que en el caso de la primera solución del ejemplo precedente: tratamos de expresar y por x. Tenemos la ecuación respecto de y:

$$\operatorname{sen} y = 2\left(\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)^2 + 2\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 - 24.$$

Para poder resolverla, es necesario que el segundo miembro, por su valor absoluto, no supere a la unidad.

Transformemos el segundo miembro; este último es igual a

$$2\left(\operatorname{sen}^4 x + \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\right) + 4 + 2\left(\cos^4 x + \frac{1}{\cos^4 x}\right) + 4 - 24 =$$
$$= 2(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)\left(1 + \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x \cos^4 x}\right) - 16 =$$
$$= 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x)\left(1 + \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x \cos^4 x}\right) - 16 =$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\operatorname{sen}^4 2x}\right) - 16.$$

De ese modo, designando $\operatorname{sen}^2 2x$ por z para abreviar, obtenemos una desigualdad doble que asegura la resolución de la ecuación inicial

$$-1 \leqslant 2\left(1 - \frac{z}{2}\right)\left(1 + \frac{16}{z^2}\right) - 16 \leqslant 1.$$

Después de las transformaciones de rigor se obtiene un sistema de dos desigualdades

$$\begin{cases} z^3 + 15z^2 + 16z - 32 \geqslant 0, \\ z^3 + 13z^2 + 16z - 32 \leqslant 0. \end{cases}$$

La primera de estas desigualdades, aunque es cúbica, se resuelve fácilmente mediante el agrupamiento del primer miembro:

$$z^3 - 1 + 15z^2 - 15 + 16z - 16 = (z-1)(z^2 + 16z + 32),$$

y debido a lo cual, esta desigualdad se reduce a la forma

$$(z-1)[z-(8-4\sqrt{2})][z-(8+4\sqrt{2})] \geqslant 0.$$

Al resolver la última desigualdad (por ejemplo, con ayuda del método de intervalos), obtenemos

$$1 \leqslant z \leqslant 8 - 4\sqrt{2}, \quad z \geqslant 8 + 4\sqrt{2}.$$

Sin embargo, $z = \operatorname{sen}^2 2x \leqslant 1$, por consiguiente de todas las soluciones obtenidas la única que presenta interés es $z = 1$. Al efectuar la sustitución directa se verifica que esta solución satisface también la segunda desigualdad, es decir, es la solución del sistema.

Así, la ecuación respecto de y que necesitamos resolver sólo tiene solución para $z = \operatorname{sen}^2 2x = 1$. Sustituyendo $z = 1$ en la ecuación para sen y, y utilizando el segundo miembro transformado

$$\operatorname{sen} y = 2\left(1 - \frac{z}{2}\right)\left(1 + \frac{16}{z^2}\right) - 16,$$

obtenemos que $\operatorname{sen} y = 1$. Por consiguiente, la ecuación inicial se ha reducido a un sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 2x &= 1, \\ \operatorname{sen} y &= 1, \end{aligned}\right.$$

cuyas soluciones, como es fácil comprobar, son los pares siguientes:

$$x = \pi/4 + k\pi/2, \quad y = \pi/2 + 2n\pi, \quad k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Señalemos que para resolver el sistema de desigualdades algebraicas obtenido anteriormente es posible emplear un método menos natural, pero más breve. Precisamente, como $z = \operatorname{sen}^2 2x$, entonces $0 \leqslant z \leqslant 1$ y, por lo tanto,

$$z^3 + 15z^2 + 16z - 32 \leqslant 1 + 15 + 16 - 32 = 0,$$

es decir, el primer miembro de la primera desigualdad no es positivo y será igual a cero sólo cuando $z = 1$. Por consiguiente, en el caso de $0 \leqslant z \leqslant 1$ esta desigualdad se satisface solamente para $z = 1$. La segunda desigualdad se cumple también si $z = 1$. Sin duda, idear esta solución es más difícil.

Aclaremos que el éxito del método aplicado para resolver la desigualdad cúbica, relacionado con la separación del factor $z - 1$, está garantizado por la sustitución acertada $z = \operatorname{sen}^2 2x$. Si introducimos en vez de z una nueva variable, según la fórmula $t = \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$, la desigualdad que se obtendrá posteriormente, será más complicada y en este caso de su primer miembro se desprenderá el factor $t - \frac{1}{4}$, lo que es difícil de imaginar.

Segunda solución. Transformando el primer miembro de la ecuación dada al igual que en la primera solución, obtenemos la ecuación

$$(2 - \operatorname{sen}^2 2x)\left(1 + \frac{16}{\operatorname{sen}^4 2x}\right) = 16 + \operatorname{sen} y.$$

Pero $2 - \operatorname{sen}^2 2x \geqslant 1$, $1 + \frac{16}{\operatorname{sen}^4 2x} \geqslant 1 + 16 = 17$, y ambas desigualdades se convierten en igualdades en el caso de $\operatorname{sen}^2 2x = 1$. Por esto, el primer miembro de nuestra ecuación no es menor de 17 y, es evidente, que el segundo miembro no es mayor de 17. Por lo tanto, la ecuación inicial es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 2x &= 1, \\ \operatorname{sen} y &= 1, \end{aligned}\right.$$

ya obtenido en la primera solución.

Conviene anotar que, aunque la segunda solución es más breve, la primera es más natural; en otras palabras, cada vez es más comprensible el objetivo de esto u otro razonamiento. Al mismo tiempo, en la segunda solución se emplea un método original: comparación de los valores del primer y segundo miembros de la ecuación.

Para resolver la siguiente ecuación con dos incógnitas se utilizan completamente otros razonamientos, no obstante vinculados con las desigualdades. La idea de expresar una incógnita por otra no es aplicable en este caso.

11. *Hallar todos los pares de números x e y, que satisfacen la ecuación*

$$\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y + 2\mathrm{cotg}^2 x \,\mathrm{cotg}^2 y = 3 + \mathrm{sen}^2 (x+y).$$

Examinemos el primer miembro de esta ecuación. Utilizando la desigualdad $a^4 + b^4 \geqslant 2a^2 b^2$, que se satisface para cualesquier a y b, obtendremos la desigualdad

$$\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y \geqslant 2\mathrm{tg}^2 x \,\mathrm{tg}^2 y,$$

además, la igualdad se obtiene solamente para $\mathrm{tg}^2 x = \mathrm{tg}^2 y$.

Luego,

$$\mathrm{tg}^2 x \,\mathrm{tg}^2 y + \mathrm{cotg}^2 x \,\mathrm{cotg}^2 y \geqslant 2,$$

siendo la suma de magnitudes positivas recíprocamente inversas y la igualdad se obtiene solamente cuando $\mathrm{tg}^2 x \,\mathrm{tg}^2 y = 1$. Así, el primer miembro de nuestra ecuación es mayor o igual a 4, y con eso es igual a 4 sólo al cumplir a la vez las igualdades

$$\begin{cases} \mathrm{tg}^2 x = \mathrm{tg}^2 y, \\ \mathrm{tg}^2 x \,\mathrm{tg}^2 y = 1. \end{cases}$$

Por otro lado, $\mathrm{sen}^2 (x+y) \leqslant 1$ y, por consiguiente, el segundo miembro es menor o igual a 4.

De esa manera, la ecuación inicial se satisface únicamente en el caso en que ambos miembros son iguales a 4, lo que tiene lugar, cuando x e y son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \mathrm{tg}^2 x = \mathrm{tg}^2 y, \\ \mathrm{tg}^2 x \,\mathrm{tg}^2 y = 1, \\ \mathrm{sen}^2 (x+y) = 1. \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones tenemos $\mathrm{tg}^2 x = \mathrm{tg}^2 y = 1$, es decir, $\mathrm{tg}\, x = \pm 1$, $\mathrm{tg}\, y = \pm 1$, y al mismo tiempo son posibles las cuatro combinaciones de signos. En este caso, los ángulos x e y pueden escribirse en la forma

$$x = \pi/4\,(2k+1), \quad y = \pi/4\,(2n+1),$$

donde k y n son números enteros cualesquiera.

De estos ángulos es necesario elegir aquéllos que satisfacen la tercera ecuación del sistema. Con este fin los sustituimos en la tercera ecuación:

$$\operatorname{sen}^2(x+y)=\operatorname{sen}^2\pi/2\,(k+n+1)=$$
$$=\begin{cases}1, & \text{si } k+n+1 \text{ es impar},\\ 0, & \text{si } k+n+1 \text{ es par}.\end{cases}$$

De aquí se deduce que de las soluciones de las dos primeras ecuaciones deben tomarse los pares k y n para los cuales la suma $k+n$ es par, $k+n=2m$, es decir, $n=2m-k$, donde m es número entero cualquiera.

Así, las soluciones de la ecuación dada son los pares x, y de la forma

$$x=\pi/4\,(2k+1),\quad y=\pi/4\,(4m-2k+1),$$

donde m, k, son números enteros cualesquiera.

Conviene considerar que esta solución es "en borrador" y debe reformarse en una solución "en limpio" más exacta desde el punto de vista de la lógica. Esto se puede efectuar, por ejemplo, del modo siguiente. Reduzcamos el primer miembro a la forma

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+\operatorname{cotg}^2 x\operatorname{cotg}^2 y&=\\ &=(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y+\operatorname{cotg}^2 x\operatorname{cotg}^2 y)=\\ &=(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{cotg}x\operatorname{cotg}y)^2+4.\end{aligned}$$

Entonces esta ecuación se convierte en

$$(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{cotg}x\operatorname{cotg}y)^2+1=\operatorname{sen}^2(x+y).$$

El primer miembro de esta ecuación es mayor o igual a la unidad, mientras que el segundo es menor o igual a la unidad. Por consiguiente, esta ecuación se satisface únicamente en el caso en que ambos miembros son iguales a la unidad, o sea, cuando x e y son las soluciones del sistema

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y=0,\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{cotg}x\operatorname{cotg}y=0,\\ \operatorname{sen}^2(x+y)=1.\end{cases}$$

El sistema dado se resuelve como en el caso de la solución "en borrador".

EJERCICIOS:

Resolver las ecuaciones, desigualdades y sistemas:

1. $2^{|x|}=\operatorname{sen} x^2$.
2. $3|\operatorname{sen}\sqrt{x}|=|\cos x|$.
3. $x^2=-\cos x$.
4. $3x^2=1-2\cos x$.
5. $2\cos(x/3)=2^x+2^{-x}$.
6. Demostrar que la ecuación $2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x}{6}=x^2+\frac{1}{x^2}$ no tiene soluciones.

7. $8-x\cdot 2^x+2^{3-x}-x=0.$

8. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x.$

9. $x\cdot 2^x=x(3-x)+2(2^x-1).$

10. $x^x=10^{x-x^2},\ x>0.$

11. $x^2+(x+1)\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{6}=\dfrac{3+x}{2},\ -2\leqslant x\leqslant 0.$

12. $x=\operatorname{sen}\pi\,\dfrac{x+1}{3}\operatorname{sen}\pi\,\dfrac{1-x}{3},\ 0\leqslant x\leqslant 1.$

13. $5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=0.$

14. $x^2+4x\cos xy+4=0.$

15. $\dfrac{|\operatorname{cotg} xy|}{\cos^2 xy}=\log_{1/3}(9y^2-18y+10)+2.$

16. $\log_2\left(\cos^2 xy+\dfrac{1}{\cos^2 xy}\right)=\dfrac{1}{y^2-2y+2}.$

17. $\operatorname{tg}^2\pi(x+y)+\operatorname{cotg}^2\pi(x+y)=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}}+1.$

18. $\log_3|\pi x|+\log_{|\pi x|}3=\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2(x+y)-2\operatorname{sen}(x+y)+2}.$

19. $\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x(\operatorname{sen}y+\cos y)+2=0.$

20. $2\sqrt{2}\,(\operatorname{sen}x+\cos x)\cos y=3+\cos 2y.$

21. $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0.$

22. $-x-y^2-\sqrt{x-y^2-1}\geqslant -1.$

23. $\begin{cases}\cos x=-1/3,\\ \operatorname{tg}x=2\sqrt{2}.\end{cases}$

24. $\begin{cases}\operatorname{sen}x=-2/5,\\ \operatorname{cotg}x=-3/\sqrt{5}.\end{cases}$

25. $2(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4)=7.$

Hallar las soluciones reales de los sistemas

26. $\begin{cases}x+y+z=2,\\ 2xy-z^2=4.\end{cases}$

27. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x^3+y^3+z^3=a^3.\end{cases}$

28. ¿Para cuáles valores del parámetro a el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}x^2+y^2=z,\\ x+y+z=a,\end{cases}$$

tiene solución única?

29. Hallar todos los valores de los parámetros a y b para los cuales la ecuación $(x^2+5)/2=x-2\cos(ax+b)$ tiene por lo menos una solución.

§ 2. PROBLEMAS TÍPICOS POR SU ASPECTO EXTERIOR QUE SE RESUELVEN POR MÉTODOS NO TÍPICOS

Los métodos que se han aplicado en el párrafo precedente para resolver los problemas no típicos por su aspecto exterior, donde los primeros son verdaderamente necesarios, se emplean con éxito para resolver los problemas más típicos que admiten una solución más usada. Es natural, que estos métodos, como regla, proporcionan una solución más breve y elegante.

Así, en particular, después de los ejemplos 5 y 6 analizados en el § 1 de la Parte IV, puede resolverse *oralmente* la ecuación $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 1$, al mismo tiempo que su resolución con ayuda del método habitual exige cálculos bastante extensos. A continuación se dan más ejemplos de este tipo.

1. *Resolver la desigualdad*

$$\sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\cos x} > 1.$$

El RVA de esta desigualdad consta de los valores de x, los cuales, simultáneamente, dan $\operatorname{sen} x \geqslant 0$ y $\cos x \geqslant 0$. Ya que $\operatorname{sen} x \leqslant 1$ y $\cos x \leqslant 1$, entonces, según la propiedad de las potencias,

$$\sqrt{\operatorname{sen} x} \geqslant \operatorname{sen}^2 x, \quad \sqrt{\cos x} \geqslant \cos^2 x.$$

Al sumar estas desigualdades se obtiene

$$\sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\cos x} \geqslant 1,$$

además, la igualdad tiene lugar sólo en el caso en que simultáneamente

$$\sqrt{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen}^2 x \quad \text{y} \quad \sqrt{\cos x} = \cos^2 x.$$

Razonando así, como en el § 1 de la Parte IV se puede determinar fácilmente que estas ecuaciones se satisfacen a la vez solamente si $x = 2k\pi$ y si $x = \pi/2 + 2k\pi$, y por lo tanto, la desigualdad inicial se cumple para todos los valores de x del RVA, excepto los valores apenas señalados, o sea, todos los valores de x que dan a la vez

$$\operatorname{sen} x > 0 \quad \text{y} \quad \cos x > 0.$$

En calidad de la solución común de estas dos desigualdades y de ese modo de la desigualdad inicial será

$$2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Para comparación, mostramos una solución ordinaria, típica, de la desigualdad dada. Su RVA se determina por las desigualdades $\operatorname{sen} x \geqslant 0$ y $\cos x \geqslant 0$. Ambos miembros de la desigualdad inicial son positivos y por eso, después de elevarla al cuadrado, en el RVA se obtiene una desigualdad equivalente a la inicial

$$\operatorname{sen} x + \cos x + 2\sqrt{\operatorname{sen} x \cos x} > 1.$$

Ya que $2 \operatorname{sen} x \cos x = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1$, entonces, al sustituir para abreviar $\operatorname{sen} x + \cos x$ por u, se obtiene la desigualdad siguiente

$$\sqrt{2u^2 - 2} > 1 - u.$$

Como el primer miembro de la última desigualdad no es negativa, entonces, en el caso de $u > 1$, ésta se satisface automáticamente, o sea, todos los valores de $u > 1$ son sus soluciones.

Luego, al analizar los valores de $u \leqslant 1$, de nuevo obtenemos una desigualdad con miembros no negativos. Al elevarla al cuadrado, después de las transformaciones, se obtiene una desigualdad equivalente $u^2+2u-3>0$, cuyas soluciones son $u<-3$ y $u>1$. Examinamos el caso de $u \leqslant 1$ y por eso ha de aplicarse solamente la desigualdad $u<<-3$.

Pues, la desigualdad $\sqrt{2u^2-2}>1-u$ tiene una solución $u>1$ (del primer caso) y otra $u<-3$. Pero $u=\operatorname{sen} x+\cos x=\sqrt{2}\operatorname{sen}(x++\pi/4)$ no puede ser menor de -3 y por eso hace falta resolver la desigualdad

$$\operatorname{sen} x+\cos x>1.$$

En el RVA de la desigualdad inicial $\operatorname{sen} x+\cos x \geqslant 0$; por ello, después de elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad, se obtiene la desigualdad equivalente $\operatorname{sen} x \cos x>0$, la cual se cumple para todo valor de x del RVA, excepto el caso cuando $\operatorname{sen} x \cos x=0$, es decir, para los valores de x de los intervalos

$$2k\pi<x<\pi/2+2k\pi, \quad k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

Como se ve, la primera solución es más breve, sin tomar en consideración que esta solución es más universal, pues, en ella es insignificante que ambas raíces de esta desigualdad sean cuadradas, incluso ellas podrían ser de diferentes potencias. Al mismo tiempo, la solución "típica", en este caso, tropezaría con dificultades insuperables.

En los ejemplos analizados el provecho de los métodos no típicos consiste, en lo fundamental, en su brevedad, y puede pasarse por completo sin emplear estos métodos.

La singularidad del tipo de las ecuaciones examinadas en el párrafo precedente es, en realidad, lo que da lugar a una idea de buscar nuevos métodos. Son más difíciles los problemas que tienen un aspecto exterior ordinario, típico, pero, de hecho, es imposible resolverlos aplicando los métodos típicos. Al resolver los problemas de tal tipo, nunca estamos seguros de que el método elegido es simplemente incorrecto o que se necesitan cualesquier razonamientos no típicos.

A continuación se examinan dos problemas más; para cada uno de ellos se dan varias soluciones, mostrando cuán diferentes pueden ser los métodos no típicos, qué ideas más distintas pueden ser aplicadas al resolver estos problemas.

2. *¿Cuántas raíces tiene la ecuación* $\operatorname{sen} x+2\operatorname{sen} 2x=3+\operatorname{sen} 3x$ *en el segmento* $0 \leqslant x \leqslant \pi$?

Primera solución. Esta ecuación tiene un aspecto exterior enteramente típico, y por lo tanto es natural, al principio, intentar resolverla con ayuda de los métodos ordinarios, por ejemplo, reduciéndola a una función, por ejemplo, a $\operatorname{sen} x$.

Si empleamos las fórmulas del ángulo doble o triple obtenemos la ecuación

$$4 \operatorname{sen} x \cos x = 3 + 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x.$$

Aquí, ya nos espera una contrariedad: para expresar $\cos x$ por medio de $\operatorname{sen} x$ sin irracionalidad es necesario elevar esta ecuación al cuadrado, arriesgándonos a obtener raíces sobrantes. Como resultado obtenemos la ecuación

$$16 \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) = (3 + 2 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x)^2,$$

que después de sustituir $\operatorname{sen} x$ por y y de las transformaciones no complejas se reduce a la forma

$$16y^6 - 24y^3 - 12y^2 + 12y + 9 = 0.$$

Esta ecuación de sexto grado da una idea de que este método no puede conducir a nada de bueno. Sin embargo, es posible aún el intento de encontrar un agrupamiento conveniente: si unimos los sumandos primero, segundo y último se obtiene una ecuación en la forma

$$(4y^3 - 3)^2 + 12y(1 - y) = 0.$$

Pero $y = \operatorname{sen} x$ y según los datos $0 \leqslant x \leqslant \pi$, así que sólo se necesitan las raíces de y que dan $0 \leqslant y \leqslant 1$. Sin embargo, para estas y el segundo sumando del primer miembro de la ecuación no es negativo, mientras que el primer sumando no es negativo para cualquier y, por esto la ecuación se satisface únicamente en el caso de los valores de y para los cuales, al mismo tiempo, $4y^3 - 3 = 0$ y $12y(1 - y) = 0$. Ya que evidentemente tales y no existen, la ecuación examinada no tiene soluciones en el segmento $0 \leqslant y \leqslant 1$. De aquí se deduce que la ecuación inicial tampoco tiene soluciones en el segmento $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Como se ve, el método elegido, que, al principio, parecía en absoluto típico, nos llevó al objetivo sólo con el agrupamiento acertado. Más abajo resultará que este método es fallado justamente.

Segunda solución. Esta solución también se basa en el agrupamiento acertado que tiene lugar despues de algunas transformaciones trigonométricas.

La ecuación dada se escribe en la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} 2x + 3 = 0$$

y a continuación se practica la transformación del primer miembro; el último es igual a

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} x \cos 2x - 4 \operatorname{sen} x \cos x + 3 &= \\ &= \operatorname{sen} x (2 \cos 2x - 4 \cos x) + 3 = \\ &= \operatorname{sen} x (4 \cos^2 x - 4 \cos x - 2) + 3 = \\ &= \operatorname{sen} x [(2 \cos x - 1)^2 - 3] + 3. \end{aligned}$$

Como resultado se obtiene la ecuación

$$\operatorname{sen} x\,(2\cos x-1)^2+3\,(1-\operatorname{sen} x)=0.$$

Según los datos sólo hay que hallar la solución en el segmento $0\leqslant x\leqslant\pi$. En este segmento es válida la desigualdad $\operatorname{sen} x\geqslant 0$. Por eso, ambos sumandos en la ecuación obtenida no son negativos y, en consecuencia, ésta es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\operatorname{sen} x\,(2\cos x-1)^2=0,\\ 3\,(1-\operatorname{sen} x)=0.\end{cases}$$

De la segunda ecuación del sistema tenemos $\operatorname{sen} x=1$. En este caso, $\cos x=0$ y $\operatorname{sen} x\,(2\cos x-1)^2=1\neq 0$. Por lo tanto, ninguna solución de la segunda ecuación puede ser solución de la primera ecuación y, por consiguiente, el sistema y junto con él la ecuación inicial no tienen soluciones.

Tercera solución. Escribamos nuestra ecuación así:

$$\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 3x+2\operatorname{sen} 2x=3,$$

y utilizando las fórmulas de la diferencia de los senos y del ángulo doble, obtenemos la ecuación $\operatorname{sen} x\,(-4\cos^2 x+4\cos x+2)=3$. Ya que para las raíces de esta ecuación $\operatorname{sen} x\neq 0$, esta última es equivalente a la siguiente:

$$-4\cos^2 x+4\cos x+2=\frac{3}{\operatorname{sen} x}.$$

Si el trinomio $y=-4\cos^2 x+4\cos x+2$ se considera como cuadrático respecto a $\cos x$, es fácil cerciorarse de que su valor máximo es igual a 3 y que se obtiene cuando $\cos x=\frac{1}{2}$. Por otro lado, en el segmento $0\leqslant x\leqslant\pi$ se tiene la desigualdad $0\leqslant\operatorname{sen} x\leqslant 1$, por lo tanto $\frac{3}{\operatorname{sen} x}\geqslant 3$ y en este caso la igualdad se consigue sólo cuando $\operatorname{sen} x=1$. Esto significa que la ecuación dada se satisface únicamente en el caso en que, a la vez, $\cos x=1/2$ y $\operatorname{sen} x=1$. Sin embargo, esto es imposible, o sea, la ecuación a examinar no tiene soluciones.

Conviene señalar que en todas las soluciones analizadas fue muy esencial que $\operatorname{sen} x\geqslant 0$, puesto que las raíces se han buscado solamente en el segmento $0\leqslant x\leqslant\pi$. No obstante esta condición se da solamente para facilitar el problema; este último puede ser resuelto también sin esta limitación. Demostremos que la ecuación dada no tiene raíces de x para las cuales $\operatorname{sen} x<0$.

En efecto, si $\operatorname{sen} x<0$,

$$\operatorname{sen} x+2\operatorname{sen} 2x<0+2=2,$$

mientras

$$3+\operatorname{sen} 3x\geqslant 3+(-1)=2,$$

es decir, el primer miembro de la ecuación inicial, para todos los valores de x, es *estrictamente menos* de 2, mientras que su segundo miembro, para todos los valores de x es *más o igual* a 2. Mediante transformaciones simples puede cerciorarse de esto: es necesario escribir la ecuación en la forma siguiente

$$\operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen} 2x) + 1 + \operatorname{sen} 3x;$$

el segundo miembro de esta igualdad no es negativo, de lo que se deduce que $\operatorname{sen} x \geqslant 0$.

De esa manera, la ecuación dada no tiene raíces de x para las cuales $\operatorname{sen} x < 0$; más arriba se ha demostrado que no existen las raíces de x para las cuales $\operatorname{sen} x \geqslant 0$. Por consiguiente, la ecuación inicial, en general, no tiene raíces.

Cuarta solución. Es más breve y se efectúa independientemente de las limitaciones con respecto a x. Al escribir la ecuación así:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x + 2 \operatorname{sen} 2x = 3,$$

o, que es lo mismo,

$$-2 \operatorname{sen} x \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x = 3,$$

escribamos la siguiente serie:

$$|-2 \operatorname{sen} x \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x| \leqslant |-2 \operatorname{sen} x \cos 2x| + \\ + |2 \operatorname{sen} 2x| = 2 |\operatorname{sen} x| |\cos 2x| + 2 |\operatorname{sen} 2x| \leqslant 2 (|\cos 2x| + \\ + |\operatorname{sen} 2x|).$$

Ya que $|\cos 2x| + |\operatorname{sen} 2x| \leqslant \sqrt{2}$ para cualquier x (esto es fácil demostrar, interpretando los módulos o aún más sencillamente, elevando al cuadrado), el primer miembro de la última ecuación, por su valor absoluto, no supera a $2\sqrt{2}$ y no puede, en consecuencia, igualarse a 3.

En la siguiente ecuación, que en apariencia es ordinaria, los métodos típicos no conducen al objetivo. Al intentar, por ejemplo, recibir la ecuación respecto a $\operatorname{sen} x$, se tiene una ecuación de la séptima potencia.

3. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x.$$

Primera solución. La ecuación puede escribirse en la forma

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x = 0$$

y analizando su primer miembro como un trinomio cuadrático con relación a $\operatorname{sen} x$, separemos el cuadrado completo, después de lo cual esta ecuación se convierte en la siguiente

$$\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 3x\right)^2 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x (1 - \operatorname{sen}^2 3x) = 0,$$

o sea,

$$\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 3x\right)^2 + \frac{1}{16}\operatorname{sen}^2 6x = 0.$$

Está claro que esta ecuación es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}^2 3x, \\ \operatorname{sen} 6x = 0. \end{cases}$$

La solución de la segunda ecuación es una serie de valores de $x = k\pi/6$, donde k es número entero cualquiera. De esta serie deben separarse los valores que satisfacen la primera ecuación. Para encontrar los valores respectivos de k se sustituye $x = k\pi/6$ en la primera ecuación y se obtiene

$$\operatorname{sen}\frac{k\pi}{6} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ si } k \text{ es par,} \\ 1/2, \text{ si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

A continuación analicemos por separado los casos de k par e impar. Si k es par, en este caso $\operatorname{sen} k\pi/6 = 0$, lo que se cumple para $k\pi/6 = m\pi$, siendo m un número entero cualquiera. Por consiguiente, entre los valores pares de k sólo son convenientes $k = 6m$, donde m es un número entero cualquiera. Si k es impar, en este caso $\operatorname{sen} k\pi/6 = 1/2$, lo cual se cumple con $k\pi/6 = (-1)^m \pi/6 + m\pi$, siendo m un número entero cualquiera. Por lo tanto, entre los valores impares de k son convenientes solamente $k = (-1)^m + 6m$, donde m es un número entero cualquiera.

Así, las soluciones de la ecuación inicial son los valores de las siguientes series:

$x = m\pi$, $x = (-1)^m \pi/6 + m\pi$, donde m es un número entero cualquiera.

El sistema obtenido se resuelve fácilmente con ayuda de los razonamientos siguientes. Su segunda ecuación se divide en las dos: $\operatorname{sen} 3x = 0$ y $\cos 3x = 0$. Si $\operatorname{sen} 3x = 0$, de la primera ecuación obtenemos $\operatorname{sen} x = 0$, o sea, $x = k\pi$. Estas x son las soluciones del sistema. Si $\cos 3x = 0$, $\operatorname{sen}^2 3x = 1$, y de la primera ecuación tenemos $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$. Es evidente, que las soluciones de esta ecuación $x = (-1)^k \pi/6 + k\pi$ son, al mismo tiempo, las soluciones del sistema. Las dos series obtenidas no son más que la solución de la ecuación inicial.

Comparando este razonamiento con el precedente conviene indicar que la división de la simple ecuación $\operatorname{sen} 6x = 0$, que no es del todo natural, en las dos, resultó más efectivo que el procedimiento natural vinculado con su resolución y elección posterior de las raíces.

Segunda solución. Ante todo debe notarse que si $\operatorname{sen}^2 3x = 0$, de la ecuación se deduce que $\operatorname{sen} x = 0$, y es fácil verificar que todas las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, $x = k\pi$, donde k es un número entero cualquiera, satisfacen la ecuación. En el caso de $\operatorname{sen}^2 3x \neq 0$, el primer miembro de la ecuación dada es positivo, lo que significa, que sen $x>0$.

A continuación traslademos todos los términos al lado izquierdo y añadamos la suma de cuadrados hasta recibir el cuadrado completo utilizando dos métodos: hasta el cuadrado de la suma y hasta el de la diferencia. Luego tenemos que analizar la ecuación en dos formas:

$$(\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x)^2+\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen}^2 3x)=0$$

y

$$(\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x)^2+\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen}^2 3x)=0.$$

Examinemos por separado dos casos:

a) $\operatorname{sen} 3x>0$. Entonces $\operatorname{sen} 3x\geqslant\operatorname{sen}^2 3x$ y, por consiguiente, ambos sumandos de la segunda forma de nuestra ecuación no son negativos, es decir, x debe satisfacer el sistema

$$\begin{cases}\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x=0,\\ \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen}^2 3x)=0.\end{cases}$$

Sin embargo, sen $x\neq 0$, por esto de la segunda ecuación del sistema tenemos $\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen}^2 3x=0$. Según los datos a) sen $3x\neq 0$, es decir, de aquí se deduce que $\operatorname{sen} 3x=1$. En este caso de la primera ecuación resulta que $\operatorname{sen} x=1/2$. Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases}\operatorname{sen}\ x=\frac{1}{2},\\ \operatorname{sen} 3x=1.\end{cases}$$

Si $\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} 3x=3\operatorname{sen} x-4\operatorname{sen}^3 x=1$, o sea, entonces toda solución de la primera ecuación es también solución de la segunda ecuación y, en consecuencia, el sistema se reduce a la primera ecuación. De ese modo, sus soluciones serán los ángulos x de la serie

$x=(-1)^k\pi/6+k\pi$, donde k es un número entero cualquiera.

b) $\operatorname{sen} 3x<0$. Este caso se analiza igualmente como el precedente, pero aquí se utiliza la primera forma de nuestra ecuación. Este caso no da nuevas soluciones.

Por consiguiente, la solución de nuestra ecuación puede escribirse en la forma siguiente

$x=k\pi$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, donde k es un número entero cualquiera.

Esta misma resolución puede efectuarse de un modo más compacto al utilizar módulos. Nuestra ecuación es posible exponerla en la forma

$$\left(\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\left|\operatorname{sen} 3x\right|\right)^2+\operatorname{sen} x(|\operatorname{sen} 3x|-\operatorname{sen}^2 3x)=0.$$

Sin embargo, $\operatorname{sen}^2 3x \leqslant |\operatorname{sen} 3x|$, entonces ambos sumandos no son negativos y por lo tanto tenemos el sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} |\operatorname{sen} 3x| = 0, \\ \operatorname{sen} x (|\operatorname{sen} 3x| - \operatorname{sen}^2 3x) = 0. \end{cases}$$

La solución ulterior es la misma que en el caso precedente.

Tercera solución. Ante todo conviene anotar que de la ecuación dada se deduce que sen $x \geqslant 0$ y que esta ecuación se satisface si $\operatorname{sen} x = 0$, o sea, si $x = k\pi$; debe considerarse a continuación que $\operatorname{sen} x > 0$.

Supongamos que nuestra ecuación se satisface por algún número x y escribimos esta ecuación en la forma siguiente

$$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 3x \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\right).$$

Ya que $\operatorname{sen}^2 x \neq 0$, $\operatorname{sen}^2 3x \neq 0$ y por lo tanto $\operatorname{sen} x - 1/4 > 0$. En ese caso, al multiplicar la desigualdad $\operatorname{sen}^2 3x \leqslant 1$ por la expresión positiva $\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}$, obtenemos la desigualdad

$$\operatorname{sen}^2 3x \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\right) \leqslant \operatorname{sen} x - \frac{1}{4};$$

con todo, la igualdad se obtiene únicamente cuando $\operatorname{sen}^2 3x = 1$. De ese modo, debe cumplirse también la desigualdad

$$\operatorname{sen}^2 x \leqslant \operatorname{sen} x - \frac{1}{4},$$

o lo que es lo mismo, la desigualdad $(\operatorname{sen} x - 1/2)^2 \leqslant 0$ que sólo es válida para $\operatorname{sen} x = 1/2$.

Así, si cierto número x satisface nuestra ecuación, al mismo tiempo éste satisface el sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 3x = 1, \\ \operatorname{sen} x = 1/2. \end{cases}$$

Lo contrario es evidente: si x satisface este sistema, entonces, al sustituir $\operatorname{sen} x = 1/2$ y $\operatorname{sen}^2 3x = 1$ en la ecuación inicial nos cercioraremos de que esta última se satisface también. De esa manera, la ecuación dada es equivalente al sistema obtenido, mientras este sistema se resuelve también mediante los mismos razonamientos que los precedentes.

Este método de resolución podría ser expuesto de otra forma. Precisamente, al tener en cuenta que $\operatorname{sen} x - 1/4 > 0$ y añadir $-\operatorname{sen} x + 1/4$ a ambos miembros de la ecuación $\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 3x (\operatorname{sen} x - 1/4)$, obtenemos la ecuación

$$\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\right)^2 = (\operatorname{sen}^2 3x - 1)\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\right).$$

El primer miembro de esta ecuación no es negativo y el segundo no es positivo y, por consiguiente, la ecuación se satisface únicamente en aquel caso y solamente en aquel caso cuando ambos miembros son iguales a cero. Como resultado se obtiene un sistema ya conocido.

Cuarta solución. La ecuación se divide por su segundo miembro. Sin embargo, para no perder raíces, antes de hacer la división hay que cerciorarse de que éste es diferente de cero. Si analizamos el caso de $\operatorname{sen} x = 0$, se obtienen las raíces de la ecuación inicial $x = k\pi$, donde k es un número entero cualquiera y para $\operatorname{sen} 3x = 0$ obtenemos de la ecuación de nuevo $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, de ese modo tendremos las mismas raíces que acaban de hallarse.

Notando como antes, que $\operatorname{sen} x \geqslant 0$, a continuación debe considerarse que $\operatorname{sen} x > 0$. Ahora puede dividirse:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 3x} + \frac{1}{4 \operatorname{sen} x} = 1.$$

Ambos sumandos del primer miembro son positivos y por eso es posible aplicar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 3x} + \frac{1}{4 \operatorname{sen} x} \geqslant 2 \sqrt{\frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 3x}} = \frac{1}{|\operatorname{sen} 3x|} \geqslant 1.$$

En la primera desigualdad no estricta, la igualdad se obtiene si $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 3x} = \frac{1}{4 \operatorname{sen} x}$, y en la segunda, cuando $|\operatorname{sen} 3x| = 1$. Por eso el primer miembro es igual a la unidad en aquel caso y sólo en aquel caso cuando ambas desigualdades no estrictas se convierten en igualdades, es decir, cuando se cumple el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 4 \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 3x, \\ |\operatorname{sen} 3x| = 1. \end{cases}$$

Este sistema se resuelve fácilmente.

Quinta solución. Al indicar que $\operatorname{sen} x \geqslant 0$, escribimos una serie de desigualdades

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x \geqslant |\operatorname{sen} x|\,|\operatorname{sen} 3x| \geqslant \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x.$$

(Aquí hemos utilizado la desigualdad $a^2 + b^2 \geqslant 2|a|\,|b|$ para $a = \operatorname{sen} x$, $b = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 3x$, y que $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x$ y $|\operatorname{sen} 3x| \geqslant \operatorname{sen}^2 3x$).

Por lo tanto, nuestra ecuación se satisface solamente en el caso cuando ambas desigualdades no estrictas se convierten en igualdades, lo que tiene lugar al cumplir el sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} |\operatorname{sen} 3x|, \\ \operatorname{sen} x\, |\operatorname{sen} 3x| = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x. \end{cases}$$

La segunda ecuación se satisface en los cuatro casos siguientes:

$$\operatorname{sen} x = 0,\ \operatorname{sen} 3x = 0,\ \operatorname{sen} 3x = \pm 1.$$

En el primer caso tenemos los valores de $x = k\pi$, que son también las soluciones de la primera ecuación del sistema, o sea, de la ecuación inicial. El segundo caso, al sustituir en la primera ecuación, da lugar a las mismas soluciones. El tercero y cuarto casos dan la solución

$$x = (-1)^k \left(\frac{\pi}{6}\right) + k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

EJERCICIOS:

Resolver las ecuaciones y desigualdades:

1. $\sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{\operatorname{sen} x}} + \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2-x-2}} = \dfrac{3}{2}$.
2. $\sqrt{\dfrac{x^2-2x-2}{x^2+4x+2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+4x+2}{x^2-2x-2}} = 2$.
3. $\sqrt[4]{17+x} + \sqrt[4]{17-x} = 2$.
4. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \geqslant 1$.
5. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} > \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}$.
6. $\operatorname{sen}^4 x + \cos^{15} x = 1$.
7. $\sqrt{\operatorname{sen} 2x} + \sqrt{\cos 2x} = 1$.
8. $\sqrt{\operatorname{sen}^3 x} + \sqrt{\cos^3 x} = \sqrt{2}$.
9. $\sqrt{2+\cos^2 2x} = \operatorname{sen} 3x - \cos 3x$.
10. $\sqrt{5+\operatorname{sen}^2 3x} = \operatorname{sen} x + 2\cos x$.

§ 3. PROBLEMAS EN LOS CUALES LAS DIFICULTADES LÓGICAS SON MÁS ESENCIALES

Las ecuaciones, desigualdades o sistemas con *parámetros* proporcionan por lo común grandes dificultades de carácter lógico. En las primeras es necesario hallar aquellos valores de los parámetros para los cuales se cumplen algunas condiciones complementarias (por ejemplo, una ecuación tiene solución única o por el contrario, se satisface por todos los valores admisibles de x, o toda solución de un sistema de ecuaciones es la de otro, o toda solución de una desigualdad es la de otra, etc.).

Estos problemas son, en verdad, los más difíciles a examinar, y precisamente, es por ello que exigen una preparación lógica bastante elevada, es decir, lo que necesita la mayoría de los escolares. Para resolver tal tipo de problema hay que saber bien, a cada momento, lo que fue hecho ya y lo que es necesario hacer, así como lo que significan los resultados obtenidos.

1. *¿Para qué valores de a la ecuación $1 + \operatorname{sen}^2 ax = \cos x$ tiene una solución única?*

Es evidente que para el valor arbitrario de a no es posible expresar $\operatorname{sen}^2 ax$ por $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Por eso la ecuación a examinar no puede ser resuelta por medio de los métodos habituales. Es necesario encontrar un nuevo método para la resolución. Esta última será análoga a las ideas que se han utilizado en el § 1 de la Parte IV.

Gracias a la desigualdad $\cos x \leqslant 1 \leqslant 1 + \operatorname{sen}^2 ax$, la ecuación inicial se cumplirá sólo cuando se satisfaga el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{sen}^2 ax = 1, \\ \cos x = 1, \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} ax = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Por consiguiente, hay que resolver el sistema y analizar ¿para qué valores de a este sistema tiene una solución única?

Ya que la ecuación inicial es equivalente a este sistema, los valores hallados de a serán buscados.

En este instante es cuando empiezan las dificultades lógicas más serias. Precisamente, en este momento se hace claro, quién entiende bien el problema planteado y quién simplemente practica algunos cálculos sin darse cuenta de lo que hace y para qué necesita de esto.

Así, por ejemplo, una de las "resoluciones", propuestas para este sistema, es:

$$\text{“}ax = \pi k, \quad x = 2\pi n, \quad 2a\pi n = \pi k, \quad a = \frac{k}{2n}\text{”}.$$

¡Y nada más! No se da ni una palabra más, se subraya solamente la igualdad $a = k/(2n)$ que, por lo visto, se considera como la respuesta. ¡Es evidente que es imposible entender esta solucion!

A continuación expondremos una resolución que repetirá los cálculos de la "solución" precedente, pero que irá acompañada de razonamientos que allí faltaban.

Las soluciones de la primera ecuación del último sistema son las siguientes:

$$ax = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Las soluciones de la segunda ecuación son también evidentes:

$$x = 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Se necesitan los valores de x, que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones, es decir, hay que hallar los números, k y n, para los cuales de ambas series se obtiene el mismo valor de x. De ese modo debe resolverse una ecuación con dos incógnitas n y k (y más con el parámetro a):

$$2an\pi = k\pi. \tag{1}$$

Es evidente que para *cualquier* valor de a el par de los números $n = 0$, $k = 0$ es la solución de esta ecuación. A éste le corresponde la raíz $x = 0$. De esa manera, para *todo* a la ecuación inicial tiene la solución $x=0$. Si $n\neq 0$, la ecuación (1) puede escribirse en la forma siguiente

$$a=k/(2n). \tag{2}$$

Ahora conviene recordar nuestro problema principal: *en efecto, no tenemos que resolver la ecuación, sino determinar ¿para los cuáles valores de a ésta tiene una solución única?* Sin embargo, todo par de los números k y n que satisface la condición (2), proporciona la solución de la ecuación inicial $x=2\pi n=\frac{\pi k}{a}$. Como ya hemos hallado para todo valor de a una raíz de la ecuación inicial ($x=0$), tendremos que hallar aquellos valores de a para los cuales no existen las k y n enteras, con las que se cumple la relación (2). Es claro que si a es irracional, es imposible, en realidad, encontrar las k y n necesarias. El primer resultado se ha obtenido: *si a es un número irracional, la ecuación dada tiene sólo una solución.*

¿Está resuelto el problema? ¡Naturalmente que no, porque no están examinados del todo los valores racionales de a! No obstante, si a es racional, o sea $a=p/q$, es posible escribir $a=(2p)/(2q)$ y en la ecuación (2) obtener la solución $k=2p$, $n=q$. Por consiguiente, en este caso, además de $x=0$, habrá por lo menos, una solución más (en efecto habrá un número infinito de soluciones). Así, *en el caso del valor racional de a la ecuación inicial tiene muchas soluciones.* El problema está resuelto.

Conviene practicar estos razonamientos para resolver el problema para sí, o sea, para obtener la respuesta. Esto, se puede decir, es la solución "en borrador". Pasemos a demostrar cómo podría exponerse la solución "en limpio".

En realidad, $x=0$ es la raíz de la ecuación para *todo* valor de a. Debe demostrarse que para el valor irracional de a no hay otras soluciones, mientras que para a racional las hay. En efecto, al principio, a es *irracional*. De las desigualdades $\cos x\leqslant 1\leqslant 1+\operatorname{sen}^2 ax$ se deduce que x es la solución sólo cuando esta x satisface el sistema

$$\begin{cases} 1+\operatorname{sen}^2 ax=1, \\ \cos x=1, \end{cases} \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} ax=0, \\ \cos x=1. \end{cases}$$

Si $x\neq 0$ es la solución del último sistema, entonces, en primer lugar, $ax=\pi k$, k es cierto número entero y, en segundo lugar, $x=2\pi n$, n es cierto número entero, pero $n\neq 0$. En este caso $2a\pi n=\pi k$, de donde $a=k/(2n)$, es decir, a es un número racional, lo que contradice a la suposición. Ahora, supongamos que a es *racional* $a=p/q$. En este caso $x=2\pi q$ que, evidentemente, será una solución y, además, diferente de cero. Por lo tanto, la ecuación dada tiene una solución única solamente cuando a es irracional.

Es posible también resolver este problema gráficamente. Sea $a\neq 0$, ya que en efecto la ecuación tiene un número infinito de soluciones cuando $a=0$. Luego escribamos nuestra ecuación así:

$$\operatorname{sen}^2 ax = \cos x - 1$$

y designemos

$$y_1 = \cos x - 1, \quad y_2 = \operatorname{sen}^2 ax = \frac{1-\cos 2ax}{2}.$$

Después de esto, tracemos ambas gráficas (fig. 168). Es claro que la ecuación inicial tiene su solución sólo en el caso en que las curvas de las funciones y_1 e y_2 tengan un punto común.

En la figura se ve que para todo valor de a hay un punto de intersección de las curvas: $x=0$. Se ve también que las intersecciones posteriores son posibles sólo en los puntos en que ambas curvas se tocan con el eje Ox, es decir, en el lugar donde simultáneamente $\operatorname{sen}^2 ax = 0$ y $\cos x = 1$. Pero $\operatorname{sen}^2 ax = 0$ para $ax = n\pi$, siendo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mientras que $\cos x = 1$ para $x = 2k\pi$, siendo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Por lo tanto, el punto $x=0$ será el único punto de encuentro de las curvas solamente cuando $2ak\pi \neq n\pi$ no para cualesquier valores enteros de n y k, diferentes de cero. En otras palabras, se ha demostrado que la solución única tiene lugar sólo cuando $a \neq \neq n/(2k)$, siendo n y k números enteros, diferentes de cero. Más adelante se muestra, como se hizo anteriormente, que esto tiene lugar cuando a sea un número irracional.

Para resolver problemas con parámetros frecuentemente conviene razonar del modo siguiente. Dado que el parámetro a es cierto número fijo que *satisface a los datos del problema*; estos valores de a los vamos a denominar *convenientes*. Ahora hace falta deducir de los corolarios

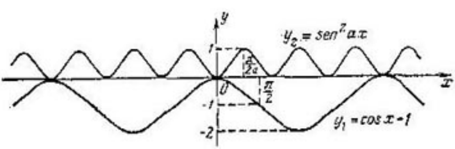


Fig. 168

los datos del problema y suposiciones respecto de a. Gracias a estos se obtienen algunas condiciones a las que tienen que satisfacerlas los valores convenientes del parámetro. De esa manera, los valores del parámetro que no satisfagan estos corolarios, automáticamente no son convenientas y sólo tenemos que analizar aquellos valores del parámetro que satisfagan los corolarios obtenidos. En particular, si a estos corolarios los satisfacen algunos valores concretos, el problema se reduce sencillamente a la comprobación de estos valores.

2. *Hallar todos los valores de a para los cuales el sistema*

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

tiene sólo una solución (a, x, y son los números reales).

De acuerdo con lo que hemos dicho, al principio supongamos que a es el número conveniente, es decir, el número que satisface los datos del problema. En otras palabras, para este valor de a el sistema de ecuaciones dado tiene sólo una solución, que se designa con (x_0, y_0). Sin embargo, es fácil notar que ambas ecuaciones del sistema no se modifican al sustituir x por $-x$, lo que significa que en el caso del valor examinado el par $(-x_0, y_0)$ es también la solución del sistema. No obstante, según la suposición inicial respecto de a, el sistema tiene una solución *única*. La salida de esta contradicción es una: (x_0, y_0) y $(-x_0, y_0)$ son el mismo par. Esto significa sencillamente que $x_0 = -x_0$, o sea $x_0=0$. Estos razonamientos no dan ninguna información acerca del número y_0. Pero, al poner la solución $(0, y_0)$ en el sistema inicial, tenemos las igualdades

$$1=y_0+a, \quad y_0^2=1.$$

De aquí se deduce que y_0 es igual a 1 ó a -1, y, de acuerdo con esto, a se iguala a 0 ó a 2.

De esa manera, hemos demostrado que, si a es el número conveniente, entonces $a=0$ ó $a=2$. Subrayamos sobre todo que los razonamientos anteriores no han demostrado, en ningún caso, que los números 0 y 2 son convenientes. Por el contrario, hay que determinarlo.

Al principio examinemos el valor de $a=0$. En este caso tenemos el sistema

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \tag{3}$$

Si es posible demostrar que este sistema tiene una solución, esto significará que el valor de $a=0$ satisface a los datos del problema. Indiquemos que el valor de $a=0$ ha sido obtenido por medio de la sustitución del par (0, 1) en el sistema inicial. Es fácil comprobar que este par satisface realmente el sistema (3) y, de ese modo, cuando $a=0$, el sistema inicial tiene ya una solución. Aclaremos, ¿hay o no otras soluciones para el sistema (3)?

Este último no puede resolverse con ayuda de los métodos habituales. Por eso aplicaremos razonamientos especiales. De la segunda ecuación de este sistema se obtiene que $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$, de donde resulta que $x^2\leqslant |x|$ e $|y|\leqslant 1$. Además, $2^{|x|}\geqslant 1$, ya que $|x|\geqslant 0$. De todas estas desigualdades tenemos

$$2^{|x|}+|x|\geqslant 1+x^2\geqslant y+x^2,$$

y, por consiguiente, la primera ecuación se satisface solamente cuando en ambas desigualdades no estrictas tendrá lugar la igualdad, es decir, cuando

$$2^{|x|}=1,\ |x|=x^2,\ y=1,$$

lo que es válido para $x=0$, $y=1$. Por lo tanto, si $a=0$, el sistema dado tiene una solución $(0, 1)$.

Ahora examinemos el valor de $a=2$. En este caso tenemos el sistema

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+2, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Como antes, indiquemos que el par $(0, -1)$ es la solución y de nuevo debe aclararse ¿si hay otras soluciones o no? Pero al sustituir $x=1$, $y=0$, resulta que el par $(1, 0)$ es también la solución del sistema y, por consiguiente, para $a=2$ el sistema tiene varias soluciones.

Así, el sistema dado tiene una solución única solamente para $a=0$.

La solución expuesta requiere algunas palabras de carácter no matemático, sino más bien psicológico. Como suele suceder a menudo, es fácil entender esta solución, pero ¿cómo hallarla? Sin duda, no es posible, en el caso general, dar una respuesta universal.

En nuestra solución se encuentran tres suposiciones.

Primero, hemos observado que el sistema no cambia al sustituir x por $-x$, lo que nos da un avance considerable. Es imposible decir cómo anotarlo, pero cada uno podría hacerlo si conociera la noción de paridad e imparidad de las funciones y supiera utilizarlas.

Segundo, hemos empezado a resolver el sistema (3) con ayuda del método no habitual, al utilizar las desigualdades. Esta suposición es un poco más complicada, pero los ejemplos expuestos en los párrafos precedentes muestran que para resolver las ecuaciones suele ser necesario el empleo de desigualdades.

Tercero, hemos deducido que para $a=2$ el sistema inicial tiene una solución más: $x=1$, $y=0$. Sencillamente hemos tratado de escoger la solución y tuvimos éxito. Este método resultó acertado solamente debido a la presencia de las "buenas" soluciones de números enteros. En algunos casos esta selección es la única vía posible.

3. *Hallar todos los valores de a y b para los cuales el sistema*

$$\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=b, \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

tiene una sola solución (a, b, x, y, z son números reales).

Supongamos que (a, b) es un par conveniente de los valores de los parámetros y (x_0, y_0, z_0) es la solución única respectiva. Sin embargo, es fácil anotar que el sistema no varía si en éste, simultáneamente, se sustituyen las x por $-x$ e y por $-y$. De aquí se deduce que el trío $(-x_0, -y_0, z_0)$ es también la solución del sistema y, como en el problema precedente, saquemos la conclusión de que $x_0 = y_0 = 0$. Sustituyendo, ahora, el trío $(0, 0, z_0)$ en el sistema, obtenemos $z_0 = a$, $z_0 = b$, $z_0^2 = 4$, de donde $z_0 = \pm 2$ y $a = b = \pm 2$.

De esa manera, si el par (a, b) es conveniente, entonces $a = b = 2$ ó $a = b = -2$.

De nuevo, como en el problema precedente, es necesario determinar que estos pares de los valores de parámetros son convenientes.

Para $a = b = 2$ tenemos el sistema

$$\begin{cases} xyz + z = 2, \\ xyz^2 + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

una de cuyas soluciones es $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, lo que es fácil comprobar. De la segunda y primera ecuaciones se deduce que $xy(z^2 - z) = 0$. Si $x = 0$, entonces, a continuación, de la segunda y tercera ecuación obtenemos $z = 2$ e $y = 0$. Esta solución ya es conocida. Se obtiene la misma solución si $y = 0$.

Ahora consideramos que $z^2 - z = 0$, es decir, $z = 0$ ó $z = 1$. No obstante, si $z = 0$ obtenemos que las dos primeras ecuaciones son contradictorias y, cuando $z = 1$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 3, \end{cases}$$

el cual tiene cuatro soluciones reales de lo que es fácil cerciorarse. De ese modo, para $a = b = 2$ el sistema inicial tiene cinco soluciones y por esto el par $a = b = 2$ no es conveniente.

A continuación, supongamos que $a = b = -2$. Entonces tenemos el sistema

$$\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz^2 + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Una de las soluciones de este sistema es $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$. No es difícil cerciorarse de esto. Los razonamientos semejantes a los expuestos muestran ahora que este sistema no tiene otras soluciones y por lo tanto para $a = b = -2$ el sistema inicial tiene una solución única, o sea, este par de los valores de parámetros es conveniente.

Así, a los datos del problema los satisfacen solamente los valores $a = b = -2$.

4. *Hallar todos los valores de a para los cuales el sistema*

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2 y = 1 \end{cases}$$

tiene, por lo menos, una solución para cualquier valor de b (a, b, x, y, son números reales).

Dado que a es un valor conveniente de parámetro, es decir, un valor para el cual el sistema en cuestión tiene por lo menos una solución para *todo* valor de b. Elijamos algún valor de b; esto puede hacerse arbitrariamente, pero elijamos b de manera que el sistema tome una forma más simple. Es claro que es mejor aceptar $b=0$. En este caso el sistema toma la forma siguiente

$$\begin{cases} (x^2+1)^a = 1, \\ a + x^2 y = 1. \end{cases}$$

Al mismo tiempo, ya que a es un valor conveniente, este sistema tiene por lo menos una solución que designaremos con (x_0, y_0).

En esta solución x_0 es igual o no igual a cero. Si $x_0 = 0$, de la segunda ecuación obtenemos $a=1$ y si $x_0 \neq 0$, entonces $x_0^2 + 1 \neq 1$, y en este caso de la primera ecuación tenemos $a=0$.

Por lo tanto, si a es el número conveniente, entonces $a=0$ ó $a=1$. Ahora hace falta poner en claro que estos valores son realmente convenientes.

Cuando $a=0$, el sistema tiene la forma siguiente

$$\begin{cases} (b^2+1)^y = 1, \\ bxy + x^2 y = 1; \end{cases}$$

y se necesita saber si este sistema tiene sus soluciones para todos los valores de b. Si $b \neq 0$, de la primera ecuación resulta que $y=0$, y en este caso la segunda ecuación es contradictoria. Por consiguiente, el valor de $a=0$ no es conveniente.

Dado que $a=1$. Entonces el sistema tiene la forma siguiente

$$\begin{cases} x^2 + (b^2+1)^y = 1, \\ bxy + x^2 y = 0. \end{cases}$$

Es evidente que $x=y=0$ es una solución para todo valor de b, y por lo tanto, $a=1$ es el valor conveniente.

De ese modo, a los datos del problema los satisface el valor único $a=1$.

5. *Hallar todos los números de a para cada uno de los cuales toda raíz de la ecuación*

$$\operatorname{sen} 3x = a \operatorname{sen} x + (4 - 2|a|) \operatorname{sen}^2 x \tag{4}$$

es también la raíz de la ecuación

$$\operatorname{sen} 3x + \cos 2x = 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos 2x \tag{5}$$

y al contrario, toda raíz de la segunda ecuación es la raíz de la primera.

Este problema puede formularse más brevemente: *¿para qué a las ecuaciones* (4) *y* (5) *son equivalentes*? Para poner en claro la equivalencia de dos ecuaciones existen, en general, dos procedimientos: primero, debe obtenerse cada ecuación de la otra con ayuda de ciertas transformaciones y segundo, de acuerdo con la determinación de la equivalencia conviene demostrar que toda raíz de una ecuación es la raíz de la otra y viceversa.

En nuestro ejemplo, el primer procedimiento, según parece, no es aplicable y conviene aprovecharse del segundo. Sin embargo, aquí hay algunas dificultades. Es difícil razonar sobre la coincidencia de las raíces de dos ecuaciones que son tan distintas: lo único que aquí puede ayudarnos, es el conocimiento de todas las raíces o sólo de las raíces de una de estas ecuaciones.[1]

En este caso resulta que la ecuación (5) se resuelve fácilmente y por esto el problema se reduce al siguiente: *¿para cuáles valores de a la ecuación* (4) *tiene las mismas raíces que la* (5)?

Para abreviar razonamientos designemos $\operatorname{sen} x$ con y. Luego la ecuación (5) se reduce a la forma siguiente:

$$2y^2 - y = 0. \tag{6}$$

La última ecuación tiene las raíces $y_1 = 0$, $y_2 = 1/2$. Igualmente, después de sustituir $\operatorname{sen} 3x = 3y - 4y^3$, la ecuación (4) se reduce a

$$[4y^2 + (4 - 2|a|)y + a - 3]y = 0. \tag{7}$$

Al resolver este problema muchos estudiantes efectuan la sustitución $\operatorname{sen} x$ por y, lo que les "ayuda" a cometer dos errores graves. Así, muchos deciden al instante que no existen los valores necesarias de a, ya que la ecuación (6) es cuadrática, mientras que la (7) es cúbica, y por lo tanto, estas no son equivalentes, pues tienen un número distinto de raíces. Este razonamiento tiene dos errores. En primer lugar, las ecuaciones cuadrática y cúbica pueden ser equivalentes (por ejemplo, ecuaciones $x^2 = 0$ y $x^3 = 0$ ambas tienen *una* raíz, $x = 0$) y en segundo lugar, la ecuación (4) y la (5) pueden ser equivalentes, como nos cercioraremos más adelante, incluso si las ecuaciones (6) y (7) no son equivalentes.

Precisamente en esto consiste el segundo error cometido. En verdad, a primera vista se representa absolutamente evidente que nuestro problema se ha reducido a lo siguiente: ¿para cuál valor de a la ecuación (7) tiene las raíces 0 y $\frac{1}{2}$? Pero en realidad, si no olvidamos que $y = \operatorname{sen} x$, es posible indicar una posibilidad más para que el valor de a sea conveniente: si la ecuación (7) tiene las raíces 0, 1/2, y su tercera raíz y_3 por su módulo es mayor que 1, las ecuaciones (4) y (5) son equivalentes, es decir, el valor respectivo $\operatorname{sen} x = y_3$ no da lugar a soluciones complementarias a la ecuación (4). Además, las ecuaciones (4) y (5) son naturalmente equivalentes en el caso en que la tercera raíz de la ecuación (7) es igual a 0 ó 1/2.

Ahora nuestro problema es completamente claro: *deben encontrarse*

---

[1] Es posible dar ejemplos más evidentes de esta situación: las ecuaciones $x^2 = 2x^3 - 1$ y $x2^x = 2$ (en el intervalo de los números reales), son equivalentes ya que su raíz única es $x = 1$, pero hagan tentativas para cerciorarse de su equivalencia sin resolver preliminarmente ambas ecuaciones.

los valores de a con los que la ecuación (7) *tiene las raíces* 0, 1/2, *mientras que su tercera raíz es igual a* 0 ó 1/2, *o supera, por su módulo, a* 1.

En seguida se ve que 0 es la raíz de la ecuación (7), es por esto que examinaremos la ecuación

$$4y^2+(4-2\,|a|)\,y+a-3=0. \tag{8}$$

Una de las raíces de esta ecuación debe ser 1/2. Sustituyendo en ésta $y=1/2$, obtenemos que 1/2 será la raíz si $a=|a|$, o sea, si $a\geqslant 0$. Según el teorema de Viete, la segunda raíz es $(a-3)/2$ y en concordancia con lo que se ha dicho anteriormente, el valor de a será conveniente en los tres casos siguientes:

$$1)\ \frac{a-3}{2}=0, \qquad 2)\ \frac{a-3}{2}=\frac{1}{2}, \qquad 3)\ \left|\frac{a-3}{2}\right|>1$$

(al mismo tiempo debe tomarse en consideración que $a\geqslant 0$).

De ahí obtenemos la respuesta:

$$a=3, \quad a=4, \quad 0\leqslant a<1, \quad a>5.$$

6. *Hallar todos los números de a, en el caso de cada uno de los cuales toda raíz de la ecuación*

$$2\,\mathrm{sen}^7 x-(1-a)\,\mathrm{sen}^3 x+(2a^3-2a-1)\,\mathrm{sen}\,x=0 \tag{9}$$

es, al mismo tiempo, la raíz de la ecuación

$$2\,\mathrm{sen}^6 x+\cos 2x=1+a-2a^3+a\cos^2 x \tag{10}$$

y viceversa: que toda raíz de la segunda ecuación es la de la primera ecuación.

Aquí ya ambas ecuaciones iniciales son complejas y por esto no es posible obrar del mismo modo como en el caso precedente. Sin embargo, a primera vista puede anotarse que la ecuación (9) tiene las soluciones del tipo $x=k\pi$, donde k es un número entero cualquiera (y es posible que tenga algunas soluciones más). Esta nota conduce a la solución del problema.

Supongamos que a es el valor conveniente del parámetro. En este caso los valores $x=k\pi$ que son las raíces de la ecuación (9), son también las de la ecuación (10), lo que, al mismo tiempo, da la igualdad $a^3=a$ (ya que $\mathrm{sen}^6 k\pi=0$, $\cos 2k\pi=\cos^2 k\pi=1$). Por lo tanto, los valores convenientes tienen que ser elegidos de los tres números: 0, 1 y -1. Ahora conviene comprobar estos tres valores.

Dado $a=0$, entonces las ecuaciones se transforman en

$$\mathrm{sen}\,x\,(\mathrm{sen}^2 x-1)\,(2\,\mathrm{sen}^4 x+2\,\mathrm{sen}^2 x+1)=0$$
$$\mathrm{sen}^2 x\,(\mathrm{sen}^2 x-1)\,(\mathrm{sen}^2 x+1)=0$$

Debido a que $1+\mathrm{sen}^2 x>0$ y $2\,\mathrm{sen}^4 x+2\,\mathrm{sen}^2 x+1>0$, estas ecuaciones son equivalentes.

Si $a=1$, entonces las ecuaciones se escriben de nuevo en la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} x\,(2\operatorname{sen}^6 x-1)=0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x\,(2\operatorname{sen}^4 x-1)=0.$$

Como la primera ecuación tiene la solución $\operatorname{sen} x=\sqrt[6]{1/2}$, que no satisface a la segunda ecuación, estas ecuaciones no son equivalentes.

Si $a=-1$, en este caso tenemos las ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x\,(2\operatorname{sen}^6 x-2\operatorname{sen}^2 x-1)=0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x\,(2\operatorname{sen}^4 x-3)=0.$$

Ya que $2\operatorname{sen}^4 x-3<0$ y $2\operatorname{sen}^6 x-2\operatorname{sen}^2 x-1=2\operatorname{sen}^2 x\,(\operatorname{sen}^4 x-1)-1<0$, es evidente que estas ecuaciones son equivalentes. Así, los datos del problema se satisfacen solamente cuando $a=0$ y $a=-1$. Indiquemos que en este problema muchos estudiantes, al sustituir $\operatorname{sen}^2 x$ por y, tampoco pudieron entender el caso del valor de $a=-1$, ya que en las desigualdades que es necesario demostrar en este caso se utiliza esencialmente que $0\leqslant y\leqslant 1$.

7. *Encontrar todos los pares de números a y b para los cuales todo par de números x, y ($x\neq\pi/2+k\pi$, $y\neq\pi/2+n\pi$; $k, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) que satisface a la ecuación $x+y=a$*, satisface también la ecuación

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=b. \tag{11}$$

Sean a y b un par conveniente de valores de los parámetros. Tomemos el par de los números $x=0$, $y=a$ que satisface, evidentemente, la ecuación $x+y=a$. Si $a\neq\pi/2+n\pi$, este par satisface las limitaciones de x e y impuestas por los datos del problema. Por consiguiente, debido a (11), debe cumplirse la igualdad

$$\operatorname{tg} a=b.$$

Luego tomemos el par de los números $x=\pi/4$, $y=a-\pi/4$ que también satisface la ecuación $x+y=a$. Si $a\neq 3\pi/4+k\pi$, este par satisface también las limitaciones de x e y, y por lo tanto (ya que a y b han sido presupuestos como valores convenientes), debe cumplirse la igualdad

$$1+2\operatorname{tg}\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=b. \tag{12}$$

Ya que $b=\operatorname{tg} a$, entonces a, satisface la ecuación

$$1+2\operatorname{tg}\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg} a,$$

la cual se reduce fácilmente a la ecuación cuadrática $\operatorname{tg}^2 a-2\operatorname{tg} a+1=0$. Por consiguiente $\operatorname{tg} a=1$ y los pares convenientes a y b hay que buscarlos entre una cantidad infinita de pares:

$$a=\frac{\pi}{4}+m\pi,\ b=1, \quad \text{siendo } m=0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots$$

Determinemos cuáles de estos pares, en realidad, son convenientes. Dado que para algún número entero m, $x+y=\pi/4+m\pi$ y con todo $x\neq\pi/2+k\pi$, $y\neq\pi/2+n\pi$; k, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$ En este caso $y=\pi/4+m\pi-x$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y&=\\ &=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+m\pi-x\right)+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+m\pi-x\right)=\\ &=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\\ &=\operatorname{tg}x+\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}.\end{aligned}$$

La última expresión es igual a 1. Por lo tanto, todos los pares $a=\pi/4+m\pi$, siendo $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$, $b=1$ son convenientes.

No obstante, la resolución no está concluida, ya que durante los razonamientos han sido excluidos los valores $a=\pi/2+n\pi$ y $a=3\pi/4+k\pi$, donde k, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$ Se necesita analizar también estos valores.

Sea $a=\pi/2+n\pi$, donde n es un número entero. En este caso es evidente que $a\neq3\pi/4+k\pi$ y por esto debe tener lugar la igualdad (12) de la cual, para los valores examinados de a se obtiene que $b=3$. Determinemos que hay o no entre los pares siguientes

$$a=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ b=3,\quad \text{donde } n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

los que son convenientes. El par $x=-\pi/4$, $y=3\pi/4+n\pi$ satisface la ecuación $x+y=a$; por otro lado,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+n\pi\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+n\pi\right)=-1\neq3,$$

y, por lo tanto, entre los pares a examinar a, b no se encuentren pares convenientes.

Ahora supongamos que $a=3\pi/4+k\pi$, siendo k un número entero. Puesto que en este caso $a\neq\pi/2+n\pi$, debe tener lugar la igualdad $\operatorname{tg} a=b$, es decir, $b=-1$. Determinemos que hay o no entre los pares

$$a=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ b=-1,\quad \text{siendo } k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

los que son convenientes. El par $x=3\pi/8$, $y=3\pi/8+k\pi$ satisface la ecuación $x+y=a$; por otro lado

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi\right)+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi\right)=2\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}+\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{8}>0,$$

(ya que el ángulo $3\pi/8$ se encuentra en el primer cuadrante) y por esto el primer miembro de la igualdad (11) es diferente de -1 y, por consiguiente, entre los pares a examinar a, b no se encuentran los que son convenientes.

La respuesta definitiva es la siguiente: a los datos del problema los satisfacen una cantidad infinita de pares:

$$a = \pi/4 + m\pi, \ b = 1, \quad m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

En conclusión de este ejemplo señalemos que muchos estudiantes, al resolverlo, han propuesto otras soluciones, a veces, más breves. Sin embargo, en todas estas soluciones algunos hechos se han considerado evidentes, aunque la argumentación estricta de éstos exige razonamientos muy prolongados y detallados. Al resolver estos problemas, por desgracia, estos razonamientos no se exponen y es más, no se expresa el entendimiento de su necesidad para que la solución pueda considerarse completa.

8. *Hallar todos los valores de a para los cuales todo valor de x que satisface la desigualdad*

$$ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0,$$

no supera a 2 *por su módulo.*

Los datos de este problema, según su forma lógica, son análogos a los del problema precedente. Precisamente, deben hallarse los valores del parámetro a, para los cuales de la desigualdad $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$ se deduce la desigualdad $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Pero el método de solución aplicado en el caso anterior aquí no da resultado; en primer lugar, debido a que no estamos analizando las ecuaciones sino las desigualdades.

En este caso es necesario determinar, ¿para cuáles valores de a todas las soluciones de la desigualdad dada se encuentran en el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$? Si $a \neq 0$, la desigualdad es cuadrática y hay que examinar, desde su principio, este caso general. Sea $a \neq 0$. Es conocido que las soluciones de una desigualdad cuadrática, si éstas existen, forman en el eje numérico un intervalo o dos intervalos infinitos, o toda la multitud de números reales, y todo esto depende de los signos del discriminante y del coeficiente del término mayor. Por esto, en seguida, conviene calcular el discriminante del trinomio cuadrático que se encuentra en el primer miembro de la desigualdad

$$D = (1 - a^2)^2 + 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2.$$

De esa manera, $D > 0$ para todo valor de a, por esto las raíces del trinomio son reales y diferentes; éstas se hallan fácilmente: $x_1 = a$, $x_2 = -1/a$.

Ahora, en función del signo del número a, las soluciones de la desigualdad dada forman un intervalo entre las raíces (si $a < 0$, ramas de la parábola se dirigen hacia abajo) o dos intervalos infinitos (si $a > 0$).

Según los datos, son necesarios los valores de a para los cuales todas las soluciones de la desigualdad se encuentran en el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Por lo tanto, los valores de $a > 0$ no son convenientes, es decir, dos intervalos infinitos no pueden situarse dentro de un intervalo finito. Nos quedan por examinar solamente los valores de $a < 0$. En este caso, $x_1 < 0 < x_2$ y la solución de la desigualdad dada será el intervalo $a < x < -1/a$.

Es necesario que todo el intervalo $a < x < -1/a$ se encuentre en el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$, lo que se cumple, evidentemente, cuando y sólo cuando los extremos de este intervalo se encuentren en el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$ (se admite la coincidencia de los puntos límites), es decir, se cumplen las desigualdades

$$-2 \leqslant a < -\frac{1}{a} \leqslant 2.$$

De la desigualdad $-1/a \leqslant 2$, tomando en consideración que $a < 0$, obtenemos que $a \leqslant -1/2$ y, por consiguiente, $-2 \leqslant a \leqslant -1/2$.

Así, toda solución de la desigualdad inicial, por su módulo, no supera a 2 para $-2 \leqslant a \leqslant -1/2$, pero esto se ha obtenido al suponer que $a \neq 0$. Para concluir la solución nos queda por examinar este caso particular. Cuando $a = 0$, la desigualdad inicial tiene la forma $x > 0$ y no todas sus soluciones, por su módulo, superan a 2, por lo tanto, el valor $a = 0$ no es conveniente. De ese modo la desigualdad obtenida anteriormente

$$-2 \leqslant a \leqslant -1/2$$

es la respuesta definitiva.

9. *Hallar todos los valores de a con los cuales para todos los valores de x, que por su módulo no superan a 1, se cumple la desigualdad*

$$\frac{ax - a(1-a)}{a^2 - ax - 1} > 0.$$

Ante todo, hay que sustituir la desigualdad dada por la desigualdad cuadrática que es equivalente a ésta:

$$(ax + 1 - a^2) \cdot [ax - a(1-a)] < 0.$$

Al denominar como cuadrática a esta desigualdad, nos hemos dado prisa, ya que aún no se ha comprobado que el coeficiente de x^2 sea diferente de cero después de abrir los paréntesis. Este coeficiente es igual a a^2 y se iguala a cero cuando $a = 0$, pero si $a = 0$ la desigualdad dada tiene la forma $0 < 0$, es decir, no se cumple para ninguna x. Por esto, $a = 0$ no es el valor conveniente y es necesario excluirlo del análisis, considerando que en todos los casos $a \neq 0$.

Al obtener la desigualdad cuadrática, la resolveremos del mismo modo como lo hemos hecho en el caso precedente. Aquí se ve en seguida que las raíces del trinomino cuadrático son reales, por lo tanto, no es menester determinar el discriminante. Además, el coeficiente a^2 del término mayor es positivo y, por consiguiente, las soluciones de la desigualdad forman un intervalo entre sus raíces $x_1 = (a^2-1)/a$, $x_2 = 1-a$, si estas raíces son distintas. Pero, al coincidir las raíces, la desigualdad no se satisface para ningún valor de x y por lo tanto, los valores respectivos no nos interesan.

De ese modo, son necesarios los valores de a con los cuales el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$ se encuentra entre los números $a-1/a$ y $1-a$. Sin embargo, para escribir esta condición geométrica en el lenguaje de las desigualdades hay que saber cuál número de estos dos es mayor. Esto depende, por lo visto, del número a y por eso conviene examinar dos casos.

a) $(a^2-1)/a < 1-a$. Como en el problema precedente, para que el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$ se encuentre completamente dentro del intervalo $(a^2-1)/a < x < 1-a$ es menester que sus extremos, los puntos -1 y 1, se encuentren en el interior del intervalo, o sea, deben cumplirse las desigualdades

$$\frac{a^2-1}{a} < -1 < 1 < 1-a.$$

(Las coincidencias de los puntos extremos, es decir, las igualdades $a-1/a = -1$ y $1-a=1$ no se admiten, ya que, por ejemplo, si $a-1/a=-1$, el número -1, que se encuentra en el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, no está en el intervalo $-1 < x < 1-a$).

De la desigualdad $1 < 1-a$ se deduce que $a<0$, entonces de la desigualdad $(a^2-1)/a < -1$ obtenemos que $a^2-1 > -a$, ó $a^2+a-1>0$. Las soluciones de esta desigualdad son los valores $a<(-1-\sqrt{5})/2$ y $a>(-1+\sqrt{5})/2$. Como $a<0$, utilicemos solamente los valores $a<(-1-\sqrt{5})/2$.

Ahora entre los valores obtenidos de a es necesario escoger aquéllos que satisfacen la condición a), es decir, la desigualdad $a-1/a < 1-a$. No obstante, en el caso de los valores $a<(-1-\sqrt{5})/2$ esta condición se satisface automáticamente: en efecto, los valores mencionados han sido obtenidos como soluciones de las desigualdades

$$a-1/a < -1 < 1 < 1-a.$$

b) $1-a < (a^2-1)/a$. En este caso hay que resolver las desigualdades

$$1-a < -1 < 1 < \frac{a^2-1}{a}.$$

De la desigualdad $1-a<-1$ resulta que $a>2$, entonces de $(a^2-1)/a>1$ se deduce que $a^2-1>a$ ó $a^2-a-1>0$. Las soluciones de esta desigualdad son los valores $a<(1-\sqrt{5})/2$ y $a>(1+\sqrt{5})/2$. Ya que $a>2$, utilicemos sólo los valores $a>2$. Como en el caso a), estos valores automáticamente satisfacen a la condición b). Así, a los datos del problema los satisfacen los valores $a<(-1-\sqrt{5})/2$ y $a>2$.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que si las ecuaciones

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0 \text{ y } 2a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x + 2c = 0$$

ambas no tienen soluciones, entonces $a = b = 0$, $c \neq 0$.

2. ¿Para qué valores del parámetro a los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

son equivalentes?

3. ¿Para qué valores del parámetro a las ecuaciones

$$x^2 + x + a = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + ax + 1 = 0$$

a) tienen una raíz común; b) son equivalentes? (a, x son números reales).

4. Hallar los números de a para cada uno de los cuales toda raíz de la ecuación

$$a \cos 2x + |a| \cos 4x + \cos 6x = 1$$

es también la raíz de la ecuación

$$\operatorname{sen} x \cos 2x = \operatorname{sen} 2x \cos 3x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 5x$$

y, viceversa, cada raíz de la segunda ecuación es la raíz de la primera.

5. Hallar todos los números de a con cada uno de los cuales toda raíz de la ecuación

$$4 \cos^2 x - \cos 3x = a \cos x - |a - 4| (1 + \cos 2x)$$

es también la raíz de la ecuación

$$2 \cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x,$$

y, viceversa, cada raíz de la segunda es también la raíz de la primera.

6. Hallar todos los valores de a y b para los cuales el sistema

$$\begin{cases} \left| \dfrac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

tiene solamente una solución (a, b, x, y, son números reales, $x > 0$).

7. Hallar todos los valores de a para los cuales el sistema

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1) by^2 = a^2, \\ (a-1) x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

tiene por lo menos una solución para cualquier valor de b (a, b, x, y son números reales).

8. Hallar todos los valores de a para los cuales el sistema

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = \dfrac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3 + ax^2 y + xy^2 = 1 \end{cases}$$

tiene por lo menos una solución y toda su solución satisface la ecuación $x + y = 0$ (a, x, y son números reales).

9. Dada la desigualdad $ax + k^2 > 0$. ¿Para qué valores de a:

a) la desigualdad se cumple con todos los valores de x y k?

b) se encontrarían los valores de x y k para los cuales se cumple la desigualdad?

c) se encontraría tal valor de x con el cual se satisface la desigualdad para todo valor de k?

d) se encontraría un valor de k con el cual la desigualdad se cumple para todo valor de x?

e) se encontraría tal valor de k con el cual se satisface la desigualdad para todos los valores de x?

f) se encontraría un valor de x en el caso en que la desigualdad se cumple para todo valor de k?

§ 4. PROBLEMAS VINCULADOS CON LA DISPOSICIÓN DE LAS RAÍCES DEL TRINOMIO CUADRÁTICO

El trinomio cuadrático puede calificarse como la función principal de las Matemáticas escolares. Si no se toma en consideración la función lineal absolutamente simple, es posible considerar que esta función es única para que en las Matemáticas escolares se demuestran estrictamente todas las propiedades necesarias para resolver problemas y en la teoría. Cada estudiante debe tener buen conocimiento de las propiedades necesarias del trinomio cuadrático.

Además de los problemas, cuya solución se obtiene por medio de los teoremas conocidos (soluciones de las ecuaciones y desigualdades cuadráticas, búsqueda de las condiciones de existencia de las raíces reales, determinación de los signos de las raíces, búsqueda de los valores máximo y mínimo del trinomio cuadrático), se encuentran (y también a menudo) los problemas que no pueden resolverse mediante estos teoremas simplísimos.

Sin tener la posibilidad de describir por completo todos los tipos posibles de los problemas a base del trinomio cuadrático, aquí se examinan solamente los problemas vinculados con la disposición de las raíces. Entre los problemas escolares enumerados más arriba se encuentra uno de este tipo: en efecto, determinar los signos de las raíces no es más que determinar la disposición de las raíces respecto al punto 0. Según se sabe este problema se resuelve con ayuda del teorema de Viete. ¿Qué hacer si se necesita determinar la disposición de las raíces respecto a cualquier otro punto? ¿Es posible que el punto 0 sea "mejor" que otros puntos y por eso el problema se resuelve respecto al primero de una vez, mientras que respecto a otros se tengan dificultades? Sin duda no es mejor. El punto 0 se diferencia, en este sentido, de otros puntos únicamente en lo siguiente: para este punto 0 se tiene el teorema de Viete, mientras que para los demás hay que idear un teorema igual, lo que es indispensable para resolver este problema.

Sin embargo, en este caso nos encontraremos en una situación difícil: si empezáramos a idear los teoremas con ayuda de los cuales todos los problemas, con respecto a la disposición de las raíces, se resuelven sin dificultades, lo mismo que se determinan los signos de las raíces, entonces el número de estos teoremas sería tan grande que no podría sencillamente retenerlos en la memoria. En efecto, es absolutamente natural (esto se encuentra en realidad en los problemas) interesarse por la disposición de las raíces en algún intervalo dado

$c<x<d$, o en un intervalo infinito $x<c$, o en otro infinito $x>d$. Con relación a cada uno de estos intervalos pueden plantearse, por ejemplo, las preguntas siguientes: ¿Para qué condición en este intervalo se encuentran ambas raíces; o no hay raíces; o hay solamente una raíz; o hay por lo menos una raíz? Fundamentándonos en estas preguntas podemos formular doce problemas diferentes. ¿Si a la par con los intervalos mencionados se analizan también los intervalos con los extremos incluidos del tipo $c\leqslant x<d$ ó $x\geqslant d$? ¿Y si se tiene en cuenta que las propiedades del trinomio cuadrático dependen en mucho del signo de su coeficiente mayor (coeficiente de x^2)? Es del todo evidente que la cantidad de teoremas necesarios es inmensa. Por lo tanto, aquí no podemos utilizar el método de la recordación de los teoremas. No nos queda otra salida que aprender a idear un teorema para cada problema concreto, así como también, hacer lo posible por memorizar los más importantes.

Para idear estos teoremas es necesario no sólo conocer las propiedades del trinomio cuadrático sino dominar libremente estas propiedades y, ante todo, saber razonar en dos lenguajes: la algebraica y la geométrica. Esto significa que hay que saber exponer la interpretación geométrica en la gráfica para toda propiedad definida oralmente o en la lenguaje algebraica. Y viceversa, toda propiedad de la gráfica hay que describirla con las palabras y por los datos algebraicos. Por ejemplo, el coeficiente mayor es menor que cero. En este caso, las ramas de la parábola están dirigidas hacia abajo, el trinomio no tiene raíces reales. Esto significa que: la parábola no interseca y no toca al eje de abscisas; la gráfica del trinomio ax^2+bx+c se encuentra por encima del eje de abscisas, es decir, $a>0$ y $b^2-4ac<0$. Esta última afirmación geométrica puede exponerse por lo menos por tres procedimientos diferentes: la desigualdad $ax^2+bx+c>0$ se satisface para toda x; la desigualdad $ax^2+bx+c\leqslant 0$ no tiene soluciones; el trinomio no tiene raíces reales y su coeficiente mayor es positivo.

La solución de muchos problemas que siguen es, en realidad, una ampliación del "vocabulario de traducción" citado de la lenguaje algebraica a la geométrica y viceversa. Antes de empezar a analizar los problemas concretos se da la metodología de la resolución de algunos ejemplos de carácter teórico.

Sea $f(x)=ax^2+bx+c$. *Todos los razonamientos los efectuamos considerando que* $a>0$; respectivamente, al resolver los problemas concretos siempre conviene transformarlos para utilizar las propiedades del trinomio con el coeficiente mayor positivo. Designemos las raíces de este trinomio por x_1 y x_2 y el discriminante, por D.

1. *¿Para cuáles condiciones ambas raíces de este trinomio son mayores que cierto número dado d?*

Para definir estos datos, de inmediato imaginemos la gráfica de un trinomio que satisface esta condición (fig. 169). En primer lugar, la curva interseca el eje de abscisas o toca a éste último, es decir, $D\geqslant 0$;

en segundo lugar, en el punto d el valor de $f(d)$ es positivo. Sin embargo, esto no es suficiente: el trinomio, cuya gráfica está expuesta en la fig. 169 por una línea punteada, no satisface los datos del problema,

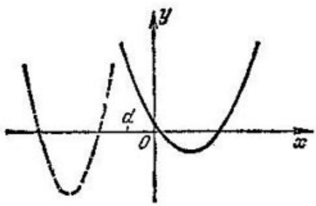


Fig. 169

aunque tenga las mismas propiedades. Para separar "nuestros trinomios" de los "extraños" de este tipo es suficiente que la cresta de la parábola (o sea, su abscisa) se encuentre a la derecha del punto d, es decir, $-b/(2a)>d$. De ese modo hemos hallado la condición requerida: ambas raíces son mayores que d cuando y sólo cuando $D\geqslant 0$, $f(d)>0$ y $-b/(2a)>d$.

Sin duda, el razonamiento anterior no es estricto del todo y es posible considerarlo sólo como una solución "en borrador", o como una búsqueda de la respuesta, y debe efectuarse una demostración más estricta. Esta última es bastante simple.

Supongamos que ambas raíces son mayores que d. En este caso $D\geqslant 0$, pues las raíces son reales, la abscisa de la cresta $-b/(2a)$ es mayor que d, ya que la última se encuentra entre las raíces; y en fin, $f(d)>0$, ya que d se encuentra fuera del intervalo entre las raíces. Y viceversa, sean satisfechas las tres condiciones mencionadas. Entonces ambas raíces son reales; la condición $f(d)>0$ significa que el punto d se encuentra fuera del intervalo entre las raíces; mientras que la tercera condición asegura que el valor de d es más pequeño que la raíz menor. En caso contrario, d sería más grande que la raíz mayor, y, por consiguiente, más grande que la semisuma de las raíces que es igual a $-b/(2a)$.

Al examinar los ejemplos ulteriores nos limitaremos solamente a la solución "en borrador" dejando para el lector la demostración estricta como un ejercicio provechoso e incluso necesario.

2. *¿Para cuáles condiciones las raíces del trinomio se encuentran por uno y por otro lado del número d?*

La respuesta se obtiene inmediatamente si la pregunta se formula así: ¿para cuáles condiciones el número d se encuentra entre las raíces del trinomio dado? Como es sabido, esta afirmación es equivalente a la que $f(d)<0$. (¡Recordemos que el coeficiente mayor se considera positivo!).

3. *¿Para cuáles condiciones una raíz del trinomio se encuentra en el intervalo* $d<x<e$?

Aquí la respuesta es también muy evidente: esto es válido solamente cuando en los puntos d y e el trinomio tiene valores de distintos signos. Resolviendo los problemas para no examinar por separado los casos en que $f(d)>0$, $f(e)<0$ y $f(d)<0$, $f(e)>0$ es útil escribir estas condiciones en una forma más compacta: $f(d)f(e)<0$.

Los tres ejemplos citados muestran con bastante claridad la dirección general al resolver los problemas del tipo analizado. No obstante, en la mayoría de los problemas la cuestión no se plantea tan directamente como tiene lugar en los ejemplos teóricos examinados, y para llegar al planteamiento necesario hay que formular de nuevo el problema. Ahora empezamos a examinar los problemas concretos.

Ante todo, recordemos el último problema del párrafo precedente. En aquel problema hubo que determinar, ¿en qué caso el segmento $-1\leqslant x\leqslant 1$ se encuentra entre las raíces del trinomio $(ax+1-a^2)\times\times(ax-a+a^2)$? Es evidente que esta afirmación significa que los números -1 y 1 se encuentran entre las raíces de este trinomio y esto se cumple cuando y sólo cuando $f(-1)<0$ y $f(1)<0$, es decir,

$$(-a+1-a^2)(-2a+a^2)<0,\quad (a+1-a^2)a^2<0.$$

Este sistema de desigualdades se resuelve fácilmente mediante el método de intervalos.

4. *Hallar con cuáles valores de* m *el trinomio cuadrático* x^2+mx+ $+m^2+6m$ *es negativo para todas* x *que satisfacen la condición* $1<x<2$.

Para que el trinomio cuadrático a examinar sea negativo para todos los valores de x del intervalo $1<x<2$, es necesario que, en primer lugar, éste tenga el discriminante positivo y, en segundo lugar, que el intervalo $1<x<2$ se encuentre entre sus raíces, además no se excluye la coincidencia de los extremos con las raíces. Razonando igualmente que en los problemas precedentes, obtenemos el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} m^2-4(m^2+6m)>0, \\ \dfrac{-m-\sqrt{-3m^2-24m}}{2}\leqslant 1<2\leqslant\dfrac{-m+\sqrt{-3m^2-24m}}{2}. \end{cases}$$

La resolución de este sistema no es, en principio, compleja. No obstante, desde el punto de vista del cálculo, este sistema puede causar muchas preocupaciones. Por esto, apliquemos los razonamientos expuestos más arriba: la condición necesaria se satisfaga si los números $f(1)$ y $f(2)$ son negativos, es decir, se cumple el sistema de desigualdades;

$$\begin{cases} m^2+7m+1\leqslant 0, \\ m^2+8m+4\leqslant 0, \end{cases}$$

cuya solución se halla fácilmente en el eje numérico:

$$-\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \leqslant m \leqslant -4+2\sqrt{3}.$$

5. *Hallar para cuáles valores de p la ecuación* $1+p\operatorname{sen} x=p^2-\operatorname{sen}^2 x$ *tiene su solución.*

Al designar $\operatorname{sen} x$ con y, escribamos de nuevo la ecuación en la forma siguiente:

$$y^2+py+1-p^2=0.$$

En este instante muchos estudiantes cometen un error grave, razonando, por ejemplo, así: "Ya que y es no más que $\operatorname{sen} x$, entonces $-1 \leqslant y \leqslant 1$ y, por lo tanto, es necesario hallar los valores de p para los cuales las raíces de la ecuación cuadrática, escrita más arriba, se encuentran en el segmento $-1 \leqslant y \leqslant 1$". En efecto, no es menester que ambas raíces se encuentren en este segmento; es suficiente que una de estas raíces se encuentre en el segmento indicado: si para alguna p una raíz y_1 por su valor absoluto no supera a 1, la ecuación $\operatorname{sen} x = y_1$ tiene solución, es decir, la ecuación inicial posee solución y tal valor de p es conveniente.

De ese modo, hay que hallar tales valores de p para los cuales una de las raíces de la ecuación (5) se encuentre en el intervalo $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Este problema puede ser reducido a una resolución de desigualdades: en primer lugar, no debe ser negativo el discriminante $5p^2-4 \geqslant 0$, y en segundo lugar, debe cumplirse, por lo menos, una de las desigualdades dobles

$$-1 \leqslant \frac{-p-\sqrt{5p^2-4}}{2} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{-p+\sqrt{5p^2-4}}{2} \leqslant 1.$$

Pero desde el punto de vista del cálculo esta solución es muy compleja. Nosotros escogemos otro método.

Para facilitar los razonamientos posteriores conviene analizar un caso en que ambas raíces del trinomio $y^2+py+1-p^2$ son diferentes de -1 y 1. Entonces la condición requerida se realiza para los dos casos: cuando solamente una raíz se encuentra en el intervalo $-1 < y < 1$, y cuando ambas raíces se encuentran en el mismo intervalo. El primer caso, según el ejemplo 3, tiene lugar cuando y sólo cuando el producto de los valores del trinomio a examinar en los puntos -1 y 1 es negativo, o sea, para los valores de p que satisfacen la desigualdad

$$(p^2-p-2)(p^2+p-2)<0,$$

cuyas soluciones se hallan fácilmente por el método de intervalos:

$$-2<p<-1, \quad 1<p<2.$$

Escribamos las condiciones para el segundo caso. Ante todo, el trinomio debe ser positivo para $y=-1$ y para $y=1$. Sin embargo, esta condición no determina aún nuestro caso: la misma se satisface también para los trinomios que, en general, no tienen raíces y al mismo tiempo para los trinomios cuyas raíces se encuentran a la derecha de 1 o a la izquierda de -1. Con motivo de separar los trinomios que no tienen raíces hay que exigir que el discriminante sea mayor que cero y para excluir los demás trinomios "extraños" es necesario condicionar que la abscisa de la cresta de la parábola, es decir, $y=-p/2$ se encuentre en el intervalo $-1<y<1$.

De esa manera, el conjunto de condiciones para resolver el caso examinado es el siguiente: a) los valores del trinomio deben ser positivos si $y=-1$ e $y=1$; b) el discriminante del mismo debe ser también positivo; c) la cresta de la parábola debe encontrarse en el intervalo $-1<y<1$. Como resultado obtenemos el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2-p-p^2>0, \\ 2+p-p^2>0, \\ 5p^2-4\geqslant 0, \\ -1<-\frac{p}{2}<1. \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema se hallan fácilmente:

$$-1<p\leqslant-\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt{5}}\leqslant p<1.$$

En resumen, analicemos el caso dejado temporalmente de lado, donde el trinomio tiene las raíces: $y=-1$ e $y=1$. Es evidente que $y=-1$ es la raíz si $p=1$ y $p=-2$, mientras que $y=1$ es también la raíz si $p=-1$ y $p=2$. Por lo tanto, los últimos valores de p también son convenientes.

Si reunimos todos los valores de p hallados, obtenemos la respuesta definitiva: la ecuación inicial tiene solución para

$$-2\leqslant p\leqslant-\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt{5}}\leqslant p\leqslant 2.$$

6. *En el plano de coordenadas hay que encontrar todos los puntos cuyas coordenadas (x, y) deben asegurar que la expresión*

$$(2\cos t+1/2\cos x\cos y)\cos x\cos y+1+\cos x-\cos y+\cos 2t$$

sea positiva para todo valor de t y exponer la zona formada por estos puntos.

Si t puede ser un número real cualquiera (o que pueda encontrarse en cualquier segmento de una longitud de 2π), entonces $z=\cos t$ pasa un segmento $-1\leqslant z\leqslant 1$. Por esto, el problema dado puede ser formulado así: ¿para qué valores de x e y la desigualdad

$$2z^2+2z\cos x\cos y+1/2\cos^2 x\cos^2 y+\cos x-\cos y>0$$

se cumple para toda z del segmento $-1\leqslant z\leqslant 1$?

¿En qué caso el trinomio cuadrático es positivo en todo el segmento $-1\leqslant z\leqslant 1$? Ante todo, esto sería válido si su discriminante es menor de cero. Por lo tanto, los pares (x, y), para los cuales

$$D=\cos^2 x\cos^2 y-2(1/2\cos^2 x\cos^2 y+\cos x-\cos y)= \\ =-2(\cos x-\cos y)<0$$

ó $\cos x-\cos y>0$ serán convenientes.

Si el discriminante no es negativo, los pares convenientes (x, y), como es fácil ver, se determinan por las condiciones siguientes: los valores del trinomio en los puntos -1 y 1 son positivos, mientras la abscisa de la cresta de la parábola se encuentra fuera del segmento $-1\leqslant z\leqslant 1$. Sin embargo, la abscisa de la cresta de nuestro trinomio es igual a $-1/2\cos x\cos y$, que por el módulo es, evidentemente, menos de la unidad. Por consiguiente, la abscisa de la cresta se encuentra, justamente entre -1 y 1. En consecuencia, el caso de $D\geqslant 0$ no proporciona soluciones nuevas.

La parte final de la resolución, o sea, la exposición de las soluciones de la desigualdad $\cos x-\cos y>0$ en el plano, se muestra en el problema 30 del § 13 de la Parte I.

Este ejercicio podemos resolver también de otro modo, si escribimos la desigualdad analizada en la forma siguiente:

$$(2z+\cos x\cos y)^2+2(\cos x-\cos y)>0.$$

Este método lo eligen muchos estudiantes; no obstante, aquí les espera una dificultad lógica que no todos pueden superar. La mayoría considera que la última desigualdad se cumple para toda z en el caso y solamente en el caso de $\cos x-\cos y>0$. En calidad de demostración se aduce un razonamiento según el cual, al aceptar z de manera que el primer sumando se convierta en cero, con ello alteramos la desigualdad.

Este razonamiento sería justo si el problema se resuelve para *todo valor* de z. Pero $z=\cos t$ y tiene su valor sólo en el intervalo -1 y 1. Por eso, al intentar convertir el primer sumando en cero, hay que demostrar la existencia del número *z en el segmento* $-1\leqslant z\leqslant 1$ para el cual este paréntesis es igual a cero. La ausencia de esta demostración es un defecto lógico indudable, aunque no conduce a un error real; en efecto, tal número z existe siempre, lo que se explica por las particularidades del ejemplo dado. Esto se deduce del hecho de que la expresión $-1/2\cos x\cos y$ es siempre, por el módulo, menos de 1.

Indiquemos que la demostración de este hecho en la segunda resolución corresponde al análisis de la posición de la abscisa de la cresta en la primera resolución.

7. *Para cada número real a debe resolverse la ecuación*

$$9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0.$$

Designando $3^{-|x-2|}$ por y y tomando en consideración que para cualquier x $0<3^{-|x-2|}\leqslant 1$, obtenemos la ecuación

$$y^2-4y-a=0,$$

para la que es necesario hallar las raíces que se encuentran en el intervalo $0<y\leqslant 1$. La abscisa de la cresta de la gráfica del trinomio $f(y)=y^2-4y-a$ es igual a 2. De esa manera, si el trinomio tiene raíces, en este caso la raíz mayor es mayor que 2 y no nos interesa. Por lo tanto, debe escribirse una condición según la cual en el intervalo $0<y\leqslant 1$ se tiene una raíz.

Ante todo, $y=1$ es la raíz siendo $a=-3$. A continuación, ya que $f(0)=-a$, $f(1)=-a-3<f(0)$, entonces, debido al ejemplo 3, en el intervalo $0<y<1$ se encuentra solamente una raíz en el caso y sólo en el caso de $f(0)>0$ y $f(1)<0$, lo que será si $-3<a<0$.

Por consiguiente, sólo cuando $-3\leqslant a<0$ en el intervalo $0<y<1$, la ecuación tiene una raíz y esta última es su raíz menor: $y=2-\sqrt{4+a}$. Ahora, resolviendo la ecuación $3^{-|x-2|}=2-\sqrt{4+a}$, que con los valores hallados de a tiene la solución (esto se deduce de que el valor de y se encuentra entre 0 y 1), obtenemos

$$|x-2|=-\log_3(2-\sqrt{4+a}),\quad x_{1,2}=2\pm\log_3(2-\sqrt{4+a}).$$

8. *Hallar todos los valores de a para los cuales la ecuación*

$$\log_{\sqrt{x}} a^2\left|\left(\log_{a^2}\frac{x}{2}\right|+\log_a x=\log_{a^2}4\cdot\log_{\sqrt{x}} a\right.$$

tiene solución y encontrar todas las soluciones correspondientes.

Designando $\log_a x$ por y y $\log_a 2$ por b y aplicando las fórmulas de transformación de los logaritmos, obtenemos la ecuación

$$\frac{4}{y}\left|\frac{1}{2}(y-b)\right|+y=\frac{2b}{y},$$

o, aumentando el RVA a cuenta de la adición de cero, la ecuación

$$y^2+2|y-b|-2b=0.$$

Al principio comenzamos a hallar las raíces de esta ecuación que satisfacen la condición $y>b$ y, sin duda alguna, no son iguales a cero. En este caso nuestra ecuación se convierte en la cuadrática:

$$y^2+2y-4b=0.$$

Necesitamos raíces que no sean iguales a cero y sean mayores que b. Ante todo, para la existencia de tales raíces es menester que el discriminante $D=1+4b$ no sea negativo. Por ello, vamos a suponer que $b\geqslant -1/4$.

La abscisa de la cresta de la gráfica del trinomio $y^2+2y-4b$ es igual a -1, y debido a esto la raíz menor es menos de $-1<b$, ya que $b\geqslant -1/4$. Por lo tanto, nos interesa únicamente la raíz mayor, es decir, su posición del lado derecho del punto b. Es evidente de los razonamientos gráficos, que la raíz mayor será más de b solamente cuando el trinomio en el punto b sea negativo, es decir, $b^2-2b<0$. Esta desigualdad se satisface para $0<b<2$ y con estos últimos valores de b tenemos la raíz

$$y=-1+\sqrt{1+4b},$$

que no es igual a cero y, en consecuencia, satisface todas las condiciones necesarias.

Luego examinemos los valores de $y\leqslant b$. En este caso nuestra ecuación toma la forma siguiente: $y^2-2y=0$. Sus raíces son $y_1=2$ y $y_2=0$. Necesitamos solamente raíces que no son iguales a cero y que no superan a b, por esto y_2 no puede servirnos en absoluto, mientras que $y_1=2$ será conveniente cuando $b\geqslant 2$.

Si reunimos los resultados de los dos casos examinados, obtenemos las soluciones (¡diferentes de cero!) de la ecuación respecto a y: si $b\leqslant 0$, no tenemos soluciones; si $0<b<2$, tenemos $y=-\sqrt{1+1+4b}$; si $b\geqslant 2$, tenemos $y=2$.

Es necesario examinar el caso en cuanto a la incógnita x y al parámetro a. El paso, para $x=a^y$ no proporciona ninguna dificultad, mientras que, para pasar para a, hay que resolver tres desigualdades:

$$\log_a 2\leqslant 0, \quad 0<\log_a 2<2, \quad \log_a 2\geqslant 2.$$

Estas últimas se resuelven fácilmente: la primera desigualdad se cumple para $0<a<1$; la segunda, para $a>\sqrt{2}$, y la tercera para $1<a\leqslant 2$.

Obtenemos, en definitiva, la respuesta siguiente: para $0<a<1$ no tenemos soluciones; $x=a^{-1+\sqrt{4+\log_a 2}}$ cuando $a>\sqrt{2}$; $x=a^2$ si $1<a\leqslant\sqrt{2}$.

EJERCICIOS:

1. Hallar todos los valores del parámetro d para los cuales ambas raíces de la ecuación cuadrática $x^2-6dx+(2-2d+9d^2)=0$ son reales y mayores que 3.

2. Hallar todos los valores del parámetro a para los cuales ambas raíces de la ecuación cuadrática $x^2-ax+2=0$ son reales y se encuentran entre 0 y 3 (a excepción de los valores extremos).

3. ¿Para cuáles valores de a una de las raíces del polinomio $(a^2+a+1)x^2+(a-1)x+a^2$ es mayor que 3, mientras que la otra es menor que 3?

4. Hallar todos los valores de a para los cuales las raíces de la ecuación $x^2+x+a=0$ son mayor que a.

5. ¿Para cuáles valores de a las raíces de polinomio $2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)$ satisfacen las desigualdades $x_1<a<x_2$?

6. ¿Para cuáles valores de a la ecuación

$$(1+a)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2-3a\,\frac{x^2}{x^2+1}+4a=0$$

tiene raíces reales?

7. Hallar todos los valores de m para los cuales la desigualdad $mx^2-4x+3m+1>0$ será cumplida para todas las $x>0$.

8. Hallar todos los valores de a con los cuales la desigualdad $x^2-a(1+a^2)x+a^4<0$ se reduce a la desigualdad $x^2+4x+3>0$.

9. ¿Para cuáles valores de y es válida la afirmación siguiente: "Existe por lo menos un valor de x para el que se satisface la desigualdad $2\log_{0,5}y^2-3+2x\log_{0,5}y^2-x^2>0$?"

10. Para cuáles valores de y es válida la afirmación siguiente: "La desigualdad

$$x^2\left(2-\log_2\frac{y}{y+1}\right)+2x\left(1+\log_2\frac{y}{y+1}\right)-2\left(1+\log_2\frac{y}{y+1}\right)>0$$

se satisface para toda x"?

11. Hallar todos los valores de a con los cuales la desigualdad $0<x<1$ se deduce de la desigualdad $ax^2-x+1-a<0$.

12. Hallar todos los valores de a con los cuales la desigualdad $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2\leqslant 0$ se deduce de la desigualdad $0\leqslant x\leqslant 1$.

13. Hallar todos los valores de a para los cuales, con todas las x que por el módulo no superan a la unidad, es válida la desigualdad $2x^2-4a^2x-a^2+1>0$.

Resolver las ecuaciones y desigualdades:

14. $x+\sqrt{x}=a$.

15. $\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}\right)^2+2a\,\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}+1=0$.

16. $4^x-4m2^x+2m+2=0$.

17. $4^{\operatorname{sen} x}+m2^{\operatorname{sen} x}+m^2-1=0$, donde $-1<m<1$.

18. $(\lg \operatorname{sen} x)^2-2a\lg\operatorname{sen} x-a^2+2=0$.

19. $(\log_a \operatorname{sen} x)^2+\log_a\operatorname{sen} x-a=0,\quad a>0,\quad a\neq 1$.

20. $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$.

21. $\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x$.

22. $2\,|\lg(ax)|\log_x 10=(4\lg a-3)\log_{x^2}10-\dfrac{1}{2}\lg x$.

23. $\log_{\sqrt{x}}a\cdot\left|\log_a\dfrac{x}{2}\right|=\log_{a^2}2\cdot\log_{\sqrt{x}}a^2-\log_a\sqrt{x}$.

24. $\log_{100}x^2=\log_{\sqrt{x}}10\left(\lg 10a-\left|\lg\dfrac{x}{a}\right|\right)$

25. $\log_{\sqrt{x}}a^2\cdot\left|\log_{a^2}\dfrac{x}{2}\right|+\log_a x=\log_{a^2}4\cdot\log_{\sqrt{x}}a$.

26. $\log_a x\cdot|\log_x a-\log_2 a|=\log_x(ax)-\log_2 a^2+\log_a x\cdot\log_2 a$.

Determinar en el plano de coordenadas los puntos para los cuales se satisfacen las condiciones siguientes.

27. Para todo valor t

$$\cos 2(t+x)+2\operatorname{sen}(t+x)\cos y-\frac{1}{2}(\cos y-1)^2-\operatorname{sen} x<\frac{1}{2}.$$

28. Para todo valor t

$$\operatorname{sen}^2(t+x)+\operatorname{sen}(t+y)+\operatorname{sen}(t+2x-y)+1/4>0.$$

29. Para todo valor t

$$\left(2\cos t+\frac{1}{2}\cos x\cos y\right)\cos x\cos y+1+\cos x-\cos y+\cos 2t>0.$$

30. Por lo menos para un valor t

$$\cos(t+3x+y)-\cos(t+x-y)-\operatorname{sen}^2(t+2x)>\frac{1}{4}.$$

31. Por lo menos para un valor t

$$\operatorname{sen}^2 t\cos^2 x+\cos^2 t\operatorname{sen}^2 x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}2t+2(\cos 2x+\cos y)<0.$$

RESPUESTAS
Y SOLUCIONES
PARA LOS EJERCICIOS[1]

PARTE I

§ 1

1. c) La ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, donde x es una magnitud incógnita y a, b, c son números dados, $a\neq 0$. d) Véase el § 4 de la Parte I. e) Véase el § 5 de la Parte I. g) Véase el § 7 de la Parte I. 2. a) Axioma. b) Teorema. c) Definición. d) Teorema. 3. Para $a>0$, $b>0$. 4. Teorema inverso: si la ecuación de segundo grado tiene dos raíces reales diferentes, entonces el discriminante es positivo y el teorema es correcto. Teorema contrario: si el discriminante de la ecuación cuadrática no es positivo (o sea, negativo o igual a cero), entonces esta ecuación no puede tener dos raíces reales diferentes y el teorema es correcto. Teorema contrario al inverso: si la ecuación de segundo grado no tiene dos raíces reales diferentes, entonces el discriminante no es positivo y el teorema es correcto. (¡Demuéstrense todos estos teoremas!) 5. Demostración de lo absurdo. 6. $(a_1-\alpha)\ldots(a_n-\alpha)=0$. 7. $|ab|+|bc|+|ca|=0$. 8. Sean $a<0$, $b>0$, o sean a y b los números de signos iguales y $a>b$. Esto se deduce de que la función $y=1/x$ es negativa decreciendo en el conjunto de números negativos, y positiva decreciendo en el conjunto de números positivos. 9. Si cualesquier x_1 y x_2 son tales que $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$, entonces $3x_1-x_1^2<3x_2-x_2^2$. 10. La condición es necesaria.

§ 2

1. El número $a_n\ldots a_3a_2a_1a_0$ se divide por 11 cuando y sólo cuando se divide por 11 el número $|a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^na_n|$. 2. Demuéstrese por oposición. Sea $N=m^2$; examínense dos casos: cuando m se divide por 3 y cuando m no se divide por 3. 3. Demuéstrese que $(p-1)$ $(p+1)$ se divide por 3 y por 8. 4. $p=3$. Uno de los tres números sucesivos: p, $p+1$, $p+2$ ha de dividirse por 3. Por eso sea $p=3$, o sea (para $p>3$) el número $p+1$ que se divide por 3. En este caso $p+4=(p+1)+3$ no puede ser simple. 5. Hay que convencerse de que una sola de las cifras 0, 1, 4, 5, 6, 9 puede ser la última del cuadrado de cualquier número entero. 6. 494. 7. Hay diez de estos números: 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137, 152. 8. Para las n representadas en la forma de $5s-3$, donde s es un número entero positivo. Si $3n+4=5k$, entonces $3(n+3)=5(k+1)$ y por eso $n+3$ ha de dividirse por 5. 9. Para ningunos. Si tuvieran lugar las igualdades $2n+3=kp$ y $5n+7=kq$, $k>1$, se obtendría que $1=(5p-2q)k$. 10. 3762. Hay que convencerse por comprobación sucesiva de que se tiene una sola representación de $13=2^2+3^2$ y sólo dos representaciones de $85=2^2+9^2=6^2+7^2$. De la tercera condición se deduce que la primera cifra del número incógnito no puede ser menor que la última. Por esta razón es necesario analizar los cuatro números: 3292, 3922, 3672, 3762. 11. 857. Nótese que

[1] En las respuestas a las ecuaciones y desigualdades trigonométricas k, l, m, n significan, si no se estipula lo contrario, números enteros cualesquiera.

$\overline{abc1} = 10 \cdot \overline{abc} + 1$ y $2\overline{abc} = \overline{abc} + 2000$. **12.** 34056, 34452, 34956. Utilícense los criterios de divisibilidad por 4 y por 9. **13.** $n \geqslant 2$. Factorizar n^4+4. **14.** Demuéstrese que entre los números k, m, n se hallan sea dos pares o sea dos impares. Luego debe aplicarse la identidad $k^3+m^3+n^3=(k+m+n)^3-3(k+m)(m+n)\times$ $\times(n+k)$. **15.** $\overline{\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{2n \text{ veces}}} - \overline{\underbrace{2\ \ldots\ 2}_{n \text{ veces}}} = 9^{-1}\cdot\overline{\underbrace{9\ \ldots\ 9}_{2n \text{ veces}}} - 2\cdot 9^{-1}\cdot\overline{\underbrace{9\ \ldots\ 9}_{n \text{ veces}}} = 9^{-1}\times$ $\times(10^{2n}-1)-2\cdot 9^{-1}\cdot(10^n-1)=[(10^n-1)/3]^2=\overline{\underbrace{3\ \ldots\ 3}_{n \text{ veces}}})^2$. **16.** $x_1=3$, $y_1=1$; $x_2=-3$, $y_2=-1$. Considerando la ecuación como de segundo grado respecto a x, hacer la conclusión de que su discriminante $25y^2+56$ ha de ser el cuadrado de un número entero, o sea, $56=(k+5y)(k-5y)$. Luego hay que aplicar las representaciones posibles del número 56 en forma de un producto de dos números enteros. **17.** $x_1=2$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=-2$; $x_3=-2$, $y_3=2$; $x_4=-2$, $y_4=-2$. Exprésese x^2 por y^2 y conclúyase que y puede asumir tales valores enteros para los cuales $3<y^2\leqslant 12$. **18.** Por ejemplo, los números $(a+b)/2$ y $a+2^{-1/2}(b-a)$. **19.** No pueden. **20.** Demuéstrese que de la racionalidad del número tg 5° se deducirá que tg 30° es un número racional.

§ 4

1. Sí. Para $a=0$ el módulo a es igual simultáneamente a a y $a-a$. **2.** a) Si $x\geqslant 0$, entonces $-x\leqslant 0$, y entonces $|-x|=-(-x)=x=|x|$; si $x<0$, entonces $-x>0$, y entonces $|-x|=-x=|x|$. b) Si $x\geqslant 0$, entonces $|x|=x$, y, por consiguiente, $x\leqslant|x|$; si $x<0$, entonces $x<-x$, es decir, $x<|x|$, de donde $x\leqslant|x|$. **4.** $a_1=\ldots=a_n=0$. **5.** Sea $a<b$ para la certeza; entonces $|b-a|=b-a$. Son posibles tres casos: $0\leqslant a<b$, $a<0\leqslant b$, $a<b<0$. En el primer caso la distancia es igual a $b-a=|b-a|$, en el segundo, $b+|a|=$ $=b-a=|b-a|$, en el tercero, $|a|-|b|=-a-(-b)=b-a=|b-a|$. **6.** a) $a-b<x<a+b$. b) $x\leqslant a-b$, $x\geqslant a+b$. **7.** $x_1=3/2$, $x_2=7/6$. **8.** $x=-1$. **9.** No hay soluciones. **10.** x es un número cualquiera. **11.** No hay soluciones. **12.** $7/6\leqslant x\leqslant 3/2$. **13.** $x_1=0$, $x_2=-1$. Ya que $|x|+x^3>0$ para $x>0$, entonces no hay raíces positivas; para $x\leqslant 0$ tenemos una ecuación $-x+x^3=0$, para la cual se buscan las raíces no positivas. **14.** $x=-1$. Está claro que las raíces satisfacen la desigualdad $x+1\leqslant 0$; escríbase la ecuación en forma de $(x+1)\times$ $\times(1-|x-1|)=0$ y elíjase aquella raíz que satisface la condición $x\leqslant -1$. **15.** No hay soluciones. Convénzase de que $-x^2+2x-3<0$ para todos los valores de x; obténgase la ecuación $x^2-2x+2=0$ que no tiene raíces reales. **16.** $x=-1$, $x\geqslant 0$. Escríbase la desigualdad en forma de $|1+x|^2\geqslant$ $\geqslant|1+x||1-x|$; $x=-1$ es una solución, y, si $x\neq -1$, puede dividirse por $|x+1|>0$. **17.** $1\leqslant x\leqslant 3$, $x=4$. **18.** $x<-3$, $-3<x<-2$, $x>0$. **19.** $x\leqslant 3/2$. **20.** $0\leqslant x\leqslant 2$. Ya que $x^2+x+1>0$ para todos los valores de x, entonces puede dividir ambos miembros de la desigualdad por x^2+x+1. **21.** $x_1=2$, $x_2=5$. **22.** $x_1=1/\sqrt{2}$, $x_{2,3}=-1\pm(1/\sqrt{2})$. **23.** $x=-2$. **24.** $x_{1,2}=\pm\log_3 2$. Nótese que la ecuación no cambia al sustituir x por $-x$, por eso es suficiente hallar solamente las raíces no negativas (después de que las raíces no positivas se obtienen al cambiar el signo por el contrario). **25.** $x=-1$, $0\leqslant x\leqslant 1$. **26.** $x<1/3$, $x>3$. **27.** $4/3<x<4$. **28.** $2<x<5$. **29.** $x\leqslant -2-\sqrt{2}$, $x\geqslant 1+\sqrt{3}$. **30.** $1-$ $-\sqrt{17}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}-1$. **31.** $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=0$, $y_2=-3$; $x_3=-6$, $y_3=9$. **32.** $x_{1,2}=\pm(1-\sqrt{1-4a})/2$, si $a<0$; $x=0$ para $a=0$; para $a>0$ no tiene soluciones. Escríbase la ecuación en forma de $|x|^2+|x|+a=0$. **33.** $x_{1,2}=$ $=\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$ para $a<1$; $x=0$ para $a=1$; para $a>1$ no hay soluciones. **34.** $x_{1,2}=2\pm\log_3(2-\sqrt{4+a})$ para $-3\leqslant a<0$; no hay soluciones para los demás valores de a. **35.** Utilícese la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica. **36.** $\sqrt{|x|}$; x^2; $|x|$; x; $|x|^3\sqrt{y}$; x^3y^3. **37.** Para $a\geqslant 0$. **38.** $-2a$. **39.** $2/(2-x)$. Nótese que $x\pm 2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}\pm 1)^2$. **40.** $|\cos\alpha - \cos\beta|$.

§ 5

1. a) En la circunferencia con el radio 20 y el centro en el origen de las coordenadas; b) en la circunferencia con el radio 5 y el centro en el punto $(2, 0)$; c) en la circunferencia con el radio 15 y el centro en el punto $(-1, 0)$. **2.** Dentro de la circunferencia con el radio 1 y el centro en el origen de las coordenadas. **3.** En la circunferencia con el radio 2 y el centro en el origen de las coordenadas y fuera de esta circunferencia. **4.** Dentro del anillo limitado por las circunferencias con los centros en el origen de las coordenadas y los radios 1 y 2, y en la primera circunferencia. **5.** Dentro de la circunferencia con el radio 2 y el centro en el origen de las coordenadas. **6.** En la circunferencia con el radio 3 y el centro en el punto $(-1, 0)$. **7.** Dentro de la circunferencia con el radio 1 y el centro en el punto $(0, 1)$. **8.** En la circunferencia con el radio 7 y el centro en el punto $(-1, 2)$. **9.** Fuera de la circunferencia con el radio 9/2 y el centro en el punto $(-1/2, 1/2)$. **10.** Dentro del anillo limitado por las circunferencias con los centros en el punto $(0, -1)$ y los radios 2 y 3, y en las dos circunferencias. **11.** En la recta perpendicular al segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1/3)$, y que pasa por el medio de este segmento. **12.** El punto $(0, \sqrt{3}/3)$. **13.** El punto $(0, -2)$. **14.** No hay tales puntos. **15.** En la circunferencia con el radio 1 y el centro en el origen de las coordenadas. **16.** En la circunferencia con el radio $\sqrt{3/2}$ y el centro en el origen de las coordenadas. **17.** Hay dos de tales números complejos: $z_1=6+17i$ y $z_2=6+8i$. **18.** $\frac{z_1+z_2}{2}$. **19.** $z_1+z_2-z_3$; $z_1+z_3-z_2$; $z_2+z_3-z_1$. **20.** $\cos 150°+i\operatorname{sen} 150°$. **21.** $2\cos 20°(\cos 20°+i\operatorname{sen} 20°)$. **22.** $\cos(\pi-\alpha)+i\operatorname{sen}(\pi-\alpha)$. **23.** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$. **24.** $\frac{1}{\cos\alpha}\times\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right]$, si $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\frac{1}{|\cos\alpha|}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]$, si $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. **25.** En el rayo que sale del origen de las coordenadas en un ángulo de $\pi/4$ en dirección positiva del eje Ox. **26.** En el rayo que sale del origen de las coordenadas en un ángulo de $7\pi/6$ en dirección positiva del eje Ox. **27.** La parte del plano que contiene el segundo y tercer cuadrantes, incluso el eje Oy sin el origen de las coordenadas, y la parte del primer cuadrante dispuesta entre los rayos que salen del origen de las coordenadas bajo los ángulos $\pi/3$ y $\pi/2$. **28.** El segmento del eje Ox, comprendido entre los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 0)$, sin extremos. **29.** El punto $(0, 2)$. **31.** $z=12+16i$. El punto que representa este número es el punto tangencial del rayo que sale del origen y se halla en el primer cuadrante, con la circunferencia de radio $\sqrt{15}$ y el centro en el punto $(0, 25)$. **32.** $\varphi/2$, si $0\leqslant\varphi<\pi/3$ o bien $\pi<\varphi<5\pi/3$; $\varphi/2+\pi$, si $\pi/3<\varphi<\pi$ o bien $5\pi/3<\varphi<2\pi$; si $\varphi=\pi/3$ o bien $\varphi=\pi$, ó $\varphi=5\pi/3$, entonces $z_1=0$. **33.** No, hablando en general; por ejemplo, $z_1=i$, $z_2=2i$. **34.** No, hablando en general; por ejemplo, $z_1=1+i$, $z_2=2-i$. **35.** Notemos que esta aseveración es incorrecta si las partes imaginarias de los números z_1, z_2 son iguales a cero, es decir, si estos números son reales. **37.** Todos los números son reales. **38.** Todos los números son puramente imaginarios. **39.** Todos los números complejos, cuya parte real es igual a 1. **40.** 0. **41.** 0, -1, $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **42.** 0, $\pm i$. **43.** Para $x=1$, $y=-4$ y para $x=-1$, $y=-4$.

44. a) Fuera de la circunferencia con el radio 10 y el centro en el punto (1, 0); b) dentro de la circunferencia con el radio 5 y el centro en el origen de las coordenadas. **45.** Si $a=1$, entonces $z=-1-i$; si $1<a<\sqrt{2}$, entonces $z_{1,2}=\dfrac{-a^2\pm a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1}-i$; si $a=\sqrt{2}$, entonces $z=-2-i$; si $a>\sqrt{2}$, entonces la ecuación no tiene soluciones. **46.** Si $0\leqslant a\leqslant 1/2$, entonces la ecuación no tiene soluciones; si $a>1/2$, entonces $z=\dfrac{4a+\sqrt{4a^2+3}}{16a^2-4}+\dfrac{i}{4}$. **47.** $z_1=1$, $w_1=-1$; $z_2=-1$, $w_2=1$.

§ 6

1. $N^{\frac{-\alpha\beta\gamma}{s}}$. **2.** 0. **3.** 0. **4.** $-1/4$. **5.** 1. **6.** 2. **7.** $\log_b N$. **8.** 0. **9.** 0. **10.** 0, porque $2^{\log_3 5}=(5^{\log_5 2})^{\log_3 5}=5^{\log_3 2}$. **11.** $7\frac{1}{196}$. **12.** $\dfrac{16}{\sqrt[3]{5}}$. **13.** $\log_3 2<\log_2 3$. **14.** $\log_4 5>\log_8 5$. **15.** $\log_2 3<\log_3 11$. **16.** Si $a>1$, entonces $\log_2 a>\log_3 a$; si $a=1$, entonces $\log_2 a=\log_3 a=0$; si $0<a<1$, entonces $\log_2 a<\log_3 a$. **17.** Si $a>1$, entonces $\log_a 2<\log_a 3$; si $0<a<1$, entonces $\log_a 2>\log_a 3$. **18.** $\sqrt[3]{0{,}01}<\sqrt[5]{0{,}001}$. **20.** $\dfrac{1+ab}{a(8-5b)}$. **21.** $3(1-a-b)$. **22.** $a>0$, $a\neq 1$; $N>0$, $N\neq 1$; $b>0$, $b\neq 1/a$. **24.** 1. **25.** Para $a=1$ la igualdad es evidente; si $a\neq 1$, entonces hay que pasar a los logaritmos de la base a. **27.** Ya que $0<\log_3 2<1$ y $1/2<1$, la desigualdad es válida. **28.** Demuéstrese previamente que $\log_b a\,\log_c b\,\log_d c=\log_d a$, $b\neq 1$, $c\neq 1$, $d\neq 1$, $a>0, b>0$, $c>0$, $d>0$. **29.** Para $a>1$ y $b>1$, o bien, para $0<a<1$ y $0<b<1$. **30.** Demuéstrese por oposición. **31.** $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant x<0$; $x\geqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **32.** $x_1=1/8$; $x_2=2$. **33.** $x=2$. **34.** $x_1=10$; $x_2=\sqrt[9]{10}$. **35.** $x_1=16$; $x_2=1/2$. **36.** $x_1=1/4$; $x_2=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. **37.** $x_1=9$, $x_2=1/9$. **38.** $x_1=a^{1/\sqrt{2}}$; $x_2=a^{-1/\sqrt{2}}$ **39.** $x_1=a^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $x_2=a^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$. **40.** $x_1=9$, $x_2=1/9$. **41.** $x=\sqrt{2}$, $y=1$. **42.** $x=a^{1-4a}$, $y=a^{2a}$. **43.** $x_1=2$, $y_1=4$; $x_2=1/2$, $y_2=1/4$. **44.** $x=9$, $y=1/3$. **45.** $x=a^{4m-6n}$, $y=a^{6m-12n}$. **46.** $x=2/3$, $y=27/8$, $z=32/3$. **47.** $x=1$, $y=2$. **48.** $x_1=4$, $y_1=32$; $x_2=-1$, $y_2=1$. **49.** $0<x<3^{\frac{1}{1-\log_2 3}}$. **50.** $0<x<\sqrt[10]{10}$. **51.** $a\geqslant 1/16$.

§ 7

1. $x=3$. **3.** $3-2\sqrt{2}$, 1, $3+2\sqrt{2}$. **4.** $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$, $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{5}}$.
5. $A=2$, $B=32$. **6.** 25 piedras. **7.** 27, 18 y 12 años. **8.** Si $b_1>0$, entonces son admisibles cualesquier valores de $q<1$ y cualesquier valores de $q>3$; si $b_1<0$, entonces son admisibles cualesquier valores de q dentro del intervalo $1<q<3$. **9.** 25 cosechadoras. **10.** 1921. **11.** 18 litros. **13.** $x=y=z=2$. **15.** Nótese que los números $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \ldots, \dfrac{1}{a_n}$ componen una progresión geométrica, calcule su suma. $P=(S/T)^{n/2}$. **16.** $x_1=2$, $x_2=-2$. **17.** $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$.

§ 8

1. Al multiplicar la desigualdad por 2, pasemos a una desigualdad evidente $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$. **3.** Escribir la desigualdad en forma de $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geqslant 0$. **7.** Escribir la desigualdad en forma de $(x+y+1)^2+2(y+1)^2 \geqslant 0$. **8.** Escribir la desigualdad en forma de $(1-\operatorname{sen}^2 x)(5-\operatorname{sen}^2 x) \geqslant 0$. **9.** Todos los sumandos, para $x \leqslant 0$, no son negativos; tenemos $x^3 > x^5$, $1 > x$ para $0 < x < 1$; tenemos $x^8 \geqslant x^5$, $x^2 \geqslant x$ para $x \geqslant 1$. **10.** Ya que $a/c+b/c=1$, entonces $0 < a/c < 1$, $0 < b/c < 1$, por razón de que $(a/c)^{2/3} > (a/c)$, $(b/c)^{2/3} > (b/c)$. **11.** Extraer la raíz de potencia n de ambos miembros de la desigualdad. **12.** Convénzase de que en el primer miembro de la desigualdad la suma de los números equidistantes de los extremos no es menor de $2(n+1)^{-1}$. **13.** Represéntese $(n!)^2=(1\cdot n)\cdot[2\cdot(n-1)]\ldots[(n-1)\cdot 2]\cdot(n\cdot 1)$ y demuéstrese que para cualquier k, $1 < k < n$, es válida la desigualdad $k(n-k+1) > n$. **14.** Aplíquese el método de inducción matemática. **15.** Aplíquese el método de inducción matemática. **19.** Si p es el semiperímetro de un triángulo cuyos lados son a, b, c y S es su área, entonces, de la fórmula de Herón y de la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética obtenemos que $\sqrt{S} \leqslant p/2$. **20.** Introdúzcase el ángulo auxiliar. **21.** El valor mínimo 2/3 se logra para $x=0$; no hay valor máximo. **22.** El valor mínimo 0 se logra para $x=0$; el valor máximo 1/2 se logra para $x=-1$ y para $x=1$. Para determinar el valor mínimo hay que representar la función en forma de $y=(x^2+x^{-2})^{-1}$. **23.** El valor máximo 1 se logra para $x=1$; el valor mínimo -1 se logra para $x=-1$. **24.** Aplíquese la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, utilizando luego la desigualdad $\operatorname{sen} x+\cos x \geqslant -\sqrt{2}$. La igualdad se logra para $x=(5\pi/4)+2k\pi$. **25.** Exprésese $\operatorname{cotg} x$ por $\operatorname{cotg}(x/2)$.

§ 9

1. $x=2$. **2.** $x=(14+2\sqrt{15})/3$. **3.** $x=45-16\sqrt{7}$. **4.** No hay soluciones. **5.** $x=2$. **6.** $x=8$. **7.** $x=5$. **8.** $x_1=0$, $x_2=4$. **9.** $x_1=1$, $x_2=3/2$, $x_3=2$. **10.** $x_1=190/63$, $x_2=2185/728$. **11.** $x=\sqrt[5]{a^4}/(1-\sqrt[5]{a^4})$ para $0 < a < 1$; para los demás a no hay soluciones. **12.** $x=-2$. **13.** $x_1=0$, $x_2=2$. **14.** $x=\log_{2/7} 3$. **15.** $x_{1,2}=1 \pm \sqrt{1+\log_{2+\sqrt{3}} 10}$. **16.** $x=\log_2 3$. **17.** $x=4\log_3 2$. **18.** $x_1=\log_3 28-3$, $x_2=\log_3 10$. **19.** $x=2$. **20.** $x_1=1/8$, $x_2=2$. **21.** $x=[\log_2(1+\sqrt{41})-1]3/6$. **22.** $x_1=10$, $x_2=\sqrt[9]{10}$. **23.** $x_1=9$, $x_2=1/9$. **24.** $x_1=2$, $x_2=8$. **25.** $x_1=0$, $x_2=1$. **26.** No hay soluciones. **27.** $x_1=100$, $x_2=1/100$. **28.** $x_1=9$, $x_2=1/9$. **29.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=1/\sqrt[4]{8}$. **30.** $x_1=\sqrt[4]{3}$, $x_2=1/\sqrt[4]{3}$. **31.** $x=2^{-\log_3 a}$. **32.** No hay soluciones. **33.** No hay soluciones. **34.** $x=5/2$. **35.** $x=-25$. **36.** $x=5$. **37.** $x=8$. **38.** $x=1/9$. **39.** $x=3$. **40.** $x=5$. **41.** $x=-4$. **42.** $x=2$. **43.** $x=1$. **44.** $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x=4$. **45.** $x=4$. **46.** $x_1=2k\pi/5$, $x_2=(6k \pm 2)\pi/15$. **47.** $x_1=(4k-1)\pi/4$, $x_2=(2k+1)\pi/2$. **48.** $x_1=k\pi$, $x_2=[(-1)^{k+1}\pi/6]+k\pi$. **49.** $x=[(-1)^k\pi/6]+k\pi$. **50.** $x=(8k+1)\pi/4$. **51.** $x=(8k+1)\pi/4$. **52.** $x=(6k+1)\pi/3$. **53.** $x=1/2 \arccos 1/7+2k\pi$. **54.** $x=(16k+1)\pi/8$. **55.** $x_1=(20k+1)\pi/5$, $x_2=(20k+9)\pi/5$. **56.** $x=1/2 \operatorname{arc\,tg} 4+2k\pi$. **57.** $x=(4k+1)\pi/2$. **58.** $x_1=(4k+1)\pi/4$, $x_2=\operatorname{arc\,sen}[(\sqrt{5}-1)/2]+(2k+1)\pi$. **59.** $x_1=2$, $x_2=-5$, $x_3=(2\pi/3)+4k\pi$, $x_4=(-2\pi/3)+4k\pi$ $(k \neq 0)$, $x_5=2\arccos \times [(2\sqrt{3}-3)/2]+4k\pi$, $x_6=-2\arccos[(2\sqrt{3}-3)/2]+4k\pi$ $(k \neq 0)$. **60.** $x_1=(2k+1)\pi/6$, $x_2=(4k+1)\pi/4$. **61.** $x=k\pi/3$. **62.** $x_1=(2k+1)\pi/4$, $x_{2,3}=(6k \pm 1)\pi/6$. **63.** $x=-\operatorname{arc\,sen}[(\sqrt{5}-1)/2]+(2k+1)\pi$. **64.** $x=\pm \arccos \times (2-2\sqrt{2})+2k\pi$. **65.** $x_1=k\pi$, $x_2=(12k+1)\pi/6$. **66.** $x=2$. **67.** $x=2$,

§ 10

1. $1 < x < 3$. **2.** $x > 5/2$. **3.** $x > \log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. **4.** $0 < x < a$, $1 < x < 1/a$. **5.** $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$. **6.** $2k\pi < x < (\pi/4) + 2k\pi$. **7.** $0 < x < 1/2$, $x > 32$. **8.** $1/16 < x < 1/8$, $8 < x < 16$. **9.** $-1 < x < -2/\sqrt{5}$, $2/\sqrt{5} < x < 1$. **10.** $\log_2 5 - 2 < x < \log_2 3$. **11.** $2^{-1/\sqrt{2}} \leqslant x < 1$. **12.** $0 \leqslant x < \log_3^2 2$, $x > 3/2$. **13.** $-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $x > 2$. **14.** $0 < x < \pi/24$, $5\pi/24 < x < \pi/4$. **15.** $1 < x < 2$. **16.** $(\sqrt{61} - 9)/2 < x < 2$. **17.** $2k\pi - (\pi/4) + \operatorname{arc\,sen} 3/4 < x < (3\pi/4) - \operatorname{arc\,sen} 3/4 + 2k\pi$. **18.** $x < -3$, $-2 < x < -1$. **19.** $x < 1$, $3/2 < x < 2$, $x > 3$. **20.** $-\sqrt{(4-\pi)/\pi} \leqslant x \leqslant \sqrt{(4-\pi)/\pi}$. **21.** $(\pi/6) + k\pi < x < (5\pi/6) + k\pi$. **22.** $(\pi/4) + k\pi < x < (3\pi/4) + k\pi$. **23.** $0 < x < \pi/2$, $2 \operatorname{arc\,tg} [(1+\sqrt{5})/2] < x < \pi$. **24.** $x < \log_2 3$. **25.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **26.** $0 < x < 1$, $x \geqslant 2$. **27.** $1/2 < x < 1$. **28.** $x < -7$, $-5 < x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$. **29.** $x \leqslant -2/3$, $1/2 \leqslant x \leqslant 2$. **30.** $2k\pi - (\pi/4) + \operatorname{arc\,sen}(2\sqrt{2}/3) < x < 2k\pi + (3\pi/4) - \operatorname{arc\,sen}(2\sqrt{2}/3)$, $2k\pi - \pi < x < 2k\pi - (\pi/2)$. **31.** $-1 < x < (1-\sqrt{5})/2$; $(1+\sqrt{5})/2 < x < 2$. **32.** $-1 \leqslant x < 1 - (\sqrt{31}/8)$. **33.** $(3-a)/(2-a) < x \leqslant 2$, si $0 < a < 1$; $2 \leqslant x < (3-a)/(2-a)$, si $1 < a < 2$; $x \geqslant 2$, si $a = 2$; $x < (3-a)/(2-a)$, $x \geqslant 2$, si $a > 2$. **34.** $-1 < x < 0$, $2 < x < 3$. **35.** $1/2 < x < 1$. **36.** $-5/2 < x < -2$, $-3/2 < x < 3/2$, $3/2 < x < 8/3$. **37.** $-1 - \sqrt{23/2} \leqslant x \leqslant \sqrt{23/2} - 1$, si $a > 1$; $-\sqrt{24} < x \leqslant 1 - \sqrt{23/2}$, $\sqrt{23/2} - 1 \leqslant x < \sqrt{24}$, si $0 < a < 1$. **38.** $(14+\sqrt{7})/2 \leqslant x \leqslant 9$. **39.** $(\pi/4) + k\pi < x < (\pi/3) + k\pi$. **40.** $1 < x < 3/2$, $2 < x < 5/2$, $x > 3$. **41.** $-(\pi/2) + k\pi < x < -\operatorname{arc\,tg} 2 + k\pi$, $-(\pi/4) + k\pi < x < (\pi/4) + k\pi$. **42.** $1/4 + k \leqslant x < 1/2 + k$, $1/2 + k < x \leqslant 1 + k$. **43.** $2k\pi < x < (\pi/6) + 2k\pi$, $(\pi/6) + 2k\pi < x < (2k+1)\pi$. **44.** $x \geqslant 1$. **45.** $1 - \sqrt{6} < x \leqslant 2 - \sqrt{10}$, $1 + \sqrt{6} < x \leqslant 2 + \sqrt{10}$. **46.** $(\pi/4) + k\pi < x \leqslant (\pi/3) + k\pi$. **47.** $x < -1$, $x > 1$. **48.** $0 < x < 1$. **49.** $-1/2 \leqslant x < -1/4$, $3/4 < x \leqslant 1$. **50.** $0 \leqslant x \leqslant 81$, $x \geqslant 1296$. **51.** $\operatorname{arc\,tg} 5 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$. **52.** $x = k\pi/3$. **53.** $-6 \leqslant x < 0$, $3 < x \leqslant 4$. **54.** $x \leqslant -2 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3} \leqslant x$. **55.** $x < \log_5 3$. **56.** $-(3+\sqrt{5})/2 < x \leqslant 1$. **57.** $3 < x < \pi$, $\pi < x < 3\pi/2$, $3\pi/2 < x < 5$. **58.** $0 < x < 2$, $x > 4$. **59.** $-(\pi/4) + k\pi < x \leqslant k\pi$, $(\pi/4) + k\pi < x < (\pi/2) + k\pi$. **60.** $-(7\pi/6) + 2k\pi \leqslant x \leqslant (\pi/6) + 2k\pi$.

§ 11

1. $x = -4$, $y = 6$. **2.** $x = 7$, $y = 5$. **3.** $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $x_2 = 16/81$, $y_2 = 4/9$. **4.** $x = 2/3$, $y = 27/8$, $z = 32/3$. **5.** $x_1 = 1$, $y_1 = 6$; $x_2 = 2$, $y_2 = 7$; $x_3 = 3$, $y_3 = 8$. **6.** $x_1 = 4$, $y_1 = 32$; $x_2 = -1$, $y_2 = 1$. **7.** $x = 8$, $y = 2$. **8.** $x_1 = 0$, $y_1 = 2\log_2 3 - 2$; $x_2 = 3$, $y_2 = -1$. **9.** $x = 5$, $y = 0$. **10.** $x_1 = \sqrt{3}$, $y_1 = 4$; $x_2 = -\sqrt{3}$, $y_2 = 4$. **11.** $x = 1$, $y = 0$. **12.** $x = 20$, $y = 16$. **13.** No. **14.** $-2 < k < 4$. **15.** $m = 0$. **16.** $\alpha \neq (\pi/2) + k\pi$.

§ 12

1. 20 km/h, 25 km/h, 15 km/h. **2.** 27, 18 y 12 años. **3.** 30 km. **4.** 1/6. **5.** 19 π cm/s y 27 π cm/s. **6.** No llegarán. **7.** 3 horas, 6 horas, 2 horas. **8.** 5 g y 20 g. **9.** En $5m(t - t_2) - 5m^{-1}(t - t_1)$. **10.** El área del bosque es de 40 km^2. Hay que obtener la ecuación $AC = 5 + 1/4\, BC^2 + 1/16 AB^2$ según los datos del problema; además de esto, para cualesquiera de los tres puntos A, B y C se verifica la desigualdad $AC \leqslant AB + BC$. De aquí resulta que $5 + 1/4\, BC^2 + 1/16 AB^2 \leqslant AB + BC$ ó $(1/2\, BC - 1)^2 + (1/4\, AB - 2)^2 \leqslant 0$, lo que es posible sólo para $AB = 8$ y $BC = 2$. **11.** El número de calificaciones 2, 3, 4 y 5 es igual a 11, 7, 10 y 2, respectivamente. **12.** La velocidad de la motocicleta es de 40 km/h, la del "Moskvich" 60 km/h y la del «Volga», 80 km/h. **13.** El agua se suministra 2 veces más rápidamente. **14.** 1:3. **15.** 20 km/h y 80 km/h. **16.** No. **17.** No. **18.** La velocidad del ciclista es de 20 km/h, la del camión, 40 km/h y la del «Volga», 80 km/h. La distancia AD es igual a 60 km. **19.** No lo alcanzará. **20.** 60 m³. **21.** 2 minutos. **22.** 0,6 km/min. **23.** 12/7 días. **24.** 12 horas. **25.** 4 cajones del tercer tipo y 25 cajones del segundo tipo. **26.** 12 hojas. **27.** El primer tubo llenará el depósito en 2 horas, el segundo, en 4 horas. **28.** 4 horas. **29.** 16 horas 45 minutos. **30.** 18 horas.

§13

1. $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$. **2.** La función es indeterminada para ninguno de los valores de x. **3.** $x=0$. **4.** $-(\pi/4)+k\pi \leqslant x \leqslant (\pi/4)+k\pi$. **5.** $x<0$, $0<x\leqslant 2$, $x \geqslant 3$. **6.** $x=k$. **16.** Nótese que $y=-2$ para todas $x \neq 3$. **24.** La gráfica está compuesta de los puntos del eje Ox con abscisas $x=(\pi/2)+2k\pi$. **25.** Nótese que $y=1$. **26.** Nótese que $y=-\cos 2x$. **27.** Introdúzcase el ángulo auxiliar. **32.** Utilícese el método de composición de gráficas. **36.** Nótese que $y=\sqrt{1-x^2}$; véase el § 5 de la Parte II. **40.** La gráfica de la función y_1 consta de dos ramas y la gráfica de la función y_2, solamente de una. **41.** La gráfica de la función y_1 es la bisectriz del primer ángulo de coordenadas (sin el origen de las coordenadas). **42.** La función y_1 es indeterminada para $x=k\pi/2$. **43.** Los segmentos de la parábola $y=(x-2)^2$ que corresponden a $x\leqslant 1$ y $x\geqslant 3$ y los segmentos de la parábola $y=-x^2+4x-2$ correspondientes a $x\leqslant 1$ y $x\geqslant 3$. **44.** La bisectriz del primer ángulo de coordenadas y el tercer ángulo de coordenadas (incluyendo los semiejes negativos de abscisas y ordenadas). **45.** El interior (incluso el límite del perímetro) del cuadrado con los vértices en los puntos (2, 0), (1, −1), (2, −2), (3, −1). **46.** El semiplano debajo de la recta $y=x-2$ y el semiplano encima de la recta $y=x+2$ (excepto las mismas rectas). **47.** El interior (sin líneas generatrices) del rectángulo con los vértices (1, 2), (−1, 2), (−1, −2), (1, −2). **48.** Los segmentos de la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$, correspondientes a $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, y los segmentos simétricos a éstos respecto del eje de abscisas. **49.** Las rectas $y=2x+(2k+1)\pi$ e $y=-2x(2k+1)\pi$. **50.** Una parte del plano dispuesta a la derecha de la curva $x=\operatorname{sen}|y|$ (incluyendo esta recta). **51.** La faja $0<y<1$ sin segmentos verticales, trazados en los puntos $x=k\pi/2$. **52.** El ángulo curvilíneo, limitado por encima por la recta $y=x$, y por debajo, por la curva $y=-2^x$ (sin las mismas curvas), del cual está excluido el semieje positivo de abscisas. **53.** $y=1+(x-1)^{-1}$, $x>0$, $y>0$. **54.** $y=\sqrt{2}(x-x^{-1})$, $x>0$, $y>0$. **55.** $x=-y^2+(y/4)$, $y>x>0$.

PARTE II

§ 1

1. e) Véase § 5, Parte II. **2.** a) Teorema; b) definición; c) teorema; d) teorema. **3.** Teorema recíproco: "Si $\cos\varphi \leqslant 0$, el ángulo φ termina en el segundo cuadrante" es incorrecto. Teorema contrario: "Si el ángulo φ no termina en el segundo cuadrante, $\cos\varphi > 0$" es incorrecto. Teorema contrario al recíproco: "Si $\cos\varphi > 0$, el ángulo φ no termina en el segundo cuadrante" es correcto. **5.** a) $\operatorname{sen} 1° < \operatorname{sen} 1$; b) $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{tg} 2$. **6.** a) $\alpha=(-1)^k\beta+k\pi$ ó, que es lo mismo, $\beta=(-1)^n\alpha+n\pi$. Es decir, si α y β son ángulos concretos, como $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$, entonces existe un número entero k tal que los ángulos α y β están entrelazados por la relación $\alpha=(-1)^k\beta+k\pi$; b) $\alpha=\pm\beta+2k\pi$; c) $\alpha=\beta+k\pi$, $\alpha\neq(\pi/2)+n\pi$, $\beta\neq(\pi/2)+m\pi$; d) $\alpha=(\pi/2)\pm\beta+2k\pi$. **7.** $\cos(\alpha/2) = -\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}+\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha})$; $\operatorname{sen}(\alpha/2) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$, con esto, el signo "más" se toma en el caso en que $270° \leqslant \alpha \leqslant 360°$ y el signo "menos", cuando $360° \leqslant \alpha \leqslant 450°$; para todas las del intervalo $270° \leqslant \alpha \leqslant 450°$ puede escribirse: $\operatorname{sen}(\alpha/2) = \frac{1}{2}(\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha} - \sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha})$. **8.** 1. **9.** $-1/8$. Multiplicar y dividir la expresión a examinar por $\operatorname{sen}(\pi/7)$.

§ 2

1. Convénzase de que el primer miembro es igual a $\cos 30°$. **2.** 1. **3.** $x = 18°$. Hállese la raiz de la ecuación $\cos 4x = \operatorname{sen} x$ comprendida entre $0°$ y $90°$. **4.** $\cos(\alpha/2) = -1/2\sqrt{2+2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \alpha}} = -1/2(\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} + \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha})$, $\operatorname{sen}(\alpha/2) = \pm 1/2\sqrt{2-2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$ con esto el signo "más" se toma en el caso en que $270° \leqslant \alpha \leqslant 360°$ y el signo "menos", cuando $360° \leqslant \alpha \leqslant 450°$. La última igualdad para todas las α del intervalo $270° \leqslant \alpha \leqslant 450°$ puede escribirse en forma de $\operatorname{sen}(\alpha/2) = 1/2(\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha} - \sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha})$. **5.** Convénzase de que $y = \operatorname{sen}^2\alpha$ para cualquier x. **6.** $(1+\cos^4 x)^{-1/2}$. **7.** $(a+b\operatorname{sen}^2 x)^{-1}$. **8.** $\operatorname{tg}^{3/2} x$; $x = (\pi/3) + k\pi$. **9.** $\operatorname{sen} a/(\cos a \cos x - 1)$. **12.** $\sqrt{2}\cos x \cos^{-1}(x/2)\operatorname{sen}[(\pi/4)-(x/2)]$. **13.** 0. **14.** $a+b = 2ab$. **15.** $(p^2-q^2)^2 = -pq$. **16.** $y = a$; $z = c$. **17.** $-1/8$. Multiplíquese y divídase la expresión considerada por $\operatorname{sen}(\pi/7)$. **18.** Multiplíquese ambos miembros de la igualdad a demostrar por $\operatorname{sen}(\pi/7)$. **19.** Utilícese la igualdad $142°30' = 90° + 45° + 1/2 \cdot 15°$. **20.** $\alpha+\beta \neq (\pi/2) + k\pi$, $\alpha \neq (\pi/2) + k\pi$, $\beta \neq \pi + 2k\pi$. **22.** $(\sqrt{7}-2)/3$. **23.** Determínese que $0° < \alpha < 30°$, $0° < \beta < 30°$, es decir, $0° < \alpha + 2\beta < 90°$ y luego calcúlese $\operatorname{sen}(\alpha+2\beta)$. **24.** Tranfórmese la expresión $[(a/b)(A/B)+1]/[(a/b+(A/B)]$; la condición $aB - bA \neq 0$ significa que $\operatorname{sen}[2x-(\alpha+\beta)] \neq 0$. **25.** q. **26.** $(\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + 2\gamma)/4$. **27.** 2. **28.** 3. **29.** Al sustituir las cotangentes en la suma $\operatorname{cotg}(\alpha/2) + \operatorname{cotg}(\beta/2) + \operatorname{cotg}(\gamma/2)$ por los senos y cosenos, y reduciendo el resultado a un común denominador, transfórmese el denominador en el producto aplicando la igualdad $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

§ 3

1. a) $\alpha = (-1)^n \beta + n\pi$, donde n es un número entero o, que es lo mismo, $\beta = (-1)^k \alpha + k\pi$, donde k es un número entero. Hablando de otro modo: si α y β son ciertos ángulos concretos que dan $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$, entonces existe tal número entero n que asegura que los ángulos α y β estén relacionados entre sí por medio de la correlación $\alpha = (-1)^n \beta + n\pi$. b) $\alpha = \pm\beta + 2n\pi$. c) $\alpha = \beta + n\pi$ y α, $\beta \neq (\pi/2) + k\pi$. d) $\alpha = (\pi/2) \pm \beta + 2n\pi$. **2.** Si $|c| > \sqrt{a^2+b^2}$, en este caso no hay soluciones; si $c = \sqrt{a^2+b^2}$, entonces $x = (\pi/2) - \varphi + 2k\pi$; si $c = -\sqrt{a^2+b^2}$, $x = -(\pi/2) - \varphi + 2k\pi$; si $|c| < \sqrt{a^2+b^2}$, $x = (-1)^k \operatorname{arc\,sen}\left[c/\sqrt{a^2+b^2}\right] - \varphi + k\pi$. Aquí φ es el ángulo auxiliar determinado según las condiciones $\operatorname{sen}\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$. **3.** $x_1 = (\pi/4) + k\pi$, $x_2 = (5\pi/12) + k\pi$. **4.** $x_1 = (\pi/30) + (2k\pi/5)$, $x_2 = -(\pi/2) + 2n\pi$. **5.** $x_1 = (\pi/12) + (k\pi/7)$, $x_2 = (\pi/4) + n\pi$. **6.** $x = \operatorname{arc\,cos} 4/5 + 2k\pi$. Sustituir $\operatorname{sen} 3x$ por $\operatorname{sen} x$. **7.** $x = 1/4 \operatorname{arc\,cos} 3/5 + (k\pi/2)$. Sustituir $\operatorname{sen}^2 2x$ por medio de $\cos 4x$. **8.** $z_1 = -(\pi/3) + 2k\pi$, $z_2 = (\pi/9) + (2n\pi/3)$. **9.** $x_1 = (\pi/2) + k\pi$, $x_2 = \pm\operatorname{arc\,sen}(1/\sqrt{5}) + n\pi$. Obtener la ecuación $\cos(\pi\cos^2 x) = \cos(\pi \operatorname{sen} 2x)$, de donde $2\operatorname{sen} 2x - \cos 2x = 1 - 4k$, ó $2\operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 4k - 1$, donde k es un número entero. En ambos casos $k = 0$ es el valor único de k para el cual existen soluciones. **10.** $x = \pm(\pi/3) + 2k\pi$. **11.** $x_1 = (2k+1)\pi$, $x_2 = (-1)^n(\pi/3) + n\pi$. **12.** $x_1 = (\pi/4) + k\pi$, $x_2 = -\operatorname{arc\,tg} 3 + n\pi$. Demostrar que $\cos x \neq 0$, y dividir todos los miembros en $\cos^2 x$. **13.** $x_1 = \operatorname{arc\,tg} 3/2 + k\pi$, $x_2 = -\operatorname{arc\,tg} 1/2 + n\pi$. Pasar a la función $\operatorname{tg} x$. **14.** $x_1 = k\pi$, $x_2 = (-1)^n(\pi/6) + n\pi$. Pasar a la función $\operatorname{sen} x$. **15.** $x_1 = 2(2k+1)\pi$, $x_2 = (-1)^n(2\pi/3) + 4n\pi$. **16.** $x_1 = 3k\pi$, $x_2 = \pm(\pi/4) + 3n\pi$. Designar $x/3$ por y, y expresar $\operatorname{tg} 3y$ por $\operatorname{tg} y$. **17.** $x =$

$=(-1)^n(\pi/20)-(6/5)+(n\pi/5)$. Designar $5x+6$ por y. **18.** $x_1=\frac{1-2n}{2n+3}$, $x_2=\frac{7-6k}{6k+5}$, $x_3=-\frac{(m-1)\pi-\operatorname{arc\,cotg} 2\sqrt{3}}{(m+1)\pi+\operatorname{arc\,cotg} 2\sqrt{3}}$. Sustituir $\frac{\pi-\pi x}{1+x}$ por y. **19.** $x=\pm(\pi/3)+k\pi$. Hay que pasar a la función $\cos 2x$. **20.** $t_1=k\pi$, $t_2=\pm(\pi/6)+n\pi$. Es necesario pasar a la función $\cos 2t$. **21.** $x=\pm(2\pi/3)+2k\pi$. Hay que cerciorarse de que $\operatorname{sen}^4(x/2)-\cos^4(x/2)=-\cos x$. **22.** $x=(\pi/8)+(k\pi/4)$. Hay que cerciorarse de que $\operatorname{sen}^8 x+\cos^8 x=2+12\cos^2 2x+2\cos^4 2x$ y después pasar a $\cos 4x$. **23.** $x=\pm(\pi/6)+(k\pi/2)$. Utilizar la fórmula de la suma de cubos. **24.** $x_1=2(2k+1)\pi$, $x_2=(2n+1)\pi$, $x_3=(2\pi/5)+(4m\pi/5)$. Hay que liberarse de los cuadrados de cosenos y transformar la suma obtenida en el producto. **25.** $y_1=2k\pi$, $y_2=(3\pi/8)+(n\pi/2)$, $y_3=-(\pi/2)+2m\pi$. **26.** $x_1=k\pi/4$, $x_2=\pm 1/4\arccos[(1+\sqrt{5})/4]+(n\pi/2)$, $x_3=\pm 1/4\arccos[(1-\sqrt{5})/4]+(m\pi/2)$. **27.** $x=2\beta\pm(2\pi/3)+2k\pi$. Es necesario transformar el producto de cosenos en la suma. **28.** $x=2k\pi/[n(n+1)]$, siendo k cualquier número entero. Hay que transformar los productos de senos en las diferencias de cosenos. **29.** $x_1=(2k+1)\pi$, $x_2=(\pi/2)+n\pi$, $x_3=2m\pi/5$. **30.** $x_1=n\pi/3$, $x_2=2m\pi/9$. **31.** $x_1=k\pi$, $x_2=\pm\operatorname{arc\,tg}\sqrt{5/7}+n\pi$. **32.** $x_1=(\pi/4)+k\pi$, $x_2=(\pi/2)+2n\pi$, $x_3=(2m+1)\pi$. Emplear las fórmulas: $\cos 2x=(\cos x+\operatorname{sen} x)(\cos x-\operatorname{sen} x)$ y $1-\operatorname{sen} 2x=(\cos x-\operatorname{sen} x)^2$. **33.** $x_1=2k\pi$, $x_2=(\pi/2)+n\pi$, $x_3=-(\pi/4)+m\pi$. Es necesario transformar el primer miembro de la ecuación en la forma siguiente: $2\cos x(\operatorname{sen} x+\cos x)^2$. **34.** $x_1=\pm(\pi/4)+k\pi$, $x_2=-(\pi/6)+(n\pi/2)$. Designar $\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x$ por y; indicar que $\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x=-2\operatorname{cotg} 2x$. **35.** $x_1=\pm(\pi/6)+2k\pi$, $x_2=(-1)^{n+1}\operatorname{arc\,sen} 1/4+n\pi$. Es necesario representar la expresión subradical en la forma del cuadrado completo. **36.** $-(\pi/3)+k\pi\leqslant x\leqslant-(\pi/6)+k\pi$, $(\pi/6)+k\pi\leqslant x\leqslant(\pi/3)+k\pi$. **37.** $x=\log_2 p$, donde $p=1, 2, \dots$ **38.** $x_1=\log_4 p$, $x_2=\log_4(4p-1)-1$, $x_3=\log_4(4p-3)-3/2$, donde $p=1, 2, \dots$ **39.** $x_1=\pm 1/2\arccos 1/3+k\pi$, $x_2=\pm 1/2\arccos(-1/4)+k\pi$. Hay que escribir la ecuación en otra forma: $5(\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} 3x)=\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x$ y pasar a senos y cosenos. **40.** $x=(\pi/4)+2k\pi$. Escribir la ecuación en la forma siguiente: $4(\operatorname{sen} x+\cos x)+(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x)+(\cos x-\cos 3x)=2\sqrt{2}(2+\operatorname{sen} 2x)$. **41.** $x=13\pi/4$. **42.** $x_1=\pi/6$, $x_2=3\pi/10$, $x_3=7\pi/6$, $x_4=13\pi/10$. **43.** $x=(2p+1)\pi/18$, donde p es cualquier número entero, además de los números de la forma: $9m+4$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ **44.** $x_1=\pi/3$, $x_2=5\pi/3$. **45.** $x_1=5\pi/6$, $x_2=13\pi/6$. **46.** $x=(\pi/2)+2k\pi$. **47.** No hay soluciones. **48.** No hay soluciones. **49.** $x=(2k+1)\pi$. **50.** $x=-(\pi/6)+k\pi$. **51.** $x=4$. **52.** No hay soluciones. **53.** $x=k\pi$. Utilizar la fórmula de la diferencia de tangentes y obtener la ecuación $\cos x\cos 2x=-1$. **54.** Es necesario demostrar que la igualdad $\operatorname{sen} 2x=\operatorname{sen} 3x=1$ es imposible para todo valor de x. **55.** $x=\pm 1/2\arccos[(a^2-2)/2]+k\pi$ para $|a|\leqslant 2$. **56.** $a=1$, $x=k$. Hay que transformar la ecuación en la siguiente: $\cos^2\pi(a+x)=1/(2a-a^2)$. **57.** $x_1=7\pi/6$, $x_2=11\pi/6$ para $a=-1/4$; $x_1=\pi+\operatorname{arc\,sen}(1+\sqrt{1+4a})/2$, $x_2=2\pi-\operatorname{arc\,sen}(1+\sqrt{1+4a})/2$, $x_3=\pi+\operatorname{arc\,sen}(1-\sqrt{1+4a})/2$, $x_4=2\pi-\operatorname{arc\,sen}(1-\sqrt{1+4a})/2$ para $-1/4<a<0$; $x_1=0$, $x_2=\pi$, $x_3=3\pi/2$ para $a=0$; $x_1=\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1+4a}-1)/2$, $x_2=\pi-\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1+4a}-1)/2$ para $0<a<2$; $x=\pi/2$ si $a=2$; no hay soluciones si $a<-1/4$ y cuando $a>2$. Escribir las condiciones para las cuales la ecuación $z^2+z-a=0$ tenga las raíces reales; la raíz menor no es menor de -1, y la mayor no supera a la unidad. **58.** $x=k\pi$ para todo $m>0$; además de esto, $x=\pm 1/2\arccos(\sqrt{1+2m}-1)/2+n\pi$ si $0<m\leqslant 4$. Pasar a las funciones del ángulo $2x$. **59.** $x=(-1)^k\operatorname{arc\,sen}[b/(b-1)]+k\pi$ si $b<1/2$, $b\neq-1$, $b\neq 1/3$, $b\neq 0$. Reducir la ecuación a la forma siguiente: $\operatorname{sen} x=b/(b-1)$ y tomar en consideración las limitaciones: $\operatorname{tg} x\neq 0$, $\cos x\neq 0$, $2\cos 2x\neq 1$, $\operatorname{tg}^2 x\neq 1/3$. **60.** $x=\pm\operatorname{arc\,sen}\sqrt{2/(1+a^2)}+k\pi$ si $|a|>1$, $|a|\neq\sqrt{3}$. Reducir la ecuación a la forma siguiente: $\operatorname{sen}^2 x=2/(1+a^2)$ y tomar en consideración las limitaciones $\operatorname{tg}^2 x\neq 1$, $\cos 2x\neq 0$, $\cos x\neq 0$.

§ 4

1. $x_1=(7\pi/36)+k\pi$, $y_1=(5\pi/36)+k\pi$; $x_2=-(11\pi/36)+k\pi$, $y_2=-(13\pi/36)+k\pi$. 2. $x=(\pi/2)+k\pi$, $y=(\pi/6)-k\pi$. 3. $x=-(\pi/6)+(-1)^k/2 \operatorname{arc\,sen}\frac{2-3\sqrt{3}}{6}+\frac{k\pi}{2}$, $y=(\pi/6)+(-1)^k/2 \operatorname{arc\,sen}\frac{2-3\sqrt{3}}{2}+\frac{k\pi}{2}$. 4. $x_1=(\pi/4)+k\pi$, $y_1=\operatorname{arc\,tg} 2+n\pi$, $z_1=(3\pi/4)-\operatorname{arc\,tg} 2-(k+n)\pi$; $x_2=-(\pi/4)+k\pi$, $y_2=-\operatorname{arc\,tg} 2+n\pi$, $z_2=(5\pi/4)+\operatorname{arc\,tg} 2-(k+n)\pi$. 5. $x=(-1)^k \operatorname{arc\,sen}\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k\pi$, $y=\pm\operatorname{arc\,cos}(2-\sqrt{2})+2n\pi$. 6. $x=\frac{1}{2}\times\left[(-1)^k \operatorname{arc\,sen}\frac{2}{5}+(-1)^n \operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}+(k+n)\pi\right]$, $y=\frac{1}{2}\left[(-1)^k \operatorname{arc\,sen}\frac{2}{5}-(-1)^n \operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}+(k-n)\pi\right]$. 7. $x=2$, $y=1$. 8. $x_1=\pi/3$, $y_1=\pi/6$; $x_2=0$, $y_2=\pi/2$. 9. $x_1=\pi_1$, $y_1=\pi$ para todo $a>0$; si $1\leqslant a\leqslant 2$, $x_2=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3}$, $y_2=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3a^2}$; $x_3=\pi-\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3}$, $y_3=\pi-\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3a^2}$, $x_4=\pi+\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3}$, $y_4=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/(3a^2)}$; $x_5=2\pi-\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3}$, $y_5=\pi-\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/(3a^2)}$, son también las soluciones. 10. $x_1=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{a}+k\pi$, $y_1=\pm\operatorname{arc\,cos}\frac{2\sqrt{a}}{b(1-a)}+2n\pi$; $x_2=-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{a}+k\pi$, $y_2=\pm\operatorname{arc\,cos}\frac{2\sqrt{a}}{b(a-1)}$, si $a\geqslant 0$, $a\neq 1$, $2\sqrt{a}\leqslant|b(1-a)|$.

§ 5

1. $-\pi/3$, $\pi/2$. 2. $5\pi/6$, π, $\pi/2$. 3. $-\pi/6$, $-\pi/4$. 4. $2\pi/3$, $3\pi/4$, $\pi/2$. 5. $5-2\pi$, $4\pi-10$, $2\pi-6$, $4\pi-10$. 6. $-\operatorname{arc\,sen}\frac{4\sqrt{15}-3}{20}$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13}$, $\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}$. 13. $x\geqslant 0$. 14. $x>0$. 15. No hay soluciones. 16. $x=1$. 17. $x=0$. 18. $x=\sqrt{3}/2$.

PARTE III

§ 1

1. e) Si se intersecan dos planos, en la recta que es su línea de intersección se forman cuatro ángulos diedros (dos pares de ángulos diedros verticales); cualquiera de éstos puede tomarse por ángulo entre los planos. f) Hay que prestar atención a las dos posibilidades siguientes: si uno de los radios del sector circular, con cuya rotación se obtiene el sector esférico, coincide con el eje de rotación (en este caso el sector esférico es una figura convexa, la base del sector esférico es una superficie de segmento); cuando el eje de rotación no interseca el arco de este sector circular (en este caso el sector esférico no es una figura convexa, su base es una banda esférica). 2. a) Es un teorema. b) Es una definición. c) Es un axioma. d) Es un teorema. 3. Teorema inverso: "Si la recta L es paralela al plano π, la recta L será paralela a la recta l" no es válido. Teorema contrario: "Si la recta L no es paralela a la recta l, la recta L no será paralela al plano π" no es válido. Es válido el teorema que es contrario al inverso: "Si la recta L no es paralela al plano π, la recta L no es paralela a la recta l". 4. Se deduce del teorema inverso al teorema de Pitágoras. 5. a) No se puede. Por ejemplo, inscribamos el triángulo ABC en la cir-

cunferencia y vamos a analizar los polígonos inscritos, para los cuales las cuerdas AB y BC son siempre sus lados (es decir, todos los vértices, excepto B, se eligen en el arco AC); b) No se puede. Por ejemplo, tomemos la sucesión de los triángulos inscritos $A_nB_nC_n$, para los cuales los arcos AB y BC son iguales a $2\pi/n$ (¿A qué es igual el límite de sucesión de los perímetros de estos polígonos?). 6. Hay que comparar la longitud de la circunferencia con el perímetro del hexágono regular inscrito en ésta y con el perímetro del cuadrado circunscrito a la misma. 7. No es válida. La demostración es errónea y puede ser válida únicamente en el caso en que AB y AB_2 ó BC y CB_2 no componen una recta; en este caso los triángulos son realmente iguales. Pero es posible también aquella configuración en la que AB y AB_2 (ó BC y CB_2) se hallan en una misma recta. 8. Son posibles dos configuraciones distintas: las tres rectas son paralelas entre sí o las tres se intersecan en un punto.

§ 2

1. a) Hay que trazar las rectas L^* y L^{**} que sean paralelas a L y separadas de la misma a la distancia a, y las rectas l^* y l^{**} que sean paralelas a l y disten de ésta a a. Examinar las bisectrices de los ángulos formados en los puntos de intersección de L con l^* y l^{**} y también de l con L^* y L^{**}. b) Es necesario unir el punto arbitrario M del lugar geométrico desconocido con los puntos A y B; construir a base del $\triangle AMB$ un paralelogramo con la diagonal AB y convencerse de que $MO^2 = 2a - AB^2 = \text{const.}$, por consiguiente, siendo $2a \geqslant AB^2$, el lugar geométrico desconocido es la circunferencia con el centro en el punto O (para $2a = AB^2$ ésta se degenera en el punto). No hay tales puntos de M para $2a < AB^2$. **2.** Es la circunferencia con el diámetro AB, siempre que se excluyan los puntos A y B. Trazar una tangente común en el punto M y aplicar el teorema sobre la igualdad de los segmentos de las tangentes trazadas desde un punto a una misma circunferencia. **3.** Es todo el plano. Demostrar que desde cualquier punto del plano, como desde el centro, es siempre posible trazar una circunferencia que interseque las tres rectas. **4.** Es la circunferencia construida en el segmento AB como en el diámetro. **5.** Es la circunferencia construida en el segmento OA (donde O es el centro de la circunferencia) como en el diámetro. **6.** Es una circunferencia concéntrica a la dada y de radio r cosec $(\alpha/2)$, donde r es el radio de la circunferencia dada. **7.** Es una circunferencia cuyo centro se encuentra en el punto medio del segmento OA (donde O es el centro de la circunferencia dada) y el radio es dos veces menor que el de la circunferencia dada. **8.** Es la circunferencia con el centro O en el punto medio del segmento AB y con el radio AB. Demostrar que $MO = AB$. **9.** a) Es la recta que es perpendicular al plano del triángulo ABC y pasa por el centro de la circunferencia circunscrita a este triángulo; b) tales puntos no existen. **10.** Son las cuatro rectas, obtenidas en la intersección de los planos bisectrales de los ángulos diedros entre los planos Π y π con dos planos que son paralelos a Π y están alejados de éste a la distancia a. **11.** Son las cuatro rectas que son perpendiculares al plano π y pasan por los centros de la circunferencia inscrita y de las inscritas al triángulo formado por las líneas de intersección de los tres planos dados con el plano π. **12.** Es la esfera construida a base del segmento AB como su diámetro. **13.** Es la circunferencia del círculo mayor obtenida por el corte de la esfera construida en el segmento AP (donde P es la base de la perpendicular bajada desde el punto A a la recta l) como en el diámetro, por medio del plano que pasa por AP perpendicularmente a la recta l. **14.** Son todos los puntos situados dentro del ángulo diedro dado. Demostrar lo siguiente: si por cualquier punto interno M se traza un plano que es perpendicular a la arista del ángulo diedro, en este caso, en los lados del ángulo lineal formado es siempre posible elegir los puntos A y B de tal modo que M sea el punto medio del segmento AB. **15.** Son todos los puntos del plano Π que pasa por la recta L en paralelo a l, excepto los puntos de la propia L, así como todos los puntos del plano π que pasa por la recta l en paralelo a L, salvo los puntos de la propia recta l. **16.** Se necesita examinar por separado los casos en que $l > a/\sqrt{2}$, $l = a/\sqrt{2}$, $l < a/\sqrt{2}$. **17.** Es una circunferencia. Después de trazar un plano que pasa por la recta AB y el punto de tangencia M, debe calcularse la distancia KM, donde K es el punto de intersección de la recta AB con el plano π. **18.** Si $l > a$, el lugar geométrico buscado lo constituyen todos los puntos de la circunferencia de radio $1/2\sqrt{l^2-a^2}$, cuyo centro está en el centro del cubo. La circunferencia se encuentra en el plano horizontal que pasa por el centro del cubo. Si $l = a$, el lugar geométrico buscado es el único punto: el centro del cubo. Si $l < a$, ninguno de los puntos del espacio posee la propiedad necesaria. **19.** Se señalará que $\sqrt[4]{a^4+b^4} = \sqrt{c\sqrt{(ac/b)^2+(bc/a)^2}}$, donde $c = \sqrt{ab}$. **20.** Recúrrase al hecho de que en caso de ser O el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC y OM la perpendicular bajada desde el punto O al lado $BC = a$, será $BM = MC = a/2$; por lo tanto, es fácil construir el triángulo OBM y luego, el vértice C. **21.** Si las rectas AB y l se intersecan en el punto C, hay que utilizar la igualdad $AC \cdot BC = CD^2$, donde D es el punto de tangencia de la circunferencia desconocida con la recta l. **22.** El centro de la circunferencia buscada equidista del centro O de la circunferencia dada y también del punto dispuesto en la perpendicular trazada a la recta l desde el punto A, y separada del punto A a una distancia que es igual al radio de la circunferencia dada. **23.** Valiéndose de la relación entre las áreas, expresar AC por medio de AB y trazar el segmento AC según esta fórmula. **24.** Componer la ecuación para el segmento BD y expresarlo por medio del lado AB y la altura h del triángulo ABC bajada al lado AB. Trazar el segmento h y construir, luego, el segmento BD según la fórmula obtenida. **25.** Valiéndonos de la igualdad de los volúmenes de la pirámide y del prisma, expresar el cateto del triángulo rectángulo isósceles buscado mediante el segmento h y el lado de la base de la pirámide, y efectuar la construcción según esta fórmula.

§ 3

1. $\sqrt{(bc-l^2)(b+c)^2/bc}$. **2.** $1/2\ h \operatorname{cosec}\alpha \sqrt{-\cos 2\alpha}$. **3.** $\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C = \sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3$. **4.** $1/16$. **5.** $\operatorname{arc\,tg}[24va^{-3}n^{-1}\operatorname{sen}^2(\pi/n)\sec(\pi/n)]$. **6.** b/a. **7.** $1/6\pi a^3 \operatorname{sen} 2\alpha \sec^2 2\alpha$. **8.** $2\operatorname{arc\,tg} 1/4$. **9.** $1/3\pi bc(b+c)\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha/2)$. Cabe señalar que el eje de giro es perpendicular a la bisectriz del ángulo A. **10.** $R^2 \operatorname{arc\,sen}[r/(R-r)]$. **11.** $1/2a\sec(\alpha/2)$. **12.** $\operatorname{arc\,cos}(-\cos^2\alpha)$. **13.** $[bc/(b+c)]^2$. **14.** $2m\cos\alpha\operatorname{cotg}(\alpha/2)$; $1/4m\operatorname{cosec}^2(\alpha/2)$. **15.** $R[(\pi/2)+\alpha-\beta]$, $R[(\pi/2)-\alpha+\beta]$, $R[-(\pi/2)+\alpha+\beta]$, $R[(3\pi/2)-\alpha-\beta]$, donde $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(18/\sqrt{445})$, $\beta = \operatorname{arc\,sen}(21/\sqrt{445})$. **16.** S/l. **17.** $2/3r$. **18.** $\dfrac{2p(p+q)R^2\operatorname{sen}2\varphi\cos^3\varphi}{p^2+q^2+2pq\cos 2\varphi}$. **19.** $\operatorname{tg}^2(\varphi/2)$. **20.** $\sqrt{4/3(a^2-a+1)}$. **21.** $3+2\sqrt{3}$. **22.** $2ab/(a+b)$. **23.** $8\operatorname{sen}(\alpha/2)\times\operatorname{sen}(\beta/2)\operatorname{sen}(\gamma/2)$. **24.** $2\operatorname{arc\,sen}\dfrac{h_a h_b}{l(h_a+h_b)}$. **25.** $9/4$. **26.** $12/5$. **27.** $1/2b\times[\cos(3\alpha/2)]\sec(\alpha/2)\operatorname{cosec}\alpha$. Cabe señalar que para $\alpha < \pi/3$ el centro de la circunferencia circunscrita está más próximo a la base del triángulo que el centro de la circunferencia inscrita, mientras que para $\alpha > \pi/3$, está más lejos. **28.** $(a-r)/(a+r)$. Trazar la recta $APOQ$ que pasa por el punto A y el centro O de la circunferencia y señalar que la magnitud buscada es igual a la relación entre las áreas de los triángulos BPC y BQC. A continuación se calcula la relación de las alturas de los triángulos, bajadas al lado BC. **29.** $2\operatorname{sen}^2\alpha/[\alpha\times(1+\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)]$, donde α es la medida del ángulo AOB en radianes. **30.** $2\operatorname{arc\,sen}[(1-m)/\sqrt{m^2+2m}]$ siendo $1/4 < m < 1$. **31.** $-2S\cos 2\alpha\cos^2\alpha$.

32. $1/4a^2|\cos^2\alpha|\operatorname{tg}\alpha(1+2\cos\alpha)^{-1}$. **33.** $a\sqrt{1+4\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^4\dfrac{\alpha+\beta}{2}}}$.

34. $\dfrac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2b\operatorname{sen}\alpha}$, $\dfrac{|a^2-b^2|}{b}$. **35.** 2m y 2m. **36.** 2 cm, 1/2 cm y 5/2 cm. **37.** 3 y 4. **38.** $2(1-\alpha)$. **39.** $(1-\alpha)/\beta$. **40.** Unicamente el triángulo equilátero. **41.** No serán suficientes. **42.** No en todos los casos Bastarán dos segundos, si la base de la pirámide es cuadrática. **43.** $\cos\alpha=2/3$. Demostrar que el ángulo del vértice A del triángulo ha de ser agudo y el punto H de la intersección de las alturas, diametralmente opuesto al punto de tangencia de la circunferencia inscrita con la base del triángulo. Cabe señalar a continuación que $\angle HBC=90^\circ-\alpha$ y obtener la igualdad $\operatorname{cotg}\alpha=2\operatorname{tg}(\alpha/2)$. **44.** Es 4:1. **45.** $\operatorname{sen}^2\times\times[(\pi/4)-(\alpha/4)]\operatorname{cosec}^2[(\pi/4)+(3\alpha/4)]$. **46.** $1/4h\operatorname{sen}^2(\beta-\alpha)\operatorname{cosec}^2\alpha\operatorname{cosec}^2\beta\times\times[a-1/2\,h\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta]$. **47.** $(\pi/4)\pm\arccos\left[(1+2\sqrt{2})/4\right]$. **48.** $\arccos\left(1/\sqrt[4]{2}\right)$. **49.** $AB=BC=2$, $CD=1$, $AD=\sqrt{3}$, $S=3\sqrt{3}/2$. **50.** $6\sqrt{7}$.

§ 4

1. a) $\arccos\left(\sqrt{3}/3\right)$; b) 60°; c) 90°; d) $a/\sqrt{2}$; e) $a/\sqrt{3}$. **2.** 90°; $\arccos 1/3$; $a/\sqrt{2}$. **3.** Es válida. Sin embargo, la demostración no es correcta ya que no está demostrado que el plano construido π no depende de la elección del punto A en la recta L. Además, es necesario demostrar que en caso de tomar otro punto en la recta L y efectuar las mismas construcciones, el plano obtenido coincidirá con el plano π. **4.** Sólo si $L\perp l$. **5.** No siempre. Dicha recta existe únicamente en el caso en que las tres rectas dadas que se cruzan son paralelas a un plano. **6.** Sí, siempre. Por una de las rectas l_1 y el punto A en la otra recta l_2 debe trazarse el plano π; demostrar que el punto A se puede elegir de tal manera que el plano π y la tercera recta l_3 no sean paralelos. Trazar la recta L que pase por el punto A y el punto de intersección de la recta l_3 con el plano π; demostrar que el punto A puede elegirse de tal modo que las rectas L y l_1 no sean paralelas. **7.** No existen. **8.** $1/3a\sqrt{2}$ y $2/3a\sqrt{2}$. Señalar que la perpendicular común es igual a la altura de la pirámide de base triangular cortada del cubo por el plano que pasa por los extremos de sus tres aristas que convergen en un vértice. **10.** Sí, pueden. **11.** Desde 0 hasta π, cualquiera que sea la magnitud del ángulo diedro dado. **12.** Paralelogramo. **14.** $\operatorname{arc\,sen}\times\times(\operatorname{sen}\varphi\operatorname{cosec}\alpha)$. **15.** $\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}/3\right)$ y $\operatorname{arc\,tg}\left(5\sqrt{2}/7\right)$. **16.** $2\operatorname{arc\,sen}\times\times\left(b/\sqrt{4b^2-a^2}\right)$. **17.** $\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta}$. **18.** $\arccos(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)$. **19.** $2\arccos 3/4$ y $\arccos 3/4$. **20.** $\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$. **21.** $2/3R\sqrt{3+6\cos\alpha}$. **22.** Los dos ángulos son iguales a $\operatorname{arc\,sen}\cdot\left[\operatorname{sen}\alpha/\sqrt{2}\right]$. **23.** $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}\beta\sec\alpha)$. **24.** b/c. **25.** $BD=1/5\cdot\sqrt{9a^2+4b^2+25c^2-12ab\cos\alpha}$, $BC=1/5\cdot\sqrt{9a^2+9b^2+25c^2+18ab\cos\alpha}$. **26.** $\arccos\dfrac{c^2-d^2}{\sqrt{(c^2+d^2)^2-4(a^2-b^2)^2}}$. **27.** $\operatorname{arc\,sen}\left[(2/\sqrt{3})\operatorname{sen}(\alpha/2)\right]$. **28.** $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{7}$; $a\sqrt{3/7}$. **29.** $9a^3\cos^2(\alpha/2)\times\times\operatorname{cotg}(\alpha/2)/[3-4\operatorname{sen}^2(\alpha/2)]$. **30.** $1/8p^3\sqrt{3}\operatorname{cotg}^2\alpha(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}$. **31.** $2\operatorname{sen}(\varphi/2)\times\times\sqrt{\operatorname{sen}(\varphi/2)\operatorname{sen}(3\varphi/2)}$. **32.** $\operatorname{sen}\varphi=2\sqrt{2}/3$. **33.** $\arccos(\operatorname{cotg}^2\gamma)$. **34.** 45° ó 60°. Por una de las rectas que se cruzan hay que trazar un plano que sea paralelo a la otra recta y proyectar esta última sobre el plano construido. Según sea obtuso o agudo el ángulo formado por el segmento que une las proyecciones de los puntos A y B sobre este plano, son posibles dos casos. **35.** $\sqrt{9m^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha - l^2} + \sqrt{9m^2 \operatorname{cosec}^2 \beta - l^2}$, si son agudos los dos ángulos al lado AB del triángulo ABM; $\left| \sqrt{9m^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha - l^2} - \sqrt{9m^2 \operatorname{cosec}^2 \beta - l^2} \right|$, si uno de estos ángulos es obtuso. **36.** $2 \operatorname{arc\,sen} [1/2 \operatorname{tg} (\alpha/2)]$.

§ 5

4. Se aprovecha la semejanza de los triángulos obtenidos en la construcción con el fin de sustituir las relaciones de la igualdad a demostrar del miembro de la izquierda por otras nuevas, en cuyo denominador haya un mismo lado del triángulo ABC. **13.** Se aplica la fórmula del seno del ángulo triple. **16.** 4:9. **21.** $3/4a^2$; $\arccos \sqrt{1/3}$. **29.** $1/2b \operatorname{tg} (\alpha/2) [3 - 4 \operatorname{sen}^2 (\alpha/2)]^{-1/2}$. **30.** $\dfrac{2\sqrt{3}h \operatorname{tg} [(\alpha - \pi)/6]}{9 \operatorname{tg}^2 [(\alpha - \pi)/6] - 3}$. **31.** $3 \sqrt[3]{\dfrac{48V \operatorname{sen} (\alpha/2)}{\sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^2 (\alpha/2)}}}$.

§ 6

1. Tomar dos rectas l_1 y l_2 de las tres dadas, construir los planos paralelos π_1 y π_2 que contengan a l_1 y l_2 respectivamente. Sean A y B los puntos de intersección de la tercera recta l_3 con los planos π_1 y π_2. Por el punto A en el plano π_1 trazar la recta k_1 paralela a l_2 y, por el punto B en el plano π_2, la recta k_2 paralela a l_1. Construir a continuación paralelogramos iguales: en el plano π_1 con el vértice A y diagonales situadas en las rectas l_1 y k_1; en el plano π_2 con el vértice B y diagonales situadas en las rectas l_2 y k_2. **2.** No es válido. **3.** No es cierta. **4.** Sí, se puede. El plano secante se tomará paralelo a las líneas de intersección de las caras opuestas del ángulo tetraédrico dado. **5.** Es imposible. **8.** Es un cuadrado. **9.** Es un hexágono regular. **10.** Construir la sección del cubo por el plano que pase por los puntos A, B, C, D que dividen las aristas correspondientes del cubo en la relación 1:3 (fig. 170). Convencerse de que $ABCD$ es un cuadrado con el lado $3\sqrt{2}/4 \approx 1{,}06$ (si la arista del cubo se toma por 1). En calidad de orificio buscado puede tomarse un cuadrado de lado 1 situado dentro del cuadrado $ABCD$. **11.** $1/3a \times (3 + 2\sqrt{3})$. **12.** $2a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. **13.** $a(3 - \sqrt{3})$. **14.** $1/2a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. **15.** Es posible. **16.** $4\pi/27$. **17.** $\operatorname{arc\,tg} [\sqrt{2} \operatorname{cotg} (\alpha/2)]$. **18.** $a/\sqrt{2}$. **19.** $2Rl^{-1} \times \sqrt{l^2 - R^2} \operatorname{sen} (\pi/n)$; $2 \operatorname{arcsen} [Rl^{-1} \operatorname{sen} (\pi/n)]$. **20.** $2/3\pi h^3$. **21.** $a\sqrt{3/2}$. **22.** $l \cos^2 (\alpha/2) \operatorname{sen} (\alpha/2)$. **23.** $a^3b^3c^3 (ab + bc + ca)^{-3}$. **24.** $1/12\pi a^3 [1 + 2 \operatorname{cotg}^2 \times (\alpha/2)]$. **25.** $1/2c \operatorname{sen} B \operatorname{cosec} A$, $1/2c \operatorname{sen} A \operatorname{cosec} B$, $1/2c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{cosec}^2 (A + B)$. Expresar los lados del triángulo por medio de los radios de las esferas. **26.** $1/3\pi b^3 \cos \beta \cos (\alpha/2) \operatorname{sen}^2 (\alpha/2)$. **27.** $\operatorname{arctg} [\operatorname{sen} \alpha / \sqrt{\cos 2\alpha}]$. Si $2\alpha > \pi/2$, los conos no tienen planos tangentes comunes (que no pasan por la generatriz común). **28.** $2l \sec (\alpha/2) \sec \beta \sqrt{\operatorname{sen} (\alpha - \beta) \operatorname{sen} \beta}$. **29.** $(2 + \sqrt{3})/4$.

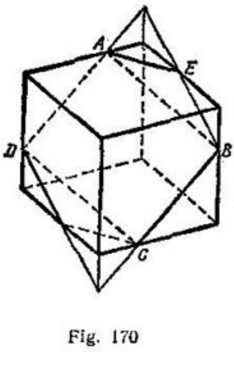


Fig. 170

§ 7

1. $a^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha \cos\alpha \operatorname{cosec}^2 3\alpha$. 2. $1/4a^2 \sqrt{4\cos^2\alpha - 1}$. 3. $a^3\cos^3\alpha$. 4. 1:15. 5. $a^3\sqrt{3}/2$. 6. $\sqrt{2}+1$. 7. $3/4\sqrt{3}h^2(l^2-h^2)(h-a)^{-2}$. 8. $(3\sqrt{3}+1)/26$. 9. $3/\sqrt{14}$. 10. $\sqrt{3}V^{2/3}\cos^{-1/3}\alpha \operatorname{sen}^{-2/3}\alpha$. 11. $a(1+2\cos\varphi)^{-1}$. 12. $d^2\sqrt{2}\operatorname{cosec}\varphi$. 13. $3+2\sqrt{2}$. 14. $\sqrt[4]{3}S^{1/2}\cos^{1/2}\alpha \operatorname{sen}\alpha$. 15. 13:23. 16. 1:47. 17. $3a$. 18. $3\sqrt{3}a^2/4$. 19. $1/4(2a+b)^2$. 20. $3a^2/2\sqrt{2}$. 21. $a^2\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)$. 22. $23V/24$. 23. $2/5a$. 24. $12h^3/247$. 25. $25a\sqrt{4h^2+3a^2}/64$. 26. $5S/4$. 27. $25S/16$. 28. 100/69. 29. $4\sqrt{6}h^2/9$. 30. arccos 3/4. 31. $(a/3)\sqrt{15+9\sqrt{3}}$, $(a/12)\sqrt{15+9\sqrt{3}}$. 32. $3\sqrt{3}/32$. 33. $\dfrac{3d^2}{4}$. 34. $3\sqrt{3}/4\ \mathrm{dm}^2$. 35. $3\sqrt{7}/16\ \mathrm{dm}^2$.

§ 8

1. $\pi h\sqrt{2R(2R-h)}$. 2. $a\sqrt{6}/8$. 3. $4\pi rR^2(2R-r)^{-1}$. 4. $\arccos\sqrt{\dfrac{4V-2\pi R^3}{3V+2\pi R^3}}$. 5. 4:21. 6. $2\pi/3$. 7. $10\pi h^3/9$. 8. 16:9. 9. $8\sqrt{3}a^3/27$. 10. $6\sqrt{3}/\pi$. 11. $b\cos(\alpha/2)\operatorname{tg}(\alpha/4)$. 12. $\sqrt{3}r^3\operatorname{cotg}^3(\alpha/2)\operatorname{tg}\alpha$. 13. $1/2\,l\operatorname{sen}^3\alpha$. 14. $2r\operatorname{cosec}2\varphi(1+\operatorname{sen}\varphi)$. 15. $a\sqrt{6}/2$. 16. $1/3(1+2\sqrt{2})^3\pi R^3$. 17. Los datos del problema se satisfacen por dos esferas de radios $r\left[1+2\operatorname{tg}^2(\alpha/2)\pm\operatorname{tg}(\alpha/2)\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}\right]$. 18. $S_{\text{lat}}=1/3\pi l^2$, $R=3l/4\sqrt{2}$. 19. $\sqrt{2}\pi a^3/36$. 20. $V=a^2h/2$, donde para $a/2\leqslant r<a/\sqrt{2}$ $h=\dfrac{r\pm\sqrt{r^2-a^2/4}}{1-2r^2/a^2}$; para $r=a/\sqrt{2}$ $h=a/4$; para $r>a/\sqrt{2}$ $h=\dfrac{r-\sqrt{r^2-a^2/4}}{1-2r^2/a^2}$. 21. $1/4a(\sqrt{3}-1)^3$. 22. $b\sqrt{4a^2-b^2}/(4a+10b)$. 23. $1/18\pi a^3\sqrt{3}$. 24. $r(1+\sqrt{3}+2/3\sqrt{6})$. 25. $1/3r\left(6+\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}}\right)$. 26. $1/2r(2+\sqrt{6})$. 27. 2. 28. $\dfrac{9a^2h^2}{a^2+12h^2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{a^2+12h^2}}{a\sqrt{3}}$. 29. $\dfrac{a(2b-a)\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$. 30. $5a^3\sqrt{2}/96$.

PARTE IV

§ 1

1. No hay soluciones. 2. $x=0$. 3. No hay soluciones. 4. No hay soluciones. El segundo miembro para $\cos x\leqslant 1/2$ no es negativo; sin embargo, estos valores de x satisfacen la desigualdad $|x|\geqslant\pi/3$, es decir, $x^2\geqslant\pi^2/9>1$, por lo tanto $3x^2>3\geqslant 1-2\cos x$. 5. $x=0$. 7. $x=2$. Hay que reducir la ecuación a la forma: $x2^x=8$ y por medio de la selección encontrar la raíz $x=2$; es imposible hallar otras raíces, ya que en el caso de $x\geqslant 0$ el primer miembro de esta ecuación crece con monotonía, mientras que para $x<0$, este miembro no es positivo. 8. $x_1=1/4$, $x_2=2$. Reducir la ecuación a la forma $(\log_2 x+2)\times$ $\times(\log_2 x+x-3)=0$. La ecuación $\log_2 x=3-x$ tiene la única raíz $x=2$; si $x>2$, su primer miembro es mayor que 1, mientras que el segundo, menor que 1; para $x<2$, (admisibles) viceversa. 9. $x_1=0$, $x_2=2$. Reducir la ecuación a la forma $(x-2)2^x=(x-2)(1-x)$. 10. $x=1$. Para $x>1$ tenemos $x^2>1$; por otro lado, para estas x tenemos $x-x^2<0$, es decir, $10^{x-x^2}<1$. Para $0<x<1$, viceversa, $x^x<1$, mientras que $10^{x-x^2}>1$. 11. $x_1=-1$, $x_2=1$. Reducir la ecuación a la forma $2(x+1)\operatorname{sen}(\pi x/6)=(x+1)(3-2x)$. Si $-2\leqslant x\leqslant 2$,

entonces $-\pi/3 \leqslant \pi x/6 \leqslant \pi/3$, y por lo tanto el primer miembro de la ecuación $2\,\mathrm{sen}\,(\pi x/6)=3-2x$ crece, mientras el segundo decrece, por consiguiente $x=1$ es la única raíz de la última ecuación. **12.** $x=1/2$. Reducir la ecuación a la forma $4x-1=2\cos(2\pi x/3)$; su raíz $x=1/2$. No hay otras raíces, ya que para $0\leqslant x<1/2$ tenemos $4x-1<2\cos(2\pi x/3)$, y para $1/2<x\leqslant 1$ tenemos $4x-1>2\cos(2\pi x/3)$. **13.** $x=-1$, $y=1$. **14.** $x_1=2$, $y_1=(\pi/2)+k\pi$; $x_2=-2$, $y_2=k\pi$. **15.** $x=(2k+1)\pi/4$, $y=1$. **16.** $x=k\pi$, $y=1$. **17.** $x=1$, $y=(2k-3)/4$. **18.** $x=\pm 3/\pi$, $y=[(4k+1)\pi/2]\mp(3/\pi)$. **19.** $x_1=-\mathrm{arctg}\sqrt{2}+k\pi$, $y_1=(\pi/4)+2n\pi$; $x_2=\mathrm{arctg}\sqrt{2}+k\pi$, $y_2=(5\pi/4)+2n\pi$. Reducir la ecuación a la forma $[\mathrm{tg}\,x+(\mathrm{sen}\,y+\cos y)]^2+(1-\mathrm{sen}\,2y)=0$. **20.** $x_1=(\pi/4)+2k\pi$, $y_1=(2n+1)\pi$; $x_2=(5\pi/4)+2k\pi$, $y_2=2n\pi$. Sustituyendo $\cos y=z$, reducir la ecuación a la forma $z^2-2z\,\mathrm{sen}\,[x+(\pi/4)]+1=0$, ó $[z-\mathrm{sen}\,[x+(\pi/4)]]^2+[1-\mathrm{sen}^2\,[x+(\pi/4)]]=0$. **21.** $x=0$, $y=1$. Si la desigualdad es válida, entonces $y\geqslant x^2+1\geqslant 1$; por otro lado, $\cos x\geqslant y^2+\sqrt{y-x^2-1}\geqslant y^2$, es decir, $\cos x\geqslant 1$. Por lo tanto, todas las desigualdades expuestas se convierten en las igualdades: $y=x^2+1=1$, de donde $x=0$, $y=1$. La verificación muestra que este par de números satisface realmente la desigualdad. **22.** $x=1$, $y=0$. **23.** $x=\arccos 1/3+(2k+1)\pi$. **24.** No hay soluciones. **25.** $x_{1,2}=\pm 1$, $y_{1,2}=\pm\sqrt{3/2}$; $x_{3,4}=\pm 1$, $y_{3,4}=\mp\sqrt{3/2}$. **26.** $x=2$, $y=2$, $z=-2$. **27.** $x_1=a$, $y_1=0$, $z_1=0$; $x_2=0$, $y_2=a$, $z_2=0$; $x_3=0$, $y_3=0$, $z_3=a$. **28.** $a=-1/2$. **29.** a es cualquier número, $b=(2k+1)\pi-a$.

§ 2

1. No hay soluciones. Conviene hacer uso del hecho de que la suma de dos expresiones positivas recíprocamente inversas no puede ser menor que 2. **2.** $x=-2/3$. Es necesario utilizar el hecho de que la suma de dos expresiones positivas, recíprocamente inversas, es igual a 2 sólo cuando ambas expresiones son iguales a 1. **3.** No hay soluciones. En función del signo ante x, uno de los sumandos es mayor de 2. **4.** $-1\leqslant x\leqslant 1$. **5.** $4/5\leqslant x<1$. Para $x<1$ (y $x\geqslant 4/5$, de las condiciones, para que todas las raíces tengan sentido) cada sumando del primer miembro es mayor que cada sumando en el segundo miembro; para $x>1$ la situación es inversa. **6.** $x_1=(\pi/2)+k\pi$, $x_2=2k\pi$. **7.** $x_1=(\pi/4)+k\pi$, $x_2=k\pi$. **8.** No hay soluciones. Ya que $\sqrt{\mathrm{sen}^3 x}\leqslant \mathrm{sen}\,x$ y $\sqrt{\cos^3 x}\leqslant\cos x$, el primer miembro no supera a $\mathrm{sen}\,x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$; pero $\mathrm{sen}\,x+\cos x=\sqrt{2}$ solamente para $\mathrm{sen}\,x=\cos x=\sqrt{2}/2$, pero para tales x tiene lugar estricta desigualdad $\sqrt{\mathrm{sen}^3 x}<\mathrm{sen}\,x$. **9.** $x=(5\pi/4)+2m\pi$. **10.** No hay soluciones.

§ 3

1. Si primera ecuación no tiene soluciones, $c^2>a^2+b^2$ en particular, $c\neq 0$; hay que representar la segunda ecuación en la forma $(2a\,\mathrm{tg}^2\,x+2c\,\mathrm{tg}\,x+b)\,\mathrm{cotg}\,x=0$. Si $a\neq 0$, el discriminante del trinomio $2ay^2+2cy+b$ es igual a $c^2-2ab>a^2+b^2-2ab\geqslant 0$, es decir, la segunda ecuación tiene dos distintas raíces reales; por lo menos, una de ellas es distinta de cero y por lo tanto $\mathrm{cotg}\,x$ tiene sentido. Si $a=0$, entonces $\mathrm{tg}\,x=-b/2c$; para $b\neq 0$ tenemos $\mathrm{tg}\,x\neq 0$, es decir, la segunda ecuación tiene solución. **2.** $a<\pi^2/2$. **3.** a) $a_1=1$, $a_2=-2$. b) $a=1$. **4.** $a<-1$, $a=0$. **5.** $a=4$, $a>5$. **6.** $a=0$, $0<b\leqslant 1$. **7.** $a=-1$. **8.** $a=-1$, $a=1$. **9.** a) Para ninguna a. b) Para toda a. c) $a\neq 0$. d) Para toda a. e) $a=0$. f) $a\neq 0$.

§ 4

1. $a\geqslant 11/9$. **2.** $2\sqrt{2}\leqslant a<11/9$. **3.** Para ninguna. **4.** $a<-2$. **5.** $a<-3$, $a>0$. **6.** $-1/2\leqslant a<0$. **7.** $m>1$. **8.** $a\leqslant -3$, $a\geqslant -1$. **9.** $y<-2\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}<y<0$, $0<y<1/\sqrt{2}$, $y>2\sqrt{2}$. **10.** $0<y<1$. **11.** $1/2\leqslant a\leqslant 1$. **12.** $-3\leqslant a\leqslant 3$. **13.** Para ninguna. **14.** $x=(2a+1-\sqrt{1+4a})/2$ para $a\geqslant 0$;

no hay soluciones para $a < 0$. **15.** $x_{1,2} = (\sqrt{a^2-1} - a \pm \sqrt{2a^2-5-2a\sqrt{a^2-1}})^2$ para $a < -5/4$; $x = 1$ para $a = -5/4$; para $a > -5/4$ ho hay soluciones. Conviene hallar las raíces del trinomio $f(y) = y^2+2ay+1$ que satisfacen la condición $y \geqslant 2$. Si $D = a^2-1 < 0$, entonces, en general, no hay raíces reales; por lo tanto deberá ser $a^2-1 \geqslant 0$. Si $f(2) = 4a+5 < 0$, en este caso será mayor de 2 la raíz máxima $y = -a+\sqrt{a^2-1}$. Si $f(2) \geqslant 0$ y $-a \geqslant 2$, en este caso son válidas ambas raíces, sin embargo este caso no tiene lugar para ninguna a. **16.** $x = \log_2(2m+\sqrt{4m^2-2m-2})$ para $m < -1$; $x = 1$ para $m = 1$; $x_{1,2} = \log_2(2m \pm \sqrt{4m^2-2m-2})$ para $m > 1$; para las demás m no hay soluciones. Es necesario hallar las raíces positivas del trinomio $y^2-4my+2m+2$. El discriminante $D = 4m^2-2m-2$ no es negativo para $m \leqslant -1/2$, $m \geqslant 1$. Para $m \geqslant 1$ tenemos $y_{1,2} = 2m+\sqrt{4m^2-2m-2}$, para $-1 \leqslant m \leqslant -1/2$ no hay raíces positivas, mientras que para $m < -1$, la raíz mayor es positiva $y = 2m+\sqrt{4m^2-2m-2}$. **17.** $x = (-1)^k \operatorname{arc\,sen} \log_2[(-m+\sqrt{4-3m^2})/2] + k\pi$. Conviene hallar las raíces del trinomio $f(y) = y^2+my+m^2-1$ que satisfacen la condición $1/2 \leqslant y \leqslant 2$. Debido a $-1 < m < 1$ el discriminante $D = 4-3m^2 > 0$, y el término independiente es negativo, por lo tanto es de interés sólo la raíz mayor. Esta última no supera a 2 cuando y sólo cuando $f(2) \geqslant 0$, que se satisface para cualquier m. **18.** $x_1 = (-1)^k \operatorname{arc\,sen} 10^{a+\sqrt{2a^2-2}} + k\pi$, $x_2 = (-1)^k \operatorname{arcsen} \times 10^{a-\sqrt{2a^2-2}} + k\pi$ para $-\sqrt{2} \leqslant a < 1$; $x = x_2$ para $a < -\sqrt{2}$, $a = -1$, $a \geqslant \sqrt{2}$, para las demás x, no hay soluciones. **19.** $x = (-1)^k \operatorname{arc\,sen} a^{(\sqrt{1+4a}-1)/2} + k\pi$ para $0 < a < 1$, $x = (-1)^k \operatorname{arc\,sen} a^{-(\sqrt{1+4a}+1)/2} + k\pi$ para $a > 1$. **20.** $x_{1,2} = \pm(1-a^2)^2/4a^2$ para $0 < a < 1$, $x = 0$ para $a = 1$, para otras a, no hay soluciones. **21.** $x = \log_2 a$ para $0 < a \leqslant 1$, para otras a no hay soluciones. **22.** $x = 1/10$ para $a = 10$; $x_1 = 1/10$; $x_2 = 10^{2-\sqrt{1+8\lg a}}$ para $10 < a < 1000$; $x_1 = 1/10$, $x_2 = 1/1000$ para $a \geqslant 1000$; para las demás a; no hay soluciones. **23.** $x = a^4$ para $1 < a \leqslant \sqrt[4]{2}$; $x = a^{\sqrt{8\log_a 2+4}-2}$ para $a > \sqrt[4]{2}$; para otras a, no hay soluciones. **24.** $x_1 = 10^{1-\sqrt{3}}$, $x_2 = 10^{-1+\sqrt{4\lg a+3}}$ para $10^{1-\sqrt{3}} \leqslant a \leqslant 10^{1+\sqrt{3}}$; $x_{1,2} = 10^{1\pm\sqrt{3}}$ para $a > 10^{1+\sqrt{3}}$, para otras a, ho hay soluciones. **25.** $x = a^2$ para $1 < a \leqslant 2$, $x = a^{-1+\sqrt{4+\log_a 2}}$ para $a > \sqrt{2}$, para otras a, no hay soluciones. **26.** $x_1 = a^{1/\left(\log_2 a+\sqrt{\log_2^2 a-2\log_2 a}\right)}$, $x_2 = a^{1/(2\log_a 2-2)}$ para $0 < a < 1$; $x = x_2$ para $1 < a < 2$ y $2 < a < 4$; $x = x_1$ para $a \geqslant 4$. **27.** Se reduce a la desigualdad $\operatorname{sen} x - \cos y > 0$. **28.** Se reduce a la desigualdad $-1/2 < \cos(x-y) < 1/2$. **29.** Se reduce a la desigualdad $\cos x - \cos y > 0$. **30.** Se reduce a la desigualdad $|\operatorname{sen}(x+y)| > 1/2$. **31.** Se reduce a la desigualdad $\cos 2x + \cos y < 0$.

CONTENIDO

PARTE I
ARITMETICA Y ALGEBRA

PARTE II
TRIGONOMETRIA

PARTE III
GEOMETRIA

PARTE IV

PROBLEMAS «NO TIPICOS»

A NUESTROS
LECTORES:

«MIR» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial «MIR», I. Rizhski per., GSP1—110 129 820, Moscú, URSS.